

6.65 — ośrodki porowate

7.76 — zagadnienia mechaniczne

J. Kubik, M. Kaczmarek

ANALIZA FAL
CZYSTO SPRĘŻYSTYCH
W OŚRODKU
O PODWÓJNEJ POROWATOŚCI

3/1985

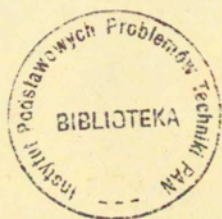
P.269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 listopada 1984 r.



56946



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark. wyd. 1. Ark. druk. 1,5.
Oddano do drukarni w styczniu 1985 r.
Nr zamówienia 59/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Józef Kubik
Maariusz Kaczmarek
Zakład Aeroakustyki

ANALIZA FAL CZYSTO SPRĘŻYSTYCH W OŚRODKU
O PODWÓJNEJ POROWATOŚCI

1. Wstęp.

Opis zjawiska propagacji fal sprężystych w ośrodkach porowatych wypełnionych cieczą jest punktem wyjścia do rozważań licznych ważnych zagadnień geofizyki związanych z propagacją fali sejsmicznych; zagadnień biomechaniki dotyczących fal w materiale kostnym czy też zagadnień wibroizolacji w układach dwuskładnikowych.

Za teoretyczną podstawę tych badań powszechnie przyjmuje się dynamiczną teorię konsolidacji sformułowaną przez Biot [1,2]. Omówienie rezultatów otrzymanych na jej podstawie przez różnych autorów, w odniesieniu m.in. do zagadnień propagacji fal w skałach roponośnych lub nasyconych wodą oraz zagadnień propagacji i tłumienia fal sejsmicznych zawiera praca Dzięcielaka [3].

Istotną cechą ośrodków porowatych nasyconych cieczą jest to, że zagadnieniom dynamicznym w takich ośrodkach towarzyszy sprężenie masowe jako efekt wpływu struktury porów szkieletu na ruch względny przepływającej przez nie cieczy. W przypadku izotropowej struktury porów efekt ten jest widoczny gdy porowatość objętościowa i powierzchniowa są liczbowo różne [4,5], co ma miejsce w większości rzeczywistych materiałów porowatych. Wywiera to istotny wpływ na przebieg propagujących się w takich ośrodkach fal sprężystych.

W równaniach Biota odniesionych do składników fizycznych ośrodka /odpowiednio, cieczy i porowatego szkieletu/, sprzężenie ruchu przez masę występuje jako efekt zapostulowanej energii kinetycznej dla ośrodka dwufazowego w postaci pełnej formy kwadratowej. Zakłada się przy tym, że strukturę porów charakteryzuje jeden skalarny parametr - porowatość objętościowa równa liczbowo porowatości powierzchniowej. Należy podkreślić, że założenie to nie jest spójne z przyjętą postacią energii kinetycznej gdyż równość porowatości objętościowej i powierzchniowej prowadzi jednocześnie do wyeliminowania sprzężenia masowego co wykazano w [4], [5]. Ten fakt pozwala na stwierdzenie, że jeśli w badanym ośrodku porowatości różnią się między sobą to równania ruchu Biota jak też otrzymane na ich podstawie rozwiązania zagadnień dynamicznych nie opisują ściśle przebiegu zjawisk fizycznych odpowiadających takiemu ośrodkowi. Wyznaczone w ten sposób prędkości propagacji fal, a także określone charakterystyki materiałowe nie są spójne z wielkościami mierzonymi.

Celem opisanie rzeczywistego przebiegu zjawisk falowych zachodzi konieczność ponownego przeanalizowania własności propagacji fal w ośrodku porowatym nasyconym cieczą z uwzględnieniem wpływu struktury porów na prędkości oraz charakter propagujących się fal.

W niniejszej pracy rozważa się propagację czysto sprężystych fal w dwuskładnikowym ośrodku izotropowym scharakteryzowanym podwójną porowatością: objętościową i powierzchniową. W takim przypadku układ składników fizycznych ciecz-porowaty szkielet można traktować jako mieszaninę dwóch składników kinematycznych tj. złożoną z cieczy swobodnej charakteryzującej się własnym polem prędkości oraz porowatego szkieletu z uwięzioną w nim cieczą, poruszającą się z prędkością szkieletu. Takie podejście zaproponował Derski w pracach [6], [7] podając jednocześnie równania ruchu odpowiadające przyjętym składnikom kinematycznym ośrodka.

Rozróżnienie składników z kinematycznego punktu widzenia znalazło uzasadnienie w ramach analizy strukturalnej [4], [5]. Dla tak ustalonych składników podano również interpretację falowych /parcjalnych/ tensorów naprężenia i ich związek z

naprężeniami dla składników fizycznych. Dało to możliwość sformułowania odpowiednich równań ruchu uwzględniających efekt sprzężenia masowego oraz ustalenia przyczyn i warunków występowania takiego sprzężenia.

Przyjmując za punkt wyjścia równania ruchu składników kinematycznych w pracy otrzymano równania falowe opisujące propagację dwóch fal dylatacyjnych oraz jednej fali poprzecznej w ośrodku porowatym nasyconym cieczą. Wykazano, że w takim przypadku własności fal zależą zarówno od porowatości objętościowej i porowatości powierzchniowej. Charakter tych zależności w odniesieniu do prędkości propagacji i porównanie z wynikami Biota wskazuje, że uwzględnienie porowatości powierzchniowej ma istotny wpływ na ostateczne rezultaty i uzasadnia celowość przeprowadzonej analizy.

