XXIII.

QUESTIONI GENERALI SULLE EQUAZIONI INTEGRALI ED INTEGRO-DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 169–180.

§ 1. – Funzioni permutabili e loro composizione.

1. Due funzioni finite e continue $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ tali che

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y F_2(x, \xi)\, F_1(\xi, y)\, d\xi ,$$

si diranno *permutabili* e l'operazione precedente si dirà la loro *composizione*. $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale ottenuto *risultante*.

Denoteremo la funzione *risultante* con

$$F_1 F_2 (x, y) \quad \text{o} \quad F_2 F_1 (x, y),$$

e più semplicemente con $F_1 F_2$ o $F_2 F_1$ quando non vi sia dubbio che possa nascere confusione col prodotto delle due funzioni.

2. Teorema I. – *Dato un sistema di funzioni permutabili fra loro, tutte le funzioni che possono ottenersene per composizione sono permutabili fra loro e colle funzioni date e l'operazione di composizione gode delle stesse due proprietà commutativa ed associativa della moltiplicazione.*

Date le funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $\cdots$, $F_n(x, y)$ permutabili, si intenderà con $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$ ciò che si trova componendo F_1 con F_2, quindi componendo la risultante con F_3, poscia componendo la nuova risultante ottenuta con F_4 e così via di seguito. Per i teoremi enunciati l'ordine con cui si prendono $F_1, F_2, \cdots, F_n$ (*componenti*) non altera il valore della loro *risultante* $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$. Questa, quando non possa nascere confusione, si denoterà ancora più semplicemente con $F_1 F_2 \cdots F_n$.

Se le componenti $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sono eguali fra loro $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$ si denoterà con $F_1^n(x, y)$ o più semplicemente con F_1^n. Il nuovo simbolo soddisfarà alle stesse leggi delle potenze.

3. Teorema II. – *Tutte le funzioni ottenute per somma e per sottrazione da funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni primitive e per comporre dei polinomii i cui termini siano funzioni permutabili basterà applicare la regola dei prodotti dei polinomii.*

www.rcin.org.pl

§ 2. – Funzioni permutabili con una costante. Estensione della composizione.

4. Teorema III. – *Tutte le funzioni permutabili con una costante sono della forma* $F(y-x)$.

Che le funzioni della detta forma siano permutabili con una costante è evidente. Che non ve ne siano altre si riconosce osservando che, se [vedi form. (A)]

$$\int_x^y F(x, \xi)\, d\xi = \int_x^y F(\xi, y)\, d\xi = \Phi(x, y),$$

sarà

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F(x, y)$$

e quindi Φ, ed in conseguenza F, saranno funzioni di $y-x$.

Noi escluderemo per adesso dalle nostre considerazioni tali funzioni.

5. Se a è un parametro indipendente da x e y intenderemo con $aF_i(x, y)$ il prodotto di a per la funzione $F_i(x, y)$ e avremo che $aF_i(x, y)$, $bF_s(x, y)$ saranno permutabili. Componendole otterremo $abF_i F_s(x, y)$, quindi potremo dire che *combinando linearmente delle funzioni permutabili, moltiplicate per coefficienti costanti, otterremo delle funzioni permutabili, la cui composizione si otterrà colla regola del prodotto dei polinomii.*

6. Se a e b sono costanti, le funzioni

$$\theta(x, y) = a + F_i(x, y) \quad \text{e} \quad \psi(x, y) = b + F_s(x, y)$$

non apparterranno all'insieme delle funzioni permutabili colle funzioni date. Però noi estenderemo l'operazione della composizione scrivendo

$$\theta F_r(x, y) = F_r \theta(x, y) = aF_r(x, y) + F_r F_i(x, y)$$

$$\psi\theta(x, y) = \theta\psi(x, y) = ab + aF_s(x, y) + bF_i(x, y) + F_i F_s(x, y)$$

e, se non potrà nascere confusione, sostituiremo anche a $F_r \theta(x, y)$, $\theta\psi(x, y)$ rispettivamente $F_r \theta$, $\theta\psi$. Con questa estensione le proprietà precedentemente enunciate della composizione restano sempre soddisfatte.

