

## XXIV.

## FERMAT A MERSENNE (1).

&lt; DÉCEMBRE 1637 &gt;

(D. III, 40).

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai vu dans la Lettre de M. Descartes, que vous avez pris la peine de m'envoyer, des réponses succinctes qu'il fait aux objections que j'avois formées contre sa Dioptrique, auxquelles j'eusse plus tôt répondu si mes occupations nécessaires ne m'eussent empêché de le faire, de quoi M. de Carcavi sera mon garant. Je vous proteste d'abord que ce n'est point par envie ni par émulation que je continue cette petite dispute, mais seulement pour découvrir la vérité; de quoi j'estime que M. Descartes ne me saura pas mauvais gré, d'autant plus que je connois son mérite très éminent, et que je vous en fais ici une déclaration très expresse. J'ajouterai, auparavant que d'entrer en matière, que je ne désire pas que mon écrit soit exposé à un plus grand jour

(1) Le texte de cette Lettre a été révisé sur la copie faite à Vienne par Despeyroux d'après les originaux de Clerselier (Bibl. Nat. MS. français nouv. acq. 3280, fol. 29 à 34). Elle répond à la Lettre XXIII qui précède.

Sa date est fixée au 25 janvier 1638 par l'annotateur de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut (*Œuvres de D.*, éd. Cousin, VI, p. 381), et de fait Mersenne ne l'adressa à Descartes que le 12 février 1638. Mais il la lui avait annoncée dès la fin de décembre 1637, en même temps qu'il lui envoyait des écrits mathématiques de Fermat (voir ci-après Lettre XXV, 2<sup>e</sup> note). C'est, en effet, à la présente Pièce XXIV que se rapporte le passage suivant d'une Lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, III, p. 429) à dater de janvier 1638 :

« Je n'ai pas tant de desir de voir la démonstration de M. de Fermat contre ce que j'ai écrit de la réfraction, que je vous veuille prier de me l'envoyer par la poste, mais, lorsqu'il se présentera commodité de me l'adresser par mer, avec quelques balles de marchandise, je ne serai pas marri de la voir, avec la Géostatique et le Livre de la Lumière de M. de la Chambre et tout ce qui sera de pareille étoffe; non que je ne fusse bien aise de voir promptement ce qu'écrivent les autres pour ou contre mes opinions ou de leur invention, mais les ports de lettres sont excessifs. »

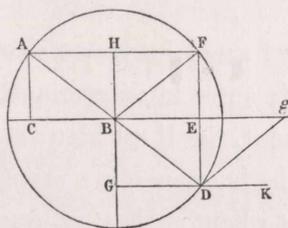
que celui que peut souffrir un entretien familier, de quoi je me confie à vous.

2. Je tranche en quatre mots notre dispute sur la réflexion, laquelle pourtant je pourrois faire durer davantage, et prouver que l'auteur a accommodé son *medium* à sa conclusion, de la vérité de laquelle il étoit auparavant certain; car, quand je lui nierois que sa division des déterminations au mouvement n'est pas celle qu'il faut prendre, puisque nous en avons d'infinies, je le réduirois à la preuve d'une proposition qui lui seroit très malaisée. Mais, puisque nous ne doutons pas que les réflexions ne se fassent à angles égaux, il est superflu de disputer de la preuve, puisque nous connoissons la vérité; et j'estime que je ferai mieux, sans marchander, de venir à la réfraction, qui sert de but à la Dioptrique.

3. Je reconnois, avec M. Descartes, que la force ou puissance mouvante est différente de la détermination, et, par conséquent, que la détermination peut changer sans que la force change, et au contraire.

L'exemple du premier cas se voit en la figure de la 15<sup>e</sup> page de la Dioptrique, où la balle poussée du point A au point B (*fig. 53*) se dé-

Fig. 53.

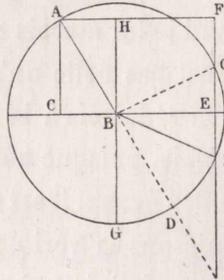


tourne au point F, de sorte que la détermination à se mouvoir dans la ligne AB change, sans que la force qui continue son mouvement soit diminuée ou changée.

Nous pouvons nous servir de la figure de la page 17 pour le second cas (*fig. 56*). Car, si nous imaginons que la balle soit poussée du point H jusque au point B, puis qu'elle tombe perpendiculairement

sur la toile CBE, il est évident qu'elle la traversera dans la ligne BG, et ainsi sa force mouvante s'affoiblira, et son mouvement sera retardé sans que la détermination change, puisqu'elle continue son mouvement dans la même ligne HBG.

Fig. 56.



