XXIV.

DEFORMAZIONE DI UNA SFERA ELASTICA SOGGETTA A DATE TENSIONI, NEL CASO EREDITARIO

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX₁, 1910₁; pp. 239–243

§ 1. – Risoluzione d'una equazione integrale di 2° grado.

1. Poniamo, facendo uso di una notazione adottata in precedenti lavori,

$$M_1 f = m_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_1(x, y)\, dx$$

$$M_2 f = m_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_2(x, y)\, dx$$

e supponiamo che le due funzioni finite e continue μ_1 e μ_2 siano permutabili (1), cioè si abbia,

$$\int_x^y \mu_1(x, \xi)\, \mu_2(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \mu_2(x, \xi)\, \mu_1(\xi, y)\, d\xi .$$

Poniamo poi

$$X_1 f = x_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_1(x, y)\, dx$$

$$X_2 f = x_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_2(x, y)\, dx ,$$

e cerchiamo di determinare i parametri x_1, x_2 e le funzioni ξ_1 e ξ_2 in modo tale che

$$(X_1 + X_2) f = M_1 f ,$$
$$X_1 X_2 f = M_2 f .$$

2. Dovremo avere

$$x_1 + x_2 = m_1 \quad , \quad x_1 x_2 = m_2$$
$$\xi_1(x, y) + \xi_2(x, y) = \mu_1(x, y)$$
$$x_1 \xi_2(x, y) + x_2 \xi_1(x, y) + \xi_1 \xi_2(x, y) = \mu_2(x, y) ;$$

(1) Vedi la mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 20 febbraio 1910. [In questo vol.: XXIII, pp. 311–322].

quindi x_1 e x_2 saranno le radici della equazione di secondo grado

$$x^2 - m_1 x + m_2 = 0,$$

mentre ξ_1 e ξ_2 soddisfaranno alle equazioni integrali di 2° grado

$$\int_x^y \xi_i(x,\zeta)\,\xi_i(\zeta,y)\,d\zeta - \int_x^y \xi_i(x,\zeta)\,\mu_1(\zeta,y)\,d\zeta$$

$$+ (x_i - x_s)\,\xi_i(x,y) = -\mu_2(x,y) + x_i\,\mu_1(x,y)$$

ove i ed s rappresentano i numeri 1 e 2, oppure 2 e 1 rispettivamente.

Supponiamo le radici x_1 e x_2 diverse fra loro: allora applicando la regola data nella Nota precedentemente citata, avremo che $\xi_1(x,y)$, $\xi_2(x,y)$ si otterranno prendendo successivamente il segno + e il segno — nella formula

$$\frac{1}{2}\mu_1(x,y) = \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2} \sum_1^\infty{}_n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{2m_1\mu_1 + \mu_1^2 - 4\mu_2}{m_1^2 - 4m_2}\right)^n.$$

Le potenze e i prodotti delle μ_1 e μ_2 nella serie suddetta debbono considerarsi come operazioni di composizione. In virtù della teoria generale, avremo che *la serie stessa sarà sempre uniformemente convergente.*

§ 2. – Risoluzione di una equazione integro–differenziale ausiliaria.

3. Abbiasi l'equazione integro–differenziale

$$(1)\qquad z^2\frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} + z\mathrm{M}_1\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + \mathrm{M}_2 f(y,z) = \varphi(y,z)$$

in cui $\varphi(y,z)$ è una funzione finita e continua.

Essa potrà ancora scriversi

$$z\frac{\partial}{\partial z}\left[z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + \mathrm{X}_1 f(y,z)\right] + \mathrm{X}_2\left[z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + \mathrm{X}_1 f(y,z)\right] = \varphi(y,z);$$

e perciò, applicando i risultati ottenuti in una Nota precedente [2], ne otterremo la soluzione finita e continua, calcolando dapprima:

$$(2)\qquad \Psi(x,z) = \frac{1}{z^{\alpha_1}}\int_0^z \zeta^{x_1-1}\left[\varphi(x,\zeta) + \int_0^x \varphi(\xi,\zeta)\,\mathrm{V}_1\left(\log\frac{\zeta}{z}\,|\,\xi,x\right)d\xi\right]d\zeta$$

$$-\frac{1}{z^{\alpha_2}}\int_0^z \zeta^{x_2-1}\left[\varphi(x,\zeta) + \int_0^x \varphi(\xi,\zeta)\,\mathrm{V}_2\left(\log\frac{\zeta}{z}\,|\,\xi,x\right)d\xi\right]d\zeta,$$

quindi costruendo:

$$(3)\qquad f(y,z) = (\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1)^{-1}\,\Psi(y,z),$$

(2) « Rend. Acc. del Lincei », ser. 5ª, vol XIX₁ 1910₁; pp. 107–114. [In questo vol.: XXII, pp. 304–310].

in cui si intende che

$$V_1(z \mid x, y) = \sum_1^\infty {}_n \frac{z^n}{n!} \xi_1^n(x, y)$$

$$V_2(z \mid x, y) = \sum_1^\infty {}_n \frac{z^n}{n!} \xi_2^n(x, y),$$

mentre le potenze di ξ_1 e ξ_2 denotano risultati di operazioni di composizione.