§ 3. – Serie di funzioni permutabili.

7. Teorema IV. – *Abbiasi la serie di potenze*

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n} \tag{1}$$

delle variabili complesse $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *la quale sia convergente per* $|z_1| < R_1$, $|z_2| < R_2, \cdots, |z_n| < R_n$. *Se noi sostituiamo a* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *rispettivamente le*

www.rcin.org.pl

funzioni permutabili $F_1(x, y), F_2(x, y), \cdots, F_n(x, y)$, *e intendiamo che i simboli di prodotti e di potenze applicate a queste funzioni rappresentino le operazioni di composizione, otterremo una serie convergente. Se* $a_{00\ldots 0}$ *sarà nulla, la somma delle serie sarà una funzione di* x, y *permutabile colle funzioni date.*

8. È da notare come questo teorema ci offra un mezzo di passare dalla serie (1), convergente in generale quando i moduli di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sono inferiori a certi limiti, ad un'altra convergente comunque grandi siano i valori assoluti di $F_1, F_2, \cdots, F_n$, purchè finiti; esso poi ci permette di estendere le espressioni di funzioni permutabili e ci dà nuovi modi per eseguire le operazioni di composizione.

Abbiasi infatti una espressione analitica qualsiasi

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_n) \tag{2}$$

la quale sia sviluppabile in una serie di potenze e positive di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ convergente in un certo intorno di $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$; noi intenderemo con

$$\mathbf{F}(F_1, F_2, \cdots, F_n) \tag{3}$$

ciò che si trova sostituendo nella serie alle $z_1, z_2, \cdots, z_n$ le $F_1, F_2, \cdots, F_n$ e supponendo che i simboli di prodotti e di potenze rappresentino operazioni di composizione.

Restano così definite, per esempio, le espressioni

$$\frac{F_1}{a - F_1} = \frac{F_1}{a} + \frac{F_1^2}{a^2} + \frac{F_1^3}{a^3} + \cdots$$

$$\sqrt{a + F_1} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{F_1}{a} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2}\frac{F_1^2}{a^2} + \cdots\right)$$

in cui le potenze di F_1 rappresentano operazioni di composizione applicate ad F_1 e si suppone fissato il segno di $\sqrt{a}$.

Così pure resta definito un prodotto infinito

$$F_1\left(1 - \frac{F_1^2}{1}\right)\left(1 - \frac{F_1^2}{4}\right)\left(1 - \frac{F_1^2}{9}\right)\cdots$$

Se avremo poi due espressioni analitiche

$$\mathbf{F}(F_1, F_2, \cdots, F_n) \quad , \quad \mathbf{\Phi}(F_1, F_2, \cdots, F_n)$$

della natura sopra considerata la loro composizione si farà colle regole con cui si fa il prodotto ordinario delle due espressioni analitiche stesse. Così la risultante di $\sqrt{a + F_1}$ con $\sqrt{b + F_2}$ potrà scriversi $\sqrt{(a + F_1)(b + F_2)}$, quando si fissino convenientemente i segni. Inoltre tutte quelle trasformazioni che non alterano una espressione analitica potranno essere eseguite

www.rcin.org.pl

sopra una espressione (3). Così componendo $F_2/(a+F_1)$ con $a+F_1$ otterremo

$$\frac{F_2}{a+F_1}(a+F_1)=F_2 .$$

§ 4. – Risoluzione generale di equazioni integrali.