2. Równania ruchu oraz związki konstytutywne.

Podstawę do analizy zagadnień falowych w danym ośrodku stanowią równania ruchu uzupełnione związkami fizycznymi. W przypadku ośrodków porowatych wypełnionych cieczą wyróżnić można dwa sposoby podejścia przy formułowaniu równań ruchu: fizyczny i kinematyczny omówione szczegółowo w [5]. Pierwszy polega na ustaleniu równań ruchu dla poszczególnych składników ośrodka rozróżnialnych z fizycznego punktu widzenia tzn. odpowiednio dla szkieletu i cieczy. Dla takich składników, jednorodnego ośrodka izotropowego, zostały sformułowane równania przez Biota [1] w ramach liniowej teorii konsolidacji w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} G_{ij}^s + \bar{S}^s b_i + r_i^s &= s_{11} \frac{\partial}{\partial t} v_i^s + s_{12} \frac{\partial}{\partial t} v_i^f, \\ G_{ij}^f + \bar{S}^f b_i + r_i^f &= s_{12} \frac{\partial}{\partial t} v_i^s + s_{22} \frac{\partial}{\partial t} v_i^f, \end{aligned}$$

gdzie G_{ij}^s są współrzędnymi tensora naprężenia w szkielecie, $G^f = -f_v p$ jest naprężeniem przenoszonym przez ciecz przy zaniedbaniu wpływu lepkości na jej stan naprężenia, przy czym f_v oznacza porowatość objętościową szkieletu a p ciśnienie efektywne /porowe/ cieczy. Wektory v_i^s i v_i^f są prędkościami składników fizycznych ośrodka, odpowiednio szkieletu i cieczy, b_i oznaczają współrzędne jednostkowych sił masowych, natomiast s_{11} , s_{12} , s_{22} są współczynnikami masowymi spełniającymi warunki

$$(2.2) \quad \begin{aligned} s_{11} + s_{12} &= \rho^s(t - f_v) = \bar{S}^s, \\ s_{12} + s_{22} &= \rho^f f_v = \bar{S}^f, \\ s_{11} > 0, \quad s_{22} > 0, \quad s_{11} s_{22} - S_{12}^2 > 0. \end{aligned}$$

Gęstości ρ^s i ρ^f są efektywnymi gęstościami szkieletu i cieczy. Wielkości r_i^s i r_i^f oznaczają siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy składnikami, liniowo zależne od prędkości względnej składników fizycznych, czyli

$$r_i^s = -r_i^f = b_i(v_i^f - v_i^s).$$

Współczynnik b związany jest z lepkością cieczy μ^f oraz przepuszczalnością szkieletu k jak następuje

$$b = \frac{\mu^f}{k} f_v^2.$$

W równaniach tych pominięto wpływ sił masowych.

Należy nadmienić, że w równaniach ruchu składników fizycznych parametrem charakteryzującym geometryczną strukturę porów jest porowatość objętościowa.

Drugi sposób formułowania równań ruchu uwzględnia fakt, że porowaty szkielet może być scharakteryzowany zarówno porowatością objętościową f_v jak i porowatością powierzchniową λ . W takim przypadku ośrodek traktuje się jako układ dwóch składników kinematycznych: ciecz swobodna i szkielet z cieczą uwięzioną, i równania ruchu mają postać [6], [5]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \overset{1}{G}_{ij} + \overset{1}{S} b_i + \overset{1}{X}_i &= \overset{1}{S} \frac{D}{Dt} \overset{1}{V}_i + \frac{1}{2} m_i, \\ \overset{2}{G}_{ij} + \overset{2}{S} b_i + \overset{2}{X}_i &= \overset{2}{S} \frac{D}{Dt} \overset{2}{V}_i + \frac{1}{2} m_i, \end{aligned}$$

gdzie $\overset{1}{G}_{ij}$ i $\overset{1}{S}$ są odpowiednio składowymi tensora naprężenia i gęstością szkieletu i cieczy uwięzionej, $\overset{2}{G}_{ij}$ i $\overset{2}{S}$ naprężeniem, i gęstością cieczy swobodnej przy czym

$$(2.4) \quad \overset{1}{S} = S^c(1-f_v) + S^f(f_v-\lambda), \quad \overset{2}{S} = S^f \lambda.$$

Wektory $\overset{1}{V}_i$ i $\overset{2}{V}_i$ reprezentują prędkości składników kinematycznych i są związane z prędkościami składników fizycznych zależnościami

$$\begin{aligned} \overset{1}{V}_i &\equiv v_i^s, \\ \overset{2}{V}_i &= \frac{f_v}{\lambda} v_i^f + (1 - \frac{f_v}{\lambda}) v_i^s. \end{aligned}$$

Wielkość m_i charakteryzuje sprzężenie dynamiczne wskutek wymiany masy pomiędzy składnikami kinematycznymi, natomiast wektory $\overset{1}{X}_i = -\overset{2}{X}_i$ oznaczają siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy tymi składnikami i mogą być ustalone w postaci następującego związku

$$\ddot{x}_i = \dot{\ddot{x}}_i = -\dot{\ddot{x}}_i = b_i (\dot{v}_i - v_i) , \quad b_i = \text{const.}$$

Równania (2.3) przy pominięciu członów nieliniowych upraszczają się do postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^1 + \dot{\sigma}^1 b_i + \dot{\ddot{x}}_i &= \dot{\sigma}^1 \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i , & \dot{\sigma}^1 &= \text{const.} \\ \dot{\sigma}_{ii}^2 + \dot{\sigma}^2 b_i + \dot{\ddot{x}}_i &= \dot{\sigma}^2 \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i , & \dot{\sigma}^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

i starowię punkt wyjścia do analizy propagacji fal w ośrodku porowatym nasyconym cieczą.