4. Je reviens maintenant à la démonstration de la réfraction sur la même figure de la page 17.

« *Considérons* <sup>(1)</sup> », dit l'auteur, « *que des deux parties, dont on peut imaginer que cette détermination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la rencontre de la toile, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à cause que cette toile ne lui est aucunement opposée en ce sens-là.* »

5. Je remarque d'abord que l'auteur ne s'est pas souvenu de la différence qu'il avoit établie entre la détermination et la force mouvante ou la vitesse du mouvement. Car il est bien vrai que la toile CBE affoiblit le mouvement de la balle, mais elle n'empêche pas qu'elle ne continue sa détermination de haut en bas, et, quoique ce soit plus lentement qu'auparavant, on ne peut pas dire que, parce que le mouvement de la balle est affoibli, la détermination qui la fait aller de haut en bas soit changée. Au contraire, sa détermination à se mouvoir dans la ligne BI est aussi bien composée, au sens de l'auteur, de celle qui la fait aller de haut en bas et de celle qui la fait aller de la gauche à la

(1) Texte de la Dioptrique : *Et considérons aussi que etc.*

droite, comme la première détermination à se mouvoir dans la ligne AB.

6. Mais donnons que la détermination vers BG, ou de haut en bas, pour parler comme l'auteur, soit changée; nous en pouvons conclure que la détermination vers BE, ou de gauche à droite, est aussi changée. Car, si la détermination vers BG est changée, c'est pource qu'à comparaison du premier mouvement, la balle qui maintenant se détourne et prend le chemin de BI, avance moins à proportion vers BG que vers BE qu'elle ne faisoit auparavant; or, par ce que nous supposons qu'elle avance à proportion moins vers BG que vers BE qu'elle ne faisoit auparavant, nous pouvons aussi dire qu'elle avance à proportion davantage vers BE que vers BG qu'elle faisoit auparavant; si le premier nous fait comprendre que la détermination vers BG est changée, le second nous peut bien faire concevoir que la détermination vers BE est aussi changée, puisque le changement est aussi bien causé par l'augmentation què par la diminution.

7. Mais donnons encore que la détermination de haut en bas soit changée, et non pas celle de gauche à droite, et examinons la conclusion de l'auteur, duquel voici les mots :

« *Puisque la balle ne perd rien (1) du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne AC jusques à HB, elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté.* »

8. Voyez comme il retombe dans sa première faute, ne distinguant pas la détermination de la force du mouvement; et pour mieux vous le faire entendre, appliquons son raisonnement à un autre cas.

Supposons, en la même figure, que la balle soit poussée du point H au point B. Il est certain qu'elle continuera son mouvement dans la ligne BG et que sa détermination ne change point; mais aussi son mouvement est plus lent dans la ligne BG qu'il n'étoit auparavant, et

(1) Texte de la Dioptrique, page 17 : *Et puisqu'elle ne perd rien etc.*

néanmoins, si le raisonnement de l'auteur étoit vrai, nous pourrions dire :

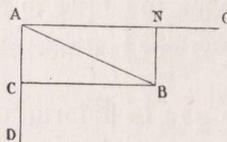
Puisque la balle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers HBG (car c'est toute la même), donc, en autant de temps qu'auparavant, elle fera autant de chemin.

Vous voyez que cette conclusion est absurde, et que, pour rendre l'argument bon, il faudroit que la balle ne perdît rien de sa détermination ni de sa force, et partant, voilà un paralogisme très manifeste.

9. Mais, pour détruire pleinement la proposition, il faut examiner deux sortes de mouvements composés qui se font sur deux lignes droites.

Considérons, par exemple (*fig. 57*), les deux lignes DA et AO, qui comprennent l'angle DAO de quelque grandeur que vous voudrez, et

Fig. 57.



imaginons un grave au point A, qui descende dans la ligne ACD en même temps que la ligne s'avance vers AN, à telle condition qu'elle fasse toujours un même angle avec AO, et que le point A de la même ligne ACD soit toujours dans la ligne AN. Si les deux mouvements, de la ligne ACD vers AO et du même grave dans la ligne ACD, sont uniformes comme nous les pouvons supposer, il est certain que ce mouvement composé conduira toujours le grave dans une ligne droite, comme AB, dans laquelle si vous prenez un point, comme B, duquel vous tiriez les lignes BN et BC parallèles aux lignes DA et AO, lorsque le grave sera au point B, en un temps égal, s'il n'y eût eu que le mouvement sur ACD, il eût été au point C, et s'il n'y eût eu que l'autre mouvement tout seul, il eût été au point N; et la proportion de la force qui le conduit sur AD à la force qui le conduit vers AO sera comme AC à AN, c'est-à-dire comme BN à BC.