9 Abbiasi una funzione analitica del tipo (1)

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_n). \tag{1'}$$

Scriviamo l'equazione

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_n)=0. \tag{4}$$

Consideriamo z_n come funzione implicita di $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ e supponiamo che un ramo di z_n si annulli per $z_1=z_2=\cdots=z_{n-1}=0$ e che questo punto non sia un punto di diramazione del ramo stesso. Allora potremo sviluppare questo ramo nell'intorno di $z_1=z_2=\cdots=z_{n-1}=0$ in una serie

$$z_n=\sum_0^\infty {}_{i_1}\sum_0^\infty {}_{i_2}\cdots\sum_0^\infty {}_{i_{n-1}} b_{i_1\cdots i_{n-1}} z_1^{i_1} z_2^{i_2}\cdots z_{n-1}^{i_{n-1}} \tag{5}$$

essendo $b_{0\ldots 0}=0$.

Sostituiamo ora nella (4) a $z_1, z_2, \cdots, z_n$ le $F_1, F_2, \cdots, F_n$, secondo quanto dicemmo nel § precedente. Se consideriamo F_n come incognita, avremo una equazione integrale in cui i valori della F_n non compariranno linearmente. Se ora nella (5) sostituiremo a $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ le $F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}$ otterremo una serie convergente ed essa sarà soluzione della equazione integrale.

È notevole osservare che, *mentre la serie* (5) *esprime la soluzione dell'equazione* (4) *solo quando i moduli di* $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ *sono al disotto di certi limiti, la serie*

$$\sum_0^\infty {}_{i_1}\sum_0^\infty {}_{i_2}\cdots\sum_0^\infty {}_{i_{n-1}} b_{i_1\cdots i_{n-1}} F_1^{i_1}\cdots F_{n-1}^{i_{n-1}}(x, y),$$

ci darà la soluzione dell'equazione integrale $\mathbf{F}(F_1, F_2, \cdots, F_n)=0$ *comunque grandi siano i moduli delle funzioni* $F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}$, *purchè siano finiti.*

Così, per esempio, se si vuol trovare la funzione $S(x, y)$ quando si conosca $R(x, y)$ data da

$$R(x, y)=S(x, y)+\frac{S^2(x, y)}{2!}+\frac{S^3(x, y)}{3!}+\cdots+\frac{S^n(x, y)}{n!}+\cdots$$

in cui

$$S^n(x, y)=\int_x^y S^{n-1}(x, \xi)\, S(\xi, y)\, d\xi$$

si otterrà

$$S(x, y)=R(x, y)-\frac{1}{2}R^2(x, y)+\frac{1}{3}R^3(x, y)-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}R^n(x, y)+\cdots$$

www.rcin.org.pl

ove

$$R^n(x, y) = \int_x^y R^{n-1}(x, \xi) R(\xi, y) \, d\xi$$

e non dovremo porre alcuna limitazione per i valori assoluti di $S(x, y)$, $R(x, y)$, purchè siano finiti.

10. Supponiamo in particolare che la (1′) sia un polinomio razionale e intero in z_n di grado m, in modo che l'equazione (4) sia di grado m, allora ponendo $F_n = f$, l'equazione integrale si scriverà

$$(a_m + \Phi_m) f^m + (a_{m-1} + \Phi_{m-1}) f^{m-1} + \cdots + (a_1 + \Phi_1) f = \Phi_0$$

in cui $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_m$ sono funzioni permutabili fra loro e colle $F_1, F_2, \cdots, F_n$, e $a_1, a_2, \cdots, a_m$ sono costanti. Ammetteremo $a_1 \lesseqgtr 0$ per escludere la diramazione, come abbiamo detto precedentemente. Chiameremo la precedente equazione integrale una equazione integrale di grado m e ne avremo la soluzione colla regola precedentemente data, mediante uno sviluppo in serie, sempre convergente, che sarà una funzione permutabile colle funzioni date. È evidente che allo sviluppo in serie potremo sostituire come equivalente una espressione analitica qualunque che conduca allo stesso sviluppo.

La teoria può facilmente estendersi ai sistemi di equazioni.

§ 5. – Equazioni integrali di 1° e 2° grado.