§ 3. — Sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

4. Facciamo uso delle notazioni introdotte nella Nota: *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* (3) e poniamo (4)

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} U = xt_{11} + yt_{12} + zt_{13} \\ V = xt_{21} + yt_{22} + zt_{23} \\ W = xt_{31} + yt_{32} + zt_{33} \end{cases}$$

$$\Theta = 2(A_1 - A_2)\,\theta\,.$$

Nella ipotesi che non esistano forze di massa, avremo

$$\Delta^2 t_{11} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \qquad \Delta^2 t_{23} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z}$$

$$\Delta^2 t_{22} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \qquad \Delta^2 t_{31} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x}$$

$$\Delta^2 t_{33} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \qquad \Delta^2 t_{12} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y}$$

quindi

$$\Delta^2 U = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\Theta}{\partial x} + y\frac{\partial\Theta}{\partial y} + z\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 V = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial\Theta}{\partial x} + y\frac{\partial\Theta}{\partial y} + z\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 W = \frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial\Theta}{\partial x} + y\frac{\partial\Theta}{\partial y} + z\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

e per conseguenza

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} U = U_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ V = V_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ W = W_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

(3) « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₂, 1909₂; pp. 577–586. [In questo vol.: XXI, pp. 294–303].

(4) Cfr. Almansi, «Memorie della R. Acc. di Torino», 1897.

ove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante e U_1, V_1, W_1, f sono funzioni armoniche, mentre

$$(6)\qquad r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right) = \frac{1}{4}\left(r\frac{\partial \Theta}{\partial r} - \Theta\right).$$

5. Se l'origine è nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U_1, V_1, W_1 saranno determinate quando si conoscano le tensioni che sollecitano la sfera al contorno. Tenendo poi conto che dalle (5) e (4) e dalle relazioni che legano le tensioni alle deformazioni, si ha

$$(7)\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$= t_{11} + t_{22} + t_{33} = (3A_2 - 4A_1)\,\theta = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)^{-1}(3A_2 - 4A_1)\,\Theta,$$

colla eliminazione di Θ fra questa ultima relazione e la (6) risulterà che f dovrà soddisfare l'equazione integro–differenziale

$$(8)\qquad r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - A_3\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta_1 - r\frac{\partial \Theta_1}{\partial r}\right)$$

in cui

$$\Theta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$A_3 = (A_1 - A_2)^{-1}(3A_2 - 4A_1).$$

L'equazione integro–differenziale (8) rientra nel caso contemplato nel paragrafo precedente, quindi si potrà calcolare f, ottenuta la quale si avranno U, V, W.

Ciò fatto si troverà θ dalla relazione (vedi form. 7))

$$\theta = (3A_2 - 4A_1)^{-1}\left(\Theta_1 + 2r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

e poiché le (4) possono scriversi

$$\begin{aligned}
x(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}) &= U\\
y(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}) &= V\\
z(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}) &= W
\end{aligned}$$

potremo ricavare immediatamente i trinomi

$$2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}\quad,\quad x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}\quad,\quad x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}$$

dai quali, col metodo dato dal prof. ALMANSI [5], si calcoleranno gli spostamenti allorché si conoscerà lo spostamento e la rotazione della particella che giace al centro della sfera.

6. Nei problemi relativi alla Terra, allorché si vuol tener conto della sua elasticità, non vi ha dubbio che i fenomeni ereditari debbono avere una influenza non trascurabile. L'analisi precedente offre il mezzo di calcolare

(5) Vedi Memoria citata precedentemente.

in modo completo gli effetti della ereditarietà, qualunque sia la scelta che si faccia della legge di ereditarietà, purché si supponga la *ereditarietà lineare*. Si noti che le operazioni a cui si deve ricorrere sono sviluppi in serie i cui termini sono ottenuti con operazioni di composizione e quindi sono in generale rapidamente convergenti, giacché, nella operazione di composizione, ogni potenza ed ogni composizione di più funzioni conduce ad una quantità il cui ordine di grandezza è affetto da un divisore eguale al fattoriale relativo all'esponente o al numero delle funzioni che si compongono.