XXXIV.

SOPRA EQUAZIONI DI TIPO INTEGRALE

« Proceedings of the fifth intern. Congress of Math.
(Cambridge, 22–28, VIII, 1912) » Cambridge, 1913, pp. 403–406.

Lo studio delle *funzioni di linee*, o, come è anche chiamato, dei *funzionali*, che ho cominciato in maniera sistematica dal 1887, mi ha condotto a quello delle equazioni integrali lineari. In virtù dei principii dai quali sono partito, sono stato condotto, per primo, a considerare queste equazioni come il caso limite di equazioni algebriche allorché il loro numero e quello delle incognite crescono indefinitamente. Tale passaggio al limite è analogo a quello fondamentale del calcolo integrale. Ho poi considerato delle equazioni non lineari in una nota pubblicata nel 1906 nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* e dei casi ancora più generali nelle mie lezioni fatte lo scorso inverno alla Sorbona.

Oltre alle equazioni integrali ho studiato le equazioni integro–differenziali dandone la teoria in vari casi, nei quali ho sempre fatto uso del principio da cui ero partito precedentemente. Le ho cioè riguardate come casi limiti di un numero infinitamente crescente di equazioni con un numero pure infinitamente crescente di incognite. Ma io qui desidero di ricordare alcuni teoremi che ho dati recentemente, i quali fanno rientrare tutte le precedenti trattazioni di equazioni integrali e integro–differenziali come casi particolari.

Ho perciò introdotto una speciale operazione che ho chiamato *composizione* che può considerarsi di due tipi diversi, cioè a limiti variabili e a limiti costanti.

Date due funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ finite e continue, la composizione a limiti variabili o *composizione di prima specie* consiste nell'operazione

$$\int_x^y F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi, \tag{1}$$

mentre quella a limiti costanti o *composizione di seconda specie* consiste nella operazione

$$\int_p^q F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi, \tag{2}$$

ove p e q sono quantità costanti.

Ora, se scambiando le due funzioni F_1 e F_2 nella prima formula (1) il risultato non cambia, ho detto che F_1 e F_2 sono *permutabili di prima specie*, mentre se il medesimo scambio non altera il risultato della seconda operazione (2) ho chiamato F_1 e F_2 permutabili di seconda specie. Ciò premesso ho dimostrato il teorema che *combinando per somma, per sottrazione o, in generale, combinando linearmente con coefficienti costanti delle funzioni permutabili e combinando mediante composizione delle funzioni permutabili si trovano sempre funzioni permutabili fra loro e colle funzioni primitive.*

Ma le due proprietà più importanti sono le seguenti:

1° Se

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + \cdots + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{12} xy + \cdots + a_{111} x^3 + a_{123} xyz + \cdots \tag{3}$$

è un elemento di una funzione analitica di un numero qualsiasi di variabili e si sostituiscono ad $x, y, z, \cdots$ *le espressioni* $xF_1, yF_2, zF_3, \cdots$ *ove* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *sono funzioni permutabili di prima specie e si interpretano i prodotti e le potenze delle* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ (*invece che come operazioni algebriche*) *come operazioni di composizione di prima specie, la serie che si trova è una funzione intera di* $x, y, z, \ldots$

2° *Se si sostituiscono nella* (3) *a* $x, y, z \cdots$ *le espressioni* $xF_1, yF_2, zF_3, \cdots$ *essendo* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *funzioni permutabili di seconda specie e si interpretano i prodotti e le potenze delle* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *come operazioni di composizione di seconda specie, e, se la serie* (3) *è il rapporto di due funzioni intere, anche la serie che si trova dopo la sostituzione è il rapporto di due funzioni intere di* $x, y, z, \cdots$.