11. Supponiamo che l'equazione integrale sia di primo grado, cioè

$$f(x, y) + \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y) \, d\xi = \Phi_0(x, y)$$

con Φ_0 e Φ_1 funzioni permutabili.

La soluzione sarà

$$f(x, y) = \frac{\Phi_0(x, y)}{1 + \Phi_1(x, y)} = \Phi_0(x, y) - \Phi_0 \Phi_1(xy) + \Phi_0 \Phi_1^2(x, y) - \cdots$$

Se $\Phi_0 = \Phi_1$ otteniamo il *primo* ed il *secondo principio* per la risoluzione delle equazioni integrali lineari cioè il *principio di convergenza* ed il *principio di reciprocità* che abbiamo svolto in Memorie precedenti (1), partendo dal concetto che le equazioni integrali possono riguardarsi come il caso limite di equazioni in cui il numero delle incognite e delle equazioni cresce indefinitamente.

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti*. « Atti R. Acc. di Torino », vol. 31, 1896; « Rend. Acc. dei Lincei », vol. V, 1° sem. 1896; « Annali di Matematica », 1897. [In queste « Opere »: vol. secondo, XVIII (pp. 216–254), XIX (pp. 255–262), XX (pp. 263–275), XXII (pp. 279–313)].

www.rcin.org.pl

12. Consideriamo l'equazione integrale di 2° grado, cioè

$$a_1 f(x,y) + \int_x^y \Phi_1(x,\xi) f(\xi,y)\,d\xi + a_2 \int_x^y f(x,\xi) f(\xi,x)\,d\xi$$

$$+ \int_x^y \Phi_2(x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y f(\xi,\xi_1) f(\xi_1,y)\,d\xi_1 = \Phi_0(x,y)$$

in cui a_1, a_2 sono costanti e $\Phi_0(x,y)$, $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$ sono funzioni permutabili, $a_1 \gtrless 0$.

La soluzione sarà

$$f = \frac{-(a_1+\Phi_1) + \sqrt{(a_1+\Phi_1)^2 - 4(a_2+\Phi_2)\Phi_0}}{2(a_2+\Phi_2)},$$

di cui è facile dare lo sviluppo in serie di potenze di Φ_0, Φ_1, Φ_2, nel quale le potenze stesse ed i prodotti di esse debbono denotare operazioni di composizione.

Avremo bisogno di ricorrere ad equazioni integrali di grado superiore in alcuni problemi di ereditarietà.

§ 6. – Estensione del Teorema IV. Teorema generale sulle equazioni integro-differenziali.

13. Teorema V. – *Abbiasi la serie di potenze, come nel teorema IV,*

$$(6) \qquad \sum_0^\infty{}_{i_1} \sum_0^\infty{}_{i_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{i_n} a_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2}, \cdots, z_n^{i_n} = \mathrm{F}(z_1, z_2, \cdots, z_n).$$

Sostituiamo a $z_1, z_2, \cdots, z_2$ *le* $z_1 \mathrm{F}_1$, $z_2 \mathrm{F}_2, \cdots, z_n \mathrm{F}_n$ *in cui* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *sono parametri indipendenti dalle variabili* x, y *e intendiamo che i simboli di prodotto e di potenza applicati alle* F_1, $\mathrm{F}_2, \cdots, \mathrm{F}_n$ *rappresentino le operazioni di composizione. Otterremo una serie di potenze di* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *convergente qualunque siano i moduli di questi parametri.*

Denoteremo questa funzione intera di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ con

$$\mathrm{F}(z_1 \mathrm{F}_1, z_2 \mathrm{F}_2, \cdots, z_n \mathrm{F}_n)$$

o anche con

$$\mathrm{F}(z_1, z_2, \cdots, z_n \mid x, y).$$

14. Consideriamo ora una relazione algebrica fra $z_1, z_2, \cdots, z_n$, la funzione (6) e le derivate di questa funzione fino ad un certo ordine, che scriveremo

$$\Phi\left(z_1, z_2, \cdots, z_n \,\middle|\, \mathrm{F} \,\middle|\, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}\mathrm{F}}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}} \cdots\right) = 0.$$