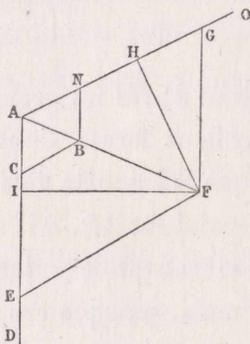
C'est de cette sorte de mouvements composés que se servent Archimède et les autres anciens en la composition de leurs hélices, desquelles la principale propriété est que les deux forces mouvantes ne s'empêchent point mutuellement, ains demeurent toujours les mêmes. Mais, pource que ce mouvement composé ne vient pas si bien dans l'usage, il le faut considérer d'une autre façon et en faire une spéculation particulière.

10. Supposons en la même figure un grave au point A, lequel en même temps est poussé par deux forces, dont l'une le pousse vers AO et l'autre vers AD, si bien que la ligne de direction du premier mouvement est AO, et celle du second est AD. S'il n'y avait que la première force toute seule, le grave se trouveroit toujours sur AO, et sur AD s'il n'y avoit que la seconde; mais, puisque ces deux forces s'empêchent et se résistent mutuellement, supposons (et il faut se souvenir que nous supposons aussi tous ces mouvements uniformes, car autrement le mouvement composé ne se feroit pas sur des lignes droites) que dans une minute d'heure, par exemple, la seconde force fait que le grave s'éloigne de sa direction AO selon la longueur NB, qu'il faut décrire parallèle à AD; car le grave qui est emporté sur AD par la seconde force, se trouvant empêché par la première, se portera toujours et s'avancera d'A vers D par des parallèles à AD. Supposons aussi que, dans la même minute d'heure, la première force fait que le grave s'éloigne de sa direction AD selon la longueur CB parallèle, par la précédente raison, à la ligne AO. Il est tout certain que dans une minute d'heure le grave se trouvera au point B, qui est le concours des deux lignes BN et BC. Le mouvement composé se fera donc sur la ligne AB, et nous pourrons dire que le grave parcourra la ligne AB dans une minute.

11. Supposons maintenant (*fig.* 58) que l'angle DAO soit changé et soit, par exemple, plus grand. En la figure suivante, les mêmes choses étant posées comme auparavant, je dis que, dans une minute d'heure, le grave s'éloignera de sa direction AO selon la ligne BN égale à celle que nous avons appelée de même en la précédente figure. Car, puisque

les forces sont les mêmes, la seconde diminuera également la détermination de la première, et fera, en temps égal, éloigner le grave de sa direction autant comme auparavant, pource que c'est toujours la même résistance. Nous conclurons la même chose de la ligne BC.

Fig. 58.



Le mouvement composé se fera donc ici sur la ligne AB, et la ligne AB sera parcourue comme devant en une minute d'heure; mais, pource que, dans les deux triangles ANB de la première et seconde figure, les côtés AN et NB de la première figure sont égaux à ceux de la seconde, et que les angles ANB qu'ils comprennent sont inégaux, il s'ensuit que les bases AB seront inégales (et par conséquent le mouvement composé sera moins vite en la seconde qu'en la première), et qu'il y aura telle proportion de la vitesse du mouvement composé en la première figure à la vitesse du mouvement composé en la seconde, que de la longueur de la ligne AB en la première à la longueur de la ligne AB en la seconde.

12. Je prends maintenant un point à discrétion dans la ligne AB, comme F, duquel je tire les lignes FE, FG parallèles à AO et à AD.

FE est à CB comme FA à AB, c'est-à-dire FG à BN,

comme la construction nous marque : donc

FE est à FG comme CB à BN.

Or, en la précédente figure, les lignes BN et BC sont égales, chacune à la sienne, aux lignes BN et BC de cette seconde figure, et nous pouvons, par un même raisonnement, prendre un point à discrétion dans la ligne AB de la première figure, pour en tirer une pareille conclusion à la précédente. Donc, quelque point que vous preniez dans la ligne AB, soit de la première, soit de la seconde figure, les parallèles seront entre elles comme CB à BN, c'est-à-dire toujours en même proportion.

Du point F tirons les perpendiculaires FH, FI sur les lignes AO et AD. Au parallélogramme GAEF, les angles AGF, AEF seront égaux comme étant opposés : donc les triangles GFH et EFI sont équiangles, et par conséquence,

comme EF est à FG, ainsi FI est à FH.

Or

FI est à FH comme le sinus de l'angle DAF est au sinus de l'angle OAF, et par conséquent, faisant, si vous voulez, une même construction en la première figure, vous conclurez, pour éviter prolixité, que le sinus de l'angle DAB est au sinus de l'angle OAB en la première figure, comme le sinus de l'angle DAF au sinus de l'angle OAF en la seconde figure (1).