L'origine di questi teoremi va ricercata sempre nello stesso principio che corrisponde al solito passaggio al limite di cui abbiamo parlato. Infatti le operazioni di composizione (1), (2) possono riguardarsi come *operazioni limiti di somme*. Si considerino infatti le quantità

$$m_{ih}, n_{ih} \qquad (i, h = 1, 2, 3, \cdots, g).$$

Si può dapprima considerare la somma

$$\sum_{i+1}^{h-1}{}_s\, m_{is}\, n_{sh} \tag{4}$$

e la permutabilità di prima specie sarà data da

$$\sum_{i+1}^{s-1}{}_s\, m_{is}\, n_{sh} = \sum_{i+1}^{s-1} n_{is}\, m_{sh}. \tag{4'}$$

Se passiamo al limite, coll'analogo procedimento del calcolo integrale, l'operazione (4), dà luogo alla composizione di prima specie e la condizione (4') alla permutabilità di prima specie.

In modo simile la composizione di seconda specie può considerarsi come il limite della operazione

$$\sum_{1}^{g}{}_s\, m_{is}\, n_{sh},$$

e la permutabilità di seconda specie come la condizione limite di

$$\sum_{1}^{g}{}_s\, m_{is}\, n_{sh} = \sum_{1}^{g} n_{is}\, m_{sh}\,.$$

Ora si può cominciare dallo stabilire i due teoremi precedenti per il caso finito, il che non offre difficoltà, e procedere quindi alla loro estensione al caso infinito.

Una volta stabiliti questi teoremi supponiamo che la serie (3) sia soluzione di un problema algebrico o differenziale. Se noi sostituiamo nelle equazioni algebriche o differenziali, ridotte a forma intera, alle lettere $x, y, z, \cdots$ le $xF_1, yF_2, zF_3, \cdots$ e interpretiamo i prodotti e le potenze delle $F_1, F_2, F_3, \cdots$ come composizioni otteniamo equazioni integrali o equazioni integro–differenziali di cui le soluzioni sono immediatamente date per mezzo di funzioni intere o di rapporti di funzioni intere.

Possono perciò enunciarsi i due principii generali:

Ad ogni problema algebrico o differenziale la cui soluzione conduce a funzioni esprimibili mediante funzioni analitiche corrisponde un problema correlativo integrale o integro–differenziale (*a limiti variabili*, *o di prima specie*) *la cui soluzione è data da funzioni intere.*

Ad ogni problema algebrico o differenziale la cui soluzione conduce a funzioni esprimibili come rapporti di funzioni intere di un certo numero di variabili corrisponde un problema integrale o integro–differenziale di seconda specie (*a limiti costanti*) *la cui soluzione è pure esprimibile mediante rapporti di funzioni intere delle stesse variabili.*

È facile riconoscere che il problema della risoluzione delle equazioni integrali lineari non è che un caso particolarissimo fra i problemi generali che sono abbracciati dai due principii precedenti.

La teoria delle funzioni permutabili dà luogo a varie questioni che io stesso ho studiato. Essa conduce poi ad un'algebra che il prof. G. C. EVANS ha approfondito in modo molto elegante e che lo ha condotto a resultati molto interessanti. I professori LAURICELLA, VESSIOT, SINIGAGLIA, GIORGI, LALESCO ed altri si sono pure occupati di questioni relative ad essa.

Mi propongo ora di estendere ulteriormente queste considerazioni. Consideriamo un gruppo continuo di funzioni permutabili, per esempio prendiamo

$$f(u \mid x, y)$$

tale che, u_1 e u_2 essendo due valori qualunque di u, si abbia

$$\int_x^y f(u_1 \mid x, \xi) f(u_2 \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y f(u_2 \mid x, \xi) f(u_1 \mid \xi, y)\, d\xi = f(u_1, u_2 \mid x, y)\,;$$

$f(u_1, u_2 \mid x, y)$ sarà permutabile con $f(u \mid x, y)$, cioè

$$\int_x^y f(u_3 \mid x, \xi) f(u_1, u_2 \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y f(u_1, u_2 \mid x, \xi) f(u_3 \mid \xi, y)\, d\xi = f(u_1, u_2, u_3 \mid x, y),$$

e così di seguito.

