

XXV.

OSSERVAZIONI SULLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI ED INTEGRALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XIX, 1910₁, pp. 361-362.

1. Mi permetto in questa breve Nota di applicare (come esempio) i metodi dati nel mio precedente lavoro: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* ⁽¹⁾ alla equazione integro-differenziale

$$(A) \quad 0 = \frac{\partial^2 u(x, y, z | \theta, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z | \theta, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z | \theta, t)}{\partial z^2} \\ + \int_i^\theta \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, z | \theta, \tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 u(x, y, z | \theta, \tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z | \theta, \tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau$$

a cui ho già consacrato una Memoria precedente ^(*).

2. Cominciamo dal considerare l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (1 + z_1) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} (1 + z_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} (1 + z_3) = 0.$$

Pongasi

$$1 + z_1 = \frac{1}{1 - \zeta_1}, \quad 1 + z_2 = \frac{1}{1 - \zeta_2}, \quad 1 + z_3 = \frac{1}{1 - \zeta_3}$$

cioè, supposto $|\zeta_i| < 1$,

$$\zeta_i = z_i - z_i^2 + z_i^3 - z_i^4 + \dots$$

La (A) possiederà l'integrale particolare

$$U = \frac{\zeta}{\sqrt{x^2(1 - \zeta_1) + y^2(1 - \zeta_2) + z^2(1 - \zeta_3)}}$$

in cui ζ è un parametro qualsiasi indipendente da x, y, z .

(1) « Rend. R. Acc. dei Lincei », seduta del 20 febbraio 1910 [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

(*) In questo vol.: XVII, pp. 269-275. [N. d. R.].

Per valori di $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ con modulo sufficientemente piccolo avremo lo sviluppo convergente

$$U = \frac{\zeta}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1 \right)}{n!} \left[\left(\frac{x}{r} \right)^2 \zeta_1 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 \zeta_2 + \left(\frac{z}{r} \right)^2 \zeta_3 \right]^n \right\}$$

ove

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. Supponiamo ora che le funzioni $f(t, \tau), \varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)$ siano fra loro permutabili e che $\chi(t, \tau)$ sia pure permutabile colle funzioni stesse; allora le regole date nel lavoro citato precedentemente ci permettono di ottenere la soluzione fondamentale della (A) nel modo seguente.

Poniamo (denotando col simbolo di potenze le operazioni di composizione)

$$F(\tau, t) = f(\tau, t) - f^2(\tau, t) + f^3(\tau, t) - \dots$$

$$\Phi(\tau, t) = \varphi(\tau, t) - \varphi^2(\tau, t) + \varphi^3(\tau, t) - \dots$$

$$\Psi(\tau, t) = \psi(\tau, t) - \psi^2(\tau, t) + \psi^3(\tau, t) - \dots$$

$$\Theta(x, y, z | \tau, t) = \left(\frac{x}{r} \right)^2 F(\tau, t) + \left(\frac{y}{r} \right)^2 \Phi(\tau, t) + \left(\frac{z}{r} \right)^2 \Psi(\tau, t).$$

La soluzione cercata della (A) sarà data da

$$(I) \quad u(x, y, z | \theta, t) = \frac{1}{r} \left\{ \chi(\theta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1 \right)}{n!} \int_{\theta}^t \chi(\theta, \tau) \Theta^n(x, y, z | \tau, t) d\tau \right\}.$$

La convergenza delle serie considerate sussiste qualunque sia la grandezza dei valori assoluti delle funzioni f, φ, ψ, χ , purché essi siano finiti.

Si vede facilmente che la espressione precedente soddisfarà la (A) anche se $\chi = 1$.

4. Nella Nota *Sulle equazioni integro-differenziali* ⁽²⁾ abbiamo data la soluzione fondamentale della equazione (A) senza fare l'ipotesi della permutabilità delle funzioni f, φ, ψ ; essa si riduce facilmente alla (I) quando queste funzioni siano permutabili.

A questo proposito ricordiamo quanto fu osservato nel § 7 della Nota citata al principio di questa, cioè che i teoremi IV e V della Nota stessa e le loro conseguenze possono estendersi anche al caso di funzioni non permutabili e quindi la risoluzione generale delle equazioni integrali ed integro-

(2) « Rend. R. Acc. dei Lincei », seduta del 21 febbraio 1909 [in questo vol.: XX, pp. 288-293].

differenziali può estendersi anche al caso in cui si abbia da che fare con funzioni non permutabili. Così, per esempio, se avremo l'equazione integrale ⁽³⁾

$$\begin{aligned} a_m f^m + z_m \int_x^y \Phi_m(x, \xi) f^m(\xi, y) d\xi + a_{m-1} f^{m-1} \\ + z_{m-1} \int_x^y \Phi_{m-1}(x, \xi) f^{m-1}(\xi, y) d\xi + \dots \\ + a_1 f + z_1 \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = z_0 \Phi_0(x, y), \end{aligned}$$

in cui le potenze di f denotano operazioni di composizione, se sviluppiamo f in serie di potenze di z_0, z_1, \dots, z_m , lo sviluppo sarà valido qualunque sia il modulo di questi parametri ed il valore assoluto delle costanti a_1, \dots, a_m e delle funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m$ (anche se queste funzioni non saranno permutabili fra loro) purché i valori stessi siano finiti e $a_i \geq 0$. Quando $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m$ saranno permutabili, la soluzione assumerà la forma semplice che discende dallo sviluppo in serie della radice d'una equazione algebrica.

5. L'operazione di composizione è estendibile al caso di funzioni di $2n$ variabili. Così potrà considerarsi l'integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1, \dots, \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n F_1(x_1, \dots, x_n | \xi_1, \dots, \xi_n) F_2(\xi_1, \dots, \xi_n | y_1, \dots, y_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Supponiamo che

$$\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \dots, \alpha_h = x_h, \alpha_{h+1} = 0, \alpha_{h+2} = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

$$\beta_1 = y_1, \beta_2 = y_2, \dots, \beta_h = y_h, \beta_{h+1} = 1, \beta_{h+2} = 1, \dots, \beta_n = 1.$$

Se il detto integrale sarà eguale a

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1, \dots, \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n F_2(x_1, \dots, x_n | \xi_1, \dots, \xi_n) F_1(\xi_1, \dots, \xi_n | y_1, \dots, y_n) d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

F_1 e F_2 saranno permutabili.

Se $h \geq 1$ si potranno estendere a questo caso le proposizioni date per la composizione di prima specie.

Sotto questo punto di vista la teoria svolta per l'equazione integro-differenziale (A) può estendersi al caso in cui in essa figuri un integrale multiplo anziché semplice.

(3) Cfr. Nota citata, § 4, p. 173 [p. 324 di questo volume].