Jak wykazano w [4] pomiędzy tensorami naprężeń składników fizycznych i składników kinematycznych zachodzą związki

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= \sigma_{ij}^0 + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sigma^f \delta_{ij} , \\ \sigma &= \frac{\lambda}{\mu} \sigma^f , \end{aligned}$$

natomiast prędkości względne spełniają zależność

$$(2.7) \quad v_i^f - v_i^s = \frac{\lambda}{\mu} (\dot{v}_i - v_i) , \quad \dot{v}_i \equiv v_i^s .$$

Na podstawie [5] można stwierdzić, że pomiędzy opisem równowagi dynamicznej ośrodka przy pomocy wielkości składników fizycznych i opisem wielkościami składników kinematycznych - ponieważ dotyczą tego samego zjawiska fizycznego - zachodzi pełna równoważność pod warunkiem właściwego ustalenia oddziaływań pomiędzy składnikami.

Brak jest natomiast równoważności pomiędzy równaniami (2.1) i (2.5) gdyż równania ruchu Biota ustalone przy wykorzystaniu koncepcji równań Lagrange'a różnią się w swej formie od równań ruchu dla składników fizycznych otrzymanych na podstawie analizy równań bilansowych teorii ośrodków wieloskładnikowych, a które dla badanego ośrodka mają postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^s + \bar{\sigma}^s b_i + \pi_i^s &= \bar{\sigma}^s \frac{D}{Dt} v_i^s, \\ \sigma_{ii}^f + \bar{\sigma}^f b_i + \pi_i^f &= \bar{\sigma}^f (f_v - \lambda) \frac{D}{Dt} \dot{v}_i + \bar{\sigma}^f \lambda \frac{D}{Dt} \dot{v}_i + m_i \end{aligned}$$

gdzie

$$\pi_i^s = -\bar{\pi}_i^s = \left\{ \left[\left(1 - \frac{\lambda}{f_v} \right) \bar{\sigma}^f \right]_{,i} + \bar{\sigma}^f (f_v - \lambda) b_i + \bar{\pi}_i^s - \bar{\sigma}^f (f_v - \lambda) \frac{D}{Dt} \dot{v}_i - \frac{1}{2} m_i \right\}$$

Równania (2.8) po linearyzacji można zapisać jak następuje

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^s + \bar{\sigma}^s b_i + \pi_i^s &= \bar{\sigma}^s \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i, \\ \sigma_{ii}^f + \bar{\sigma}^f b_i + \pi_i^f &= (\bar{\sigma}^f - \bar{\sigma}^f \lambda) \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i + \bar{\sigma}^f \lambda \frac{\partial}{\partial t} \dot{v}_i, \quad \lambda f_v = \text{const} \end{aligned}$$

i są równoważne równaniom (2.5).

Pełna charakterystyka badanego ośrodka, oprócz równań ruchu wymaga ustalenia związków konstytutywnych. W zakresie teorii liniowej związku naprężeń z odkształceniami, dla składników fizycznych, przy pominięciu wpływu lepkości na naprężenia w cieczy, mają postać [8]

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= 2N \varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\Theta) \delta_{ij}, \\ \sigma_{ii}^f &= Q\varepsilon + R\Theta, \end{aligned}$$

gdzie ε_{ij} są współrzędnymi tensora odkształcenia szkieletu, ε i Θ oznaczają odpowiednio dylatacje szkieletu i cieczy. Wielkości A , N , Q , R są stałymi charakteryzującymi własności ośrodka dwufazowego przy fizycznym traktowaniu składników. Liniowe związki konstytutywne dla składników kinematycznych możemy otrzymać z (2.10) po wykorzystaniu zależności (2.6) oraz następujących relacji geometrycznych

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \Theta &= U_{i,i}, \quad \dot{\Theta} = \dot{U}_{i,i}, \end{aligned}$$

oraz

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{E}}_{ij} &\equiv \varepsilon_{ij} \quad , \quad \dot{\hat{E}} \equiv \varepsilon \quad , \\ \dot{\hat{\Theta}} &= \frac{\lambda}{f_v} \dot{\hat{\Theta}} + \left(1 - \frac{\lambda}{f_v}\right) \dot{\hat{E}} \quad , \quad \lambda, f_v = \text{const} \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\hat{\Theta}}$ oznacza dylatację cieczy swobodnej natomiast u_i, U_L, \dot{U}_L są współrzędnymi wektorów przemieszczenia odpowiednio szkieletu, cieczy całkowitej oraz cieczy swobodnej. Mamy zatem

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{G}}_{ij} &= 2N \dot{\hat{E}}_{ij} + \{(H_1 - 2N)\dot{\hat{E}} + H_2 \dot{\hat{\Theta}}\} \delta_{ij} \quad , \\ \dot{\hat{\Theta}} &= H_2 \dot{\hat{E}} + H_3 \dot{\hat{\Theta}} \quad , \end{aligned}$$

gdzie N, H_1, H_2, H_3 są stałymi materiałowymi w odniesieniu do składników kinematycznych, przy czym

$$(2.14) \quad \begin{aligned} H_1 &= 2N + A + 2Q\left(1 - \frac{\lambda}{f_v}\right) + \left(1 - \frac{\lambda}{f_v}\right)^2 R \quad , \\ H_2 &= \frac{\lambda}{f_v} \left[Q + \left(1 - \frac{\lambda}{f_v}\right)R\right] \quad , \\ H_3 &= \left(\frac{\lambda}{f_v}\right)^2 R \quad . \end{aligned}$$

3. Równania falowe.

Równania propagacji fal sprężystych dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą należy formułować w oparciu o równania ruchu składników kinematycznych ze względu na występujące w nich prędkości efektywne i jasno określoną postać oddziaływań pomiędzy składnikami w odróżnieniu od opisu składników fizycznych.