Ciò premesso, estendiamo, col solito procedimento del passaggio dal finito all'infinito, un teorema dato precedentemente. A tal fine consideriamo la serie analoga a quella di TAYLOR che ho dato fino dai miei primi lavori, cioè

$$A + \int_a^b F(u_1) f(u_1)\, du_1 + \int_a^b\!\!\int_a^b F'(u_1, u_2) f(u_1) f(u_2)\, du_1\, du_2$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b F''(u_1, u_2, u_3) f(u_1) f(u_2) f(u_3)\, du_1\, du_2\, du_3 + \cdots,$$

ove le funzioni F sono simmetriche. Supponiamo che essa sia convergente allorché

$$|f(u)| < M.$$

Sostituiamo a questa serie l'altra

$$A + \int_a^b F(u_1) f(u_1 | x, y)\, du_1 + \int_a^b\!\!\int_a^b F'(u_1, u_2) f(u_1, u_2 | x, y)\, du_1\, du_2$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b F''(u_1, u_2, u_3) f(u_1, u_2, u_3 | x, y)\, du_1\, du_2\, du_3 + \cdots$$

Questa serie sarà convergente comunque grande sia il modulo di $f(u | x, y)$ purché sia finito.

È evidente che questo teorema è un'estensione del teorema 1°. È facile vedere delle applicazioni di questo teorema. Consideriamo l'equazione del tipo trascendente

$$(\mathrm{I}a) \qquad \varphi(u | x, y) = f(u | x, y) + \int_a^b F'(u | u_1) f(u_1 | x, y)\, du_1$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b F''(u | u_1, u_2) f(u_1, u_2 | x, y)\, du_1\, du_2$$

$$+ \int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b F'''(u | u_1, u_2, u_3) f(u_1, u_2, u_3 | x, y)\, du_1\, du_2\, du_3 + \cdots$$

ove $f(u | x, y)$ è la incognita.

Supponiamo che l'insieme delle funzioni date $\varphi(u | x, y)$ formi un gruppo continuo di funzioni permutabili, cioè

$$\int_x^y \varphi(u_1 | x, \xi)\, \varphi(u_2 | \xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(u_2 | x, \xi)\, \varphi(u_1 | \xi, y)\, d\xi = \varphi(u_1, u_2 | x, y).$$

Consideriamo d'altra parte l'equazione

$$\varphi(u) = f(u) + \int_a^b F'(u | u_1) f(u_1)\, du_1 + \int_a^b\!\!\int_a^b F''(u | u_1, u_2) f(u_1) f(u_2)\, du_1\, du_2 + \cdots$$

Se il determinante dell'equazione integrale

$$f(u)+\int_a^b \mathrm{F}'(u\,|\,u_1)\,f(u_1)\,du=\psi(u)$$

è diverso da zero, ho dimostrato che si può dare una soluzione dell'equazione precedente sotto la forma

$$f(u)=\varphi(u)+\int_a^b \Phi'(u\,|\,u_1)\,\varphi(u_1)\,du_1+\int_a^b\!\!\int_a^b \Phi''(u\,|\,u_1\,,u_2)\,\varphi(u_1)\,\varphi(u_2)\,du_1\,du_2+\cdots,$$

valido finché il modulo di $\varphi(u)$ è inferiore ad un certo limite. Ne viene che la soluzione della (I a) sarà

$$\text{(I } b\text{)}\qquad f(u\,|\,x\,,y)=\varphi(u\,|\,x\,,y)+\int_a^b \Phi'(u\,|\,u_1)\,\varphi(u_1\,|\,x\,,y)\,du_1$$

$$+\int_a^b\!\!\int_a^b \Phi''(u\,|\,u_1\,,u_2)\,\varphi(u_1\,,u_2\,|\,x\,,y)\,du_1\,du_2$$

$$+\int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b \Phi'''(u\,|\,u_1\,,u_2\,u_3)\,\varphi(u_1\,u_2 u_3\,|\,x\,,y)\,du_1\,du_2\,du_3+\cdots$$

e non vi sarà più bisogno di alcuna limitazione circa la grandezza del modulo di $\varphi(u\,|x\,,y)$ purché finito.

È facile riconoscere quali sono le estensioni del teorema 2° e degli altri al caso che abbiamo adesso indicato, e le conseguenze ed applicazioni che possono trarsene.