Sostituiamo rispettivamente a $z_1, z_2, \cdots, z_n$, F le $z_1\xi_1, z_2\xi_2, \cdots, z_n\xi_n$, f/ξ_0, essendo $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ dei parametri indipendenti da $z_1, z_2, \cdots, z_n$.

www.rcin.org.pl

L'equazione precedente diverrà

$$\Phi\left(z_1\,, z_2\,, \cdots, z_n \,\middle|\, \frac{f}{\xi_0} \,\middle|\, \frac{1}{\xi_0\,\xi_1}\,\frac{\partial f}{\partial z_1}\,, \frac{1}{\xi_0\,\xi_2}\,\frac{\partial f}{\partial z_2}\,, \cdots, \frac{1}{\xi_0\,\xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n}}\,\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}}\,, \cdots\right) = 0$$

la quale sarà soddisfatta da $f = \xi_0\,\mathrm{F}\,(z_1\,\xi_1\,, z_2\,\xi_2\,, \cdots, z_n\,\xi_n)$

Riducendola a forma intera assumerà l'espressione

$$\Psi\left(z_1\,, z_2\,, \cdots, z_n \,|\, \xi_0\,, \xi_1\,, \cdots, \xi_n \,|\, f \,|\, \frac{\partial f}{\partial z_1}\,, \frac{\partial f}{\partial z_2}\,, \cdots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} f}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}}\,, \cdots\right) = 0\,.$$

Adesso sostituiamo a $\xi_1\,, \xi_2\,, \cdots, \xi_n$ le $\mathrm{F}_1\,, \mathrm{F}_2\,, \cdots, \mathrm{F}_n$ e a ξ_0 sostituiamo una costante o una funzione F_0 permutabile colle funzioni precedenti, in modo che f resulti anch'essa permutabile colle funzioni stesse, e consideriamo i prodotti e le potenze di $\mathrm{F}_0\,, \mathrm{F}_1\,, \cdots, \mathrm{F}_n\,, f$ e delle derivate di f come operazioni di composizione; l'equazione resulterà identicamente soddisfatta, onde avremo il

TEOREMA VI. – *L'equazione integro-differenziale*

$$\Psi\left(z_1\,, z_2\,, \cdots, z_n \,|\, \mathrm{F}_0\,, \mathrm{F}_1\,, \cdots, \mathrm{F}_n \,|\, f \,|\, \frac{\partial f}{\partial z_1}\,, \frac{\partial f}{\partial z_2}\,, \cdots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} f}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}}\,, \cdots\right) = 0$$

è soddisfatta dalla funzione intera $f\,(z_1\,, z_2\,, \cdots, z_n \,|\, x\,, y)$ *permutabile con* $\mathrm{F}_1\,, \mathrm{F}_2\,, \cdots, \mathrm{F}_n$.

15. Evidentemente il precedente teorema può estendersi ai sistemi di equazioni integro-differenziali; così prendiamo, per esempio, le funzioni

$$\xi\,\mathrm{sn}\,(\xi z) \quad , \quad \xi\,\mathrm{cn}\,(\xi z) \quad , \quad \xi\,\mathrm{dn}\,(\xi z)$$

e sviluppiamole in serie di potenze intere e positive di z le quali, come è ben noto, saranno convergenti nell'intorno di $z = 0$. Negli sviluppi sostituiamo a ξ una funzione $\mathrm{S}\,(x\,, y)$ e consideriamo le successive potenze di S come le resultanti delle operazioni di composizione eseguite su S stessa.