Na wstępie zapiszemy równania ruchu przy pomocy przemieszczeń dla przypadku czysto sprężystego pomijając siły oddziaływania κ oraz wpływ sił masowych. Podstawiając do równań (2.5) związki fizyczne (2.13) oraz wykorzystując zależności geometryczne (2.11) otrzymamy równania przemieszczeniowe dla składników kinematycznych w następującej postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} N \nabla^2 u_i + (H_1 - N) \dot{E}_{,i} + H_2 \dot{\Theta}_{,i} &= \dot{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i, \\ H_2 \dot{E}_{,i} + H_3 \dot{\Theta}_{,i} &= \dot{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{U}_i. \end{aligned}$$

Powyższy układ sześciu równań dla sześciu nieznanymi współrzędnych wektorów przemieszczeń u i \dot{U} całkowicie opisuje zagadnienie propagacji fal czysto sprężystych. W celu otrzymania odpowiednich równań falowych wykorzystamy znany sposób dekompozycji wektorów przemieszczeń na część potencjalną i solenoidalną [9]. Stosując operację dywergencji do równań (3.1) otrzymamy równania falowe opisujące propagację fal dylatacyjnych jak następuje

$$(3.2) \quad \begin{aligned} H_1 \nabla^2 \dot{E} + H_2 \nabla^2 \dot{\Theta} &= \dot{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{E}, \\ H_2 \nabla \dot{E} + H_3 \nabla^2 \dot{\Theta} &= \dot{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{\Theta}. \end{aligned}$$

Zastosowanie operacji rotacji do (3.1) prowadzi do równań dla fal skrętnych

$$(3.3) \quad \begin{aligned} N \nabla^2 \omega &= \dot{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega, \\ \dot{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystano podstawienia

$$\underline{\omega} = \text{rot } \underline{u} \quad , \quad \underline{\Omega} = \text{rot } \underline{U} \quad .$$

Na podstawie równań (3.2) i (3.3) stwierdzamy, że podobnie jak to wykazał Biot [1] w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą propagują się dwie sprzężone ze sobą fale dylatacyjne oraz jedna fala skrętna.

4. Własności fal dylatacyjnych.

Celem scharakteryzowania własności fal dylatacyjnych przedyskutujemy przypadek najprostszy, falę płaską propagującą się w kierunku x_1 . Dla dalszych rozważań wygodnie jest wprowadzić prędkość odniesienia v_d zdefiniowaną jak następuje

$$(4.1) \quad v_d^2 = \frac{H}{S} \quad ,$$

gdzie

$$H = H_1 + 2H_2 + H_3 \quad ,$$

$$S = \underline{g} + \underline{\tilde{g}} = s^2(1-f_v) + s^f f_v \quad .$$

Reprezentuje ona prędkość fali dylatacyjnej mieszaniny cieczo-szkieleł charakteryzującej się jedną kinematyką tj. dla przypadku gdy nie występuje ruch względny pomiędzy składnikami. Wówczas $\dot{\epsilon} = \dot{\tilde{\epsilon}} = \dot{\epsilon}$ i równanie falowe otrzymane przez dodanie do siebie równań (3.2) ma postać

$$(4.2) \quad \nabla^2 \dot{\epsilon} = \frac{1}{v_d^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \dot{\epsilon} \quad .$$

Na uwagę zasługuje fakt, że przy wspólnej dla obu składników kinematyce wpływ struktury na prędkość v_d podobnie jak na wielkości H i S manifestuje się tylko poprzez porowatość objętościową, nie zależą te wielkości natomiast od porowatości powierzchniowej.

Wprowadzimy bezwymiarowe parametry charakteryzujące sprężyste własności ośrodka

$$(4.3) \quad \alpha_{11} = \frac{H_1}{H}, \quad \alpha_{12} = \frac{H_2}{H}, \quad \alpha_{22} = \frac{H_3}{H},$$

oraz parametry opisujące własności masowe

$$(4.4) \quad \frac{\hat{G}_1}{S} = \delta_1^* > 0, \quad \frac{\hat{G}_2}{S} = \delta_2^* > 0.$$

Ze względu na warunek

$$(4.5) \quad \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + \alpha_{22} = \delta_1^* + \delta_2^* = 1,$$

spośród pięciu parametrów tylko trzy są niezależne.

Równania falowe (3.2) po uwzględnieniu (4.3) i (4.4) przyjmują postać

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \nabla^2(\alpha_{11} \hat{E} + \alpha_{12} \hat{\Theta}) &= \delta_1^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E}, \\ \nabla^2(\alpha_{12} \hat{E} + \alpha_{22} \hat{\Theta}) &= \delta_2^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\Theta}. \end{aligned}$$

Rozwiązania tych równań możemy przyjąć w postaci następujących funkcji

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \hat{E} &= C_1 \exp [i(kx_1 + \hat{\omega}t)], \\ \hat{\Theta} &= C_2 \exp [i(kx_1 + \hat{\omega}t)], \end{aligned}$$

gdzie $\hat{\omega}$ jest częstością kołową, natomiast k jest liczbą faliową. W celu określenia prędkości propagacji fal płaskich,

$$v = \frac{\hat{\omega}}{k}$$

należy podstawić rozwiązania (4.7) do równań (4.6). Wprowadzając zmienną

$$z = \frac{v_d^2}{v^2}$$

otrzymamy jednorodny układ równań ze względu na C_1 i C_2 zawierający zmienny parametr z ,

$$(4.8) \quad \begin{aligned} C_1(z\alpha_{11} - \delta_1^2) + z\alpha_{12}C_2 &= 0, \\ C_1z\alpha_{12} + C_2(z\alpha_{22} - \delta_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Jak wynika z teorii równań liniowych, powyższy układ równań ma rozwiązanie niezerowe jeżeli wyznacznik tego układu się zeruje. Na tej podstawie otrzymujemy kwadratowe równanie dla z

$$(4.9) \quad z^2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) - z(\alpha_{11}\delta_2^2 + \alpha_{22}\delta_1^2) + \delta_1^2\delta_2^2 = 0.$$