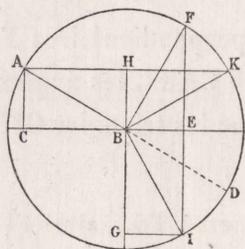
13. Cela ainsi supposé et démontré, considérons la figure de la page 20 de la Dioptrique (*fig.* 59), en laquelle l'auteur suppose que la balle, ayant été premièrement poussée d'A vers B, est poussée de rechef, étant au point B, par la raquette CBE, qui sans doute, au sens de l'auteur, pousse vers BG; de sorte que de ces deux mouvements, dont l'un pousse vers BD et l'autre vers BG, il s'en fait un troisième qui conduit la balle dans la ligne BI.

14. Imaginons ensuite une seconde figure pareille à celle-là, en

(1) On voit que désormais Fermat reconnaît pleinement, pour la composition des forces concourantes, le principe du parallélogramme qu'il avait mis en doute dans sa discussion avec Roberval sur la Géostatique (*voir* notamment Pièce XVI).

laquelle la force de la balle et celle de la raquette soient les mêmes, et que l'angle  $DBG$  soit seulement plus grand en cette seconde figure. Il est certain, par les démonstrations que nous venons de faire, qu'il y aura telle proportion du sinus de l'angle  $GBI$  au sinus de l'angle  $IBD$ , en la figure de l'auteur, que du sinus de l'angle  $GBI$  au sinus de l'angle  $IBD$ , en cette seconde figure que nous imaginons être décrite

Fig. 59.



et que nous omettons pour éviter la longueur, là où, si les propositions de l'auteur étoient vraies, il y auroit telle proportion du sinus de l'angle  $GBD$  au sinus de l'angle  $GBI$ , en la figure de l'auteur, que du sinus de l'angle  $GBD$  au sinus de l'angle  $GBI$ , en cette seconde figure que nous avons imaginée. Or, puisque cette proportion est différente de l'autre, il s'ensuit qu'elle ne peut pas subsister (1).

15. D'ailleurs la principale raison de la démonstration de l'auteur est fondée sur ce qu'il croit que le mouvement composé sur  $BI$  est toujours également vite, quoique l'angle  $GBD$ , compris sous les lignes de direction des deux forces mouvantes, vienne à changer : ce qui est faux, comme nous avons déjà pleinement démontré.

16. Ce n'est pas que je veuille assurer qu'en l'application qu'il fait

(1) Ainsi Fermat conclut que, si l'on doit, avec Descartes, considérer le mouvement suivant le rayon réfracté comme résultant du mouvement suivant le rayon incident et d'une action suivant la normale, la proportionnalité doit exister non pas entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction,  $\sin i$  et  $\sin r$ , mais entre  $\sin(i-r)$  et  $\sin r$ . A cet effet, il suppose implicitement l'action normale indépendante de l'incidence. L'hypothèse de Descartes est au contraire que la composante parallèle à la surface d'incidence garde la même valeur avant et après la réfraction. Il est clair qu'*a priori* on ne peut décider entre ces deux suppositions.

de la figure de la page 20 à la réfraction, il faille garder ma proportion et non pas la sienne; car je ne suis pas assuré si ce mouvement composé doit servir de règle à la réfraction, sur laquelle je vous dirai une autre fois plus au long mes sentiments.

17. J'attendrai la réponse (1) à cette Lettre, puisque vous me la faites espérer, et serai toujours, mon Révérend Père, votre très humble serviteur.

L'excuse que vous avez vue au commencement de ma lettre me servira encore sur ce que je ne vous ai point écrit de ma main.

(1) Descartes, n'ayant reçu la Lettre XXIV qu'au moment où il avait à défendre contre Roberval sa propre critique de la méthode des tangentes de Fermat (*voir* ci-après Lettre XXV, 1<sup>re</sup> note), ajouta le même jour (22 février 1638) à son courrier pour Mersenne une Lettre spéciale sur la Dioptrique, adressée à Mydorge (éd. Clerselier, III, 42). Mais cette réplique, qu'on trouvera dans le *Supplément* à la présente édition, ne fut communiquée à Fermat que vers le mois de juin 1638, alors que s'arrangeait le différend sur la méthode des tangentes. Descartes ne se montrant pas disposé à satisfaire davantage Fermat sur la question de la réfraction, la discussion en fut également suspendue pour n'être reprise que vingt ans après, entre Fermat et Clerselier. La présente Lettre XXIV fit alors l'objet d'une réfutation spéciale (*ci-après* Pièce XCIV) composée par Rohault.