Otterremo in tal modo tre *trascendenti intere* di z, funzioni inoltre di $x\,, y$, che potremo denotare con

$$\varphi_1\,(z \,|\, x\,, y) \quad , \quad \varphi_2\,(z \,|\, x\,, y) \quad , \quad \varphi_3\,(z \,|\, x\,, y),$$

le quali soddisfaranno alle equazioni integro-differenziali

$$\frac{d\varphi_1\,(z \,|\, x\,, y)}{dz} = \int_x^y \varphi_2\,(z \,|\, x\,, \xi)\,\varphi_3\,(z \,|\, \xi\,, y)\,d\xi$$

$$\frac{d\varphi_2\,(z \,|\, x\,, y)}{dz} = -\int_x^y \varphi_3\,(z \,|\, x\,, \xi)\,\varphi_1\,(z \,|\, \xi\,, y)\,d\xi$$

$$\frac{d\varphi_3\,(z \,|\, x\,, y)}{dz} = -\,k^2 \int_x^y \varphi_1\,(z \,|\, x\,, \xi)\,\varphi_2\,(z \,|\, \xi\,, y)\,d\xi$$

in cui k è il modulo delle funzioni ellittiche.

www.rcin.org.pl

§ 7. – Teoremi di addizione integrali. Relazioni funzionali.

16. In una Nota precedente [2] ho costruito la funzione intera

$$V(z \mid x, y) = Sz + \frac{S^2 z^2}{1.2} + \frac{S^3 z^3}{1.2.3} + \cdots \tag{7}$$

in cui $S, S^2, S^3, \cdots$ hanno lo stesso significato come nel precedente paragrafo ed ho dimostrato che la detta funzione possiede il teorema d'addizione integrale

$$\begin{aligned} &V(z+u \mid x, y) \\ &= V(z \mid x, y) + V(u \mid x, y) + \int_x^y V(z \mid x, \xi) V(u \mid \xi, y) d\xi, \end{aligned} \tag{8}$$

del quale mi sono valso per risolvere il problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

Questo teorema può dedursi dal teorema d'addizione della funzione esponenziale. Posto infatti

$$V(z) = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots, \tag{9}$$

avremo

$$V(z+u) = V(z) + V(u) + V(z) V(u),$$

onde, sostituendo nella serie (9) a z successivamente $zS_1(x, y)$, $uS_2(x, y)$ e $zS_1(x, y) + uS_2(x, y)$, e considerando le potenze e i prodotti di S_1 e S_2 come operazioni di composizione, otterremo la funzione intera del tipo (7) ed il teorema d'addizione integrale

$$\begin{aligned} &V[zS_1(x, y) + uS_2(x, y)] \\ &= V(zS_1(x, y)) + V(uS_2(x, y)) + V(zS_1) V(uS_2). \end{aligned}$$

Se $S_1 = S_2 = S$ avremo il teorema d'addizione integrale (8).

17. Si comprende facilmente come analoghi teoremi integrali possano ottenersi partendo da funzioni olomorfe nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ le quali posseggano teoremi d'addizione. Così, per esempio, è facile vedere i teoremi d'addizione integrali che si hanno partendo dalle funzioni ellittiche $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$.

Similmente qualsiasi relazione tra funzioni olomorfe nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ conduce a relazioni integrali. Prendiamo per

(2) « Rend. R. Accad. dei Lincei ». Seduta del 6 febbraio 1910. [In questo vol.: XXII, pp. 304-310].

esempio la ordinaria funzione σ, cioè [3]

$$\sigma u = u + * - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} - \dots$$

e sostituiamo ad u la $u\mathrm{S}(x, y)$ considerando le potenze di S come rappresentanti operazioni di composizione. Otterremo la funzione intera $\mathrm{F}(u \mid x, y)$ e la equazione a tre termini condurrà alla relazione integrale

$$\int_x^y \mathbf{F}(u+u_1 \mid x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y \mathbf{F}(u-u_1 \mid \xi, \xi_1)\, d\xi_1 \int_{\xi_1}^y \mathbf{F}(u_2+u_3 \mid \xi_1, \xi_2)\, \mathbf{F}(u_2-u_3 \mid \xi_2, y)\, d\xi_2$$