Równanie to posiada dwa pierwiastki z_1 i z_2 , które pozwalają wyznaczyć odpowiednie prędkości dwóch fal podłużnych

$$(4.10) \quad \begin{aligned} v_1^2 &= \frac{v_a^2}{z_1}, \\ v_2^2 &= \frac{v_a^2}{z_2}. \end{aligned}$$

Oznaczając przez $C_1^{(1)}$ i $C_2^{(1)}$ amplitudy odpowiadające pierwiastkowi z_1 , natomiast $C_1^{(2)}$ i $C_2^{(2)}$ amplitudy odniesione do z_2 , na podstawie (4.8) otrzymamy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{\delta_1^2 C_1^{(0)2} + \delta_2^2 C_2^{(1)2}}{\alpha_{11} C_1^{(1)2} + 2\alpha_{12} C_1^{(1)} C_2^{(1)} + \alpha_{22} C_2^{(1)2}}, \\ z_2 &= \frac{\delta_1^2 C_1^{(2)2} + \delta_2^2 C_2^{(2)2}}{\alpha_{11} C_1^{(2)2} + 2\alpha_{12} C_1^{(2)} C_2^{(2)} + \alpha_{22} C_2^{(2)2}}. \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że pierwiastki z_1 , z_2 są zawsze dodatnie. Wynika to z własności układu równań (4.8) traktowanego jako ogólne zagadnienie wartości własnych, gdzie macierze utworzone ze współczynników α i δ są symetryczne i dodatnio określone dzięki kwadratowej, dodatnio określonej formie energii kinetycznej i potencjalnej.

Amplitudy fal podłużnych spełniają warunek ortogonalności

$$(4.12) \quad \delta_1^2 C_1^{(1)} C_1^{(2)} + \delta_2^2 C_2^{(1)} C_2^{(2)} = 0,$$

z którego wynika, że jeśli np. amplitudy $C_1^{(s)}$ i $C_2^{(s)}$ związane z prędkością v_1 mają ten sam znak to $C_1^{(w)}$ i $C_2^{(w)}$ muszą być różnych znaków i odwrotnie. Stąd wynika, że jedna z fal posiada amplitudy zgodne w fazie podczas gdy amplitudy drugiej fali są przeciwne w fazie. Na podstawie (4.11) i (4.10) stwierdzamy, że wobec dodatnich wartości współczynników sprężystych i masowych, amplitudy zgodne w fazie towarzyszą fali o większej prędkości - tzw. fali szybkiej lub fali pierwszego rodzaju /the wave of the first kind/, natomiast fala o mniejszej prędkości - zwana falą wolną lub falą drugiego rodzaju /the wave of the second kind/ - posiada amplitudy przeciwne w fazie.

Ponieważ jak wynika z (4.3) i (4.4) po uwzględnieniu (2.4) i (2.14), współczynniki α_{11} , α_{12} , α_{22} oraz β_1 , β_2 zależą zarówno od porowatości objętościowej jak i od porowatości powierzchniowej, zatem od obu tych porowatości zależą prędkości fal podłużnych v_1 i v_2 . Dla przypadku równych porowatości wartości współczynników sprężystych i masowych oznaczonych jako

$$\bar{\alpha}_{11}, \bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{22} \quad \text{i} \quad \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$$

są równoważne współczynnikom Biota odpowiednio G_{11} , G_{12} , G_{22} i δ_{11} , δ_{12} , ($\delta_{12}=0$) i wyznaczone przy ich użyciu prędkości fal \bar{v}_1 i \bar{v}_2 odpowiadają prędkościom fal określonym w ramach teorii Biota.

Ważnym zagadnieniem jest zbadanie wpływu struktury porów scharakteryzowanej porowatością objętościową i różną od niej liczbowo porowatością powierzchniową na prędkości fal podłużnych w porównaniu z wynikami Biota. Dla ustalonych wyjściowych wartości parametrów sprężystych

$$\bar{\alpha}_{11} = 0,61, \quad \bar{\alpha}_{12} = 0,305, \quad \bar{\alpha}_{22} = 0,043$$

przebieg zmian prędkości propagacji v_1 i v_2 odniesionych do prędkości v_d w zależności od ilorazu λ/fv , dla różnych parametrów masowych $\bar{\beta}_1$ i $\bar{\beta}_2$ przedstawiono na rys.1.

Zbiorcze wyniki zamieszczono na rys.2.

Z przebiegu krzywych wynika, że wpływ zmiany porowatości powierzchniowej /struktury porów/ na prędkości v_1 i v_2 jest istotny, dotyczy to zwłaszcza fali wolnej propagującej się z prędkością v_2 .

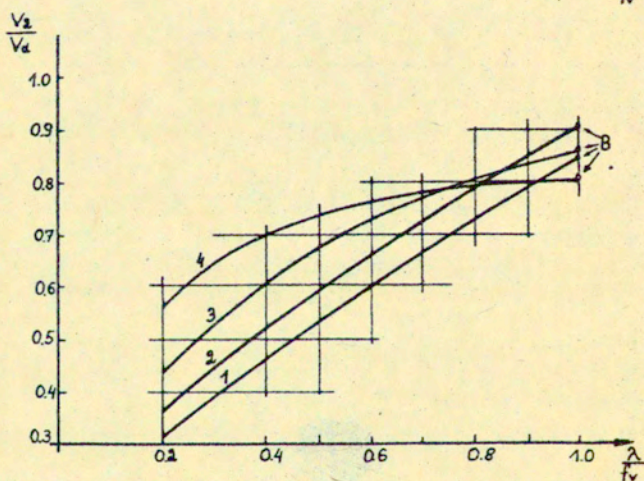
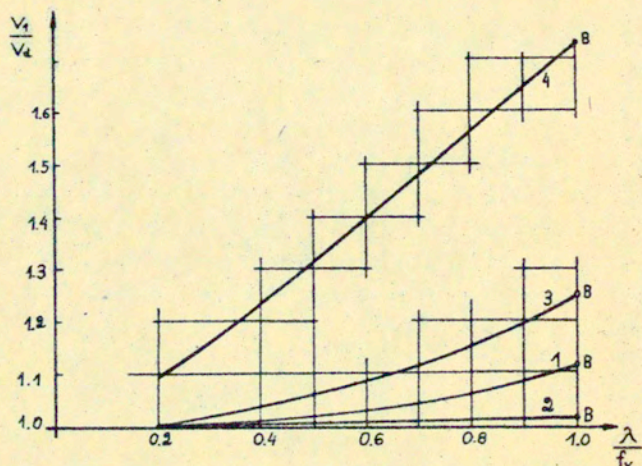
	$\frac{\sigma}{\sigma_1}$
1	0,5
2	0,7
3	0,8
4	0,9

$$\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 = 1$$

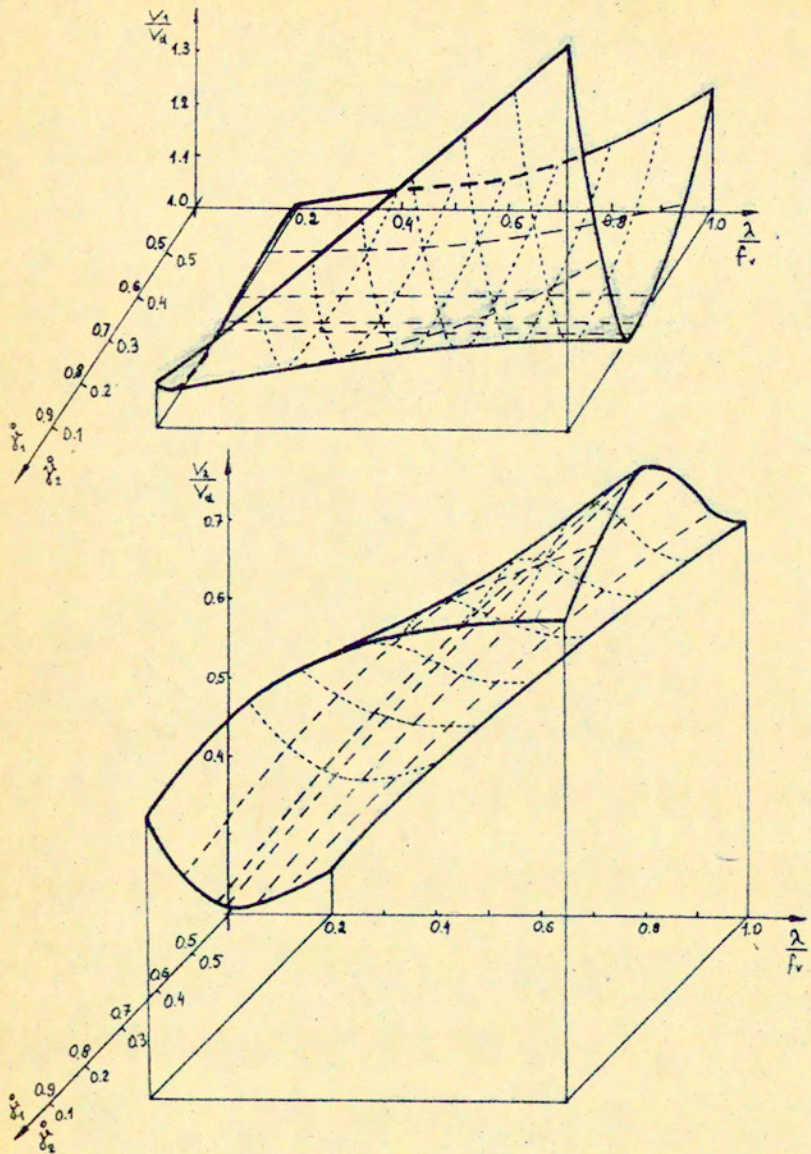
$$\dot{\alpha}_{11} = 0,61$$

$$\dot{\alpha}_{12} = 0,305$$

$$\dot{\alpha}_{22} = 0,043$$



Rys.1. Przebieg zmian prędkości fal dylatacyjnych w funkcji λ/f_v dla ustalonego rozkładu gęstości.

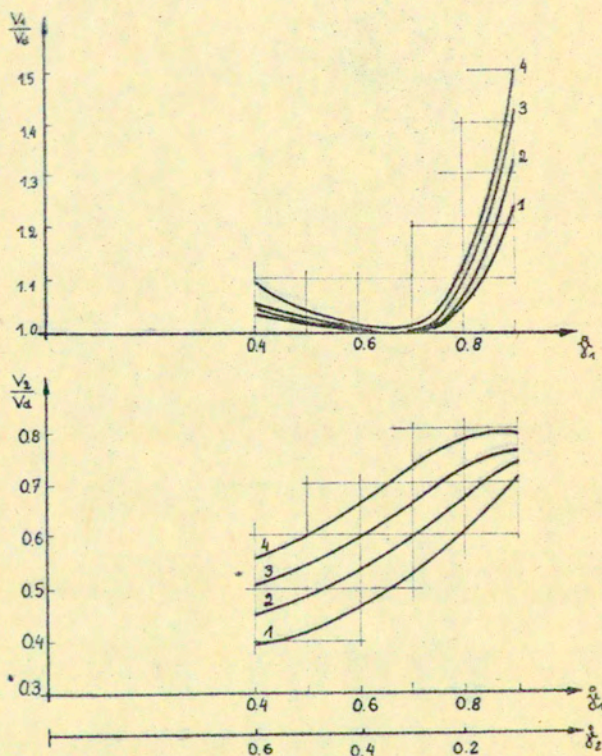


Rys.2. Przebieg zmian prędkości fal dylatacyjnych w funkcji $\frac{f_1}{f_0}$, $\frac{f_2}{f_0}$ oraz $\frac{\lambda}{f_0}$.

Punkty oznaczone literą B wskazują wartości prędkości propagacji fal sprężystych przewidywanych teorią Biota, przy zaniedbaniu sprzężenia masowego / $\gamma_{12} = 0$ / oraz wartości ilorazu $\lambda/\mu = 1$.

Wpływ rozkładu gęstości obu składników kinematycznych scharakteryzowanych współczynnikami γ_1 i γ_2 na zmiany prędkości fal dylatacyjnych przedstawiono na rys.3.

	λ/μ
1	0.4
2	0.5
3	0.6
4	0.7

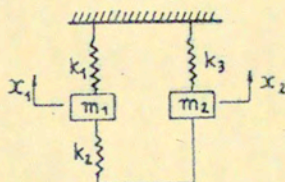


Rys.3. Przebieg zmian prędkości fal dylatacyjnych w funkcji γ_1 , γ_2 dla różnych wartości ilorazu λ/μ .

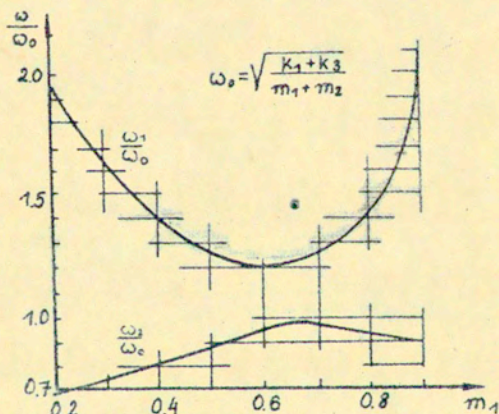
Przytoczone krzywe, wyznaczone dla różnych wartości ilorazu $\frac{\lambda}{\nu}$ dotyczą przypadku kiedy pozostają stałe współczynniki

$$\bar{\alpha}_H = 0.61, \quad \bar{\alpha}_2 = 0.305, \quad \bar{\alpha}_{12} = 0.043.$$

Można zauważyć, że charakter zmian prędkości obu fal jest analogiczny do przebiegu funkcji częstości drgań układu o dwóch stopniach swobody ze sprzężeniem sprężystym, dla różnych rozkładów mas rys.4.



$$k_1 = 0.6; \quad k_2 = 0.1; \quad k_3 = 0.3; \quad m_1 + m_2 = 1.0$$



Rys.4. Przebiegi częstości drgań własnych ω_1, ω_2 układu drgającego dla różnych rozkładów mas i niezmiennych stałych sprężystych k_1, k_2, k_3

5. Własności fal skrętnych.

Równanie dla fali skrętnej (3.3) można przedstawić w postaci

$$(5.1) \quad \nabla^2 \omega = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

gdzie prędkość propagacji tej fali jest

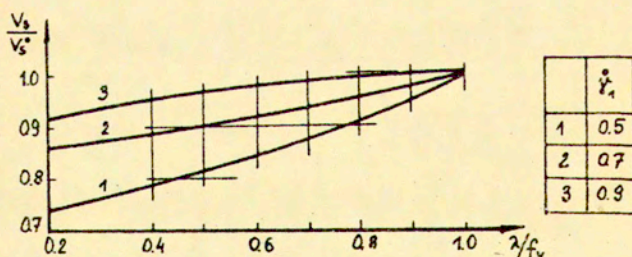
$$(5.2) \quad v_s = \left(\frac{N}{S} \right)^{1/2}, \quad S = g^c(1-f_v) + g^f(f_v - \lambda)$$

Widać, że wartość tej prędkości zależy nie tylko od gęstości szkieletu ale również od obecności cieczy uwięzionej w szkielecie. Decyduje o tym różnica pomiędzy porowatością objętościową i powierzchniową.

Dla przypadku równych porowatości, $f_v = \lambda$, prędkość propagacji fali skrętnej zależy wyłącznie od charakterystyki szkieletu. Wówczas mamy

$$(5.3) \quad v_s^c = \left[\frac{N}{g^c(1-f_v)} \right]^{1/2}$$

Zmiany prędkości propagacji fali skrętnej w stosunku do prędkości odniesienia v_s^c w funkcji zmian porowatości powierzchniowej /udziału cieczy uwięzionej/ dla różnych wartości δ_1 , δ_2 przedstawia wykres na rys. 5.



Rys.5. Przebiegi zmian prędkości fali skrętnej przy zmiennym ilorazie porowatości λ/f_v dla różnych wartości δ_1 .

Równanie (3.3) jest w zgodzie z twierdzeniem Kelvina stwierdzającym, że w cieczy nielepkiej rotacja prędkości jest równa zeru, tak więc w cieczy swobodnej nie propaguje się fala skrętna.

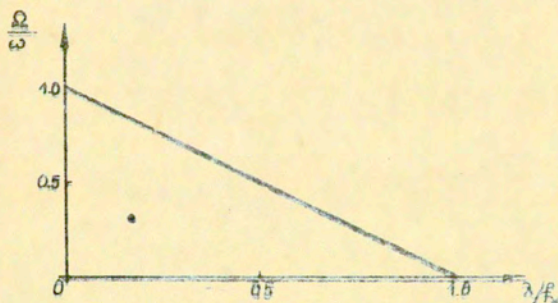
Jeśli oznaczymy rotację przemieszczenia dla cieczy całkowitej jako

$$\Omega = \text{rot } U$$

to na podstawie związków (2.12), , po wykorzystaniu (2.11), , otrzymamy interesujący wynik

$$(5.4) \quad \Omega = \left(1 - \frac{\lambda}{f_v}\right) \omega,$$

który pozwala stwierdzić, że ciecz jako składnik fizyczny posiada rotację, w następstwie wpływu struktury na ruch cieczy. Rotacja ta jest sprzężona z rotacją szkieletu i znika w przypadku równych porowatości. Należy podkreślić, że fakt występowania rotacji w cieczy całkowitej dyskutowany przez Biota (1) jako wynik zapostulowanej postaci energii kinetycznej, tutaj znajduje uzasadnienie strukturalne. Zmiany stosunku wartości analizowanych rotacji w zależności od zmiany ilorazu porowatości powierzchniowej i objętościowej przedstawione na rys. 6,



Rys. 6. Zmiana rotacji przemieszczenia cieczy całkowitej w funkcji λ/f_v .

Jest widoczne, że w przypadku małych wartości λ/f_v co odpowiada np. porom o znacznych średnicach połączonych cienkimi kanałkami/ wartość rotacji cieczy jest bliska wartości rotacji szkieletu. Wówczas prawie cała ciecz jest cieczą uwięzioną i porusza się razem ze szkieletem. Natomiast w przypadku gdy wartość porowatości powierzchniowej zmierza do wartości porowatości objętościowej w cieczy całkowitej zanika rotacja przemieszczenia. Wynik ten różni się od rezultatu Biota otrzymanego dla $\lambda/f_v = 1$. Zdaniem autorów jest to skutkiem niespójnych założeń Biota przyjmujących z jednej strony $\lambda/f_v = 1$ zaś z drugiej uwzględnienie w energii kinetycznej sprzężenia masowego.

6. Wnioski końcowe.

W pracy przeanalizowano propagację fal czysto sprężystych w ośrodku porowatym nasyconym cieczą uwzględniając wpływ różnic pomiędzy porowatością powierzchniową i objętościową szkieletu na charakter fal i prędkości ich propagacji.

Stwierdzono, że w ośrodku takim /podobnie jak wykazał Biot [1] dla ośrodka z jedną porowatością/ propagują się dwie fale dylatacyjne i jedna fala skrętna. Należy przy tym podkreślić, że odpowiadające im prędkości propagacji zależą w sposób istotny od obu porowatości i dla $\lambda \neq f_v$ odbiegają od wartości określonych przez Biota /patrz rysunki 1,2,5/.

Kinematyczne traktowanie składników pozwoliło stwierdzić, że w cieczy swobodnej /nielepkiej/ nie występuje rotacja przemieszczenia - zgodnie z twierdzeniem Kelvina, natomiast fakt występowania rotacji w cieczy całkowitej jest następstwem istnienia cieczy uwięzionej w szkielecie. Ten efekt, będący u Biota wynikiem zapostulowanej postaci energii kinetycznej, tutaj znajduje uzasadnienie strukturalne.

LITERATURA

- [1] M.A. BIOT, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 28,2, 168 - 178, 1956.
- [2] M.A. BIOT, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 28,2, 179 - 191, 1956.
- [3] R. DZIĘCIELAK, Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym nasyconym cieczą. Wyd. Pol. Poznańskiej, Seria Rozprawy Nr 118, 1980.
- [4] J. KUBIK, Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności. Prace IPPT, Nr 29, 1981.
- [5] J. KUBIK, A dynamic theory of fluid-porous solid composition. I. Motion equations, Arch. Mech. Stos. /w druku/.
- [6] W. DERSEKI, Equations of motion for a fluid-saturated porous solid, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 26,1, 11 - 16, 1978.
- [7] W. DERSEKI, S.J. KOWALSKI, On the motion and mass continuity equations in a porous fluid-saturated medium. Studia geot. et mech., Vol.2,2, 1980, 3 - 11.
- [8] M.A. BIOT, Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. J. Appl. Phys., Vol. 26,2, 182 - 185, 1955.
- [9] W. NOWACKI, Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.

Streszczenie.

W pracy analizowano fale w ośrodku porowatym o sprężystym szkielecie nasyconym cieczą przy pominięciu wpływu jej lepkości. Punktem wyjścia były równania falowe otrzymane z równań ruchu dla składników kinematycznych. Stwierdzono, że w takim przypadku w ośrodku propagują się dwie fale dylatacyjne i jedna fala skrętna. Badano wpływ porowatości powierzchniowej różnej liczbowo od porowatości objętościowej na prędkości fazowe fal czysto sprężystych w szerokim zakresie zmian gęstości składników. Wykazano, że otrzymane wyniki różnią się od rezultatów Biota za wyjątkiem przypadku kiedy porowatość powierzchniowa i objętościowa są liczbowo równe.