$$+ \int_x^y \mathbf{F}(u+u_2 \mid x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y \mathbf{F}(u-u_2 \mid \xi, \xi_1)\, d\xi_1 \int_{\xi_1}^y \mathbf{F}(u_3+u_1 \mid \xi_1, \xi_2)\, \mathbf{F}(u_3-u_1 \mid \xi_2, y)\, d\xi_2$$

$$+ \int_x^y \mathbf{F}(u+u_3 \mid x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y \mathbf{F}(u-u_3 \mid \xi, \xi_1)\, d\xi_1 \int_{\xi_1}^y \mathbf{F}(u_1+u_2 \mid \xi_1, \xi_2)\, \mathbf{F}(u_1-u_2 \mid \xi_2, y)\, d\xi_2 = 0.$$

Il teorema IV ed il teorema V e le loro conseguenze possono estendersi anche a casi di funzioni non permutabili e ad altri casi di cui ci occuperemo in altri lavori.

§ 8. - Permutabilità e composizione di 2ª specie.

18. Supponiamo che le funzioni finite e continue $\mathrm{F}_i(x, y)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, siano tali che

$$\text{(B)} \qquad \int_0^1 \mathrm{F}_i(x, \xi)\, \mathrm{F}_s(\xi, y)\, d\xi = \int_0^1 \mathrm{F}_s(x, \xi)\, \mathrm{F}_i(\xi, y)\, d\xi\,.$$

Anche questa proprietà potrà chiamarsi *permutabilità* delle funzioni $\mathrm{F}_1, \cdots, \mathrm{F}_n$, soltanto per distinguerla dalla permutabilità considerata nei precedenti paragrafi, la diremo *permutabilità di 2ª specie*, riserbando a quella precedentemente considerata il nome di *permutabilità di 1ª specie* o semplicemente di *permutabilità* come abbiamo detto fin qui. E così l'operazione (B) si potrà dire *composizione di 2ª specie* ed il risultato ottenuto *risultante di 2ª specie*.

Per distinguere la risultante di 2ª specie da quella precedentemente considerata, porremo due punti sopra le funzioni; quindi il risultato dell'operazione (B) si indicherà con $\ddot{\mathrm{F}}_i\, \ddot{\mathrm{F}}_s(x, y)$ o semplicemente con $\ddot{\mathrm{F}}_i\, \ddot{\mathrm{F}}_s$; componendo m funzioni eguali ad $\mathrm{F}_1(x, y)$ la *risultante* si rappresenterà con $\ddot{\mathrm{F}}_1^m(x, y)$ o con $\ddot{\mathrm{F}}_1^m$.

(3) Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen. Fuctionen* Gottingen 1885, Art. 5, ser. 6.

www.rcin.org.pl

Se si eccettua il teorema III, tutte le proprietà enunciate nei §§ 1 e 2 sono senz'altro estensibili alla composizione di 2ª specie.

19. TEOREMA VII. – *Siano le* m_{is} $(i, s = 1, 2, \cdots, n)$ *delle costanti finite. Si formi*

$$m'_{is} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_h\, m_{ih}\, m_{hs}\,,\; m''_{is} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_h\, m'_{ih} m_{hs}\,, \cdots, m^{(p)}_{is} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} m^{(p-r)}_{ih}\, m^{(r)}_{hs}, \cdots$$

La funzione ottenuta per prolungamento analitico in tutto il piano complesso dell'elemento individuato nell'intorno di $z = 0$ *dalla serie*

$$f_{is}(z) = c_1\, m_{is}\, z + c_2\, m'_{is}\, z^2 + c_3\, m''_{is}\, z^3 + \cdots$$

sarà una funzione olomorfa se $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ *è olomorfa in tutto il piano complesso; e sarà meromorfa (o olomorfa) se* $f(z)$ *è meromorfa.*

Questo teorema può dedursi dal teorema di HADAMARD (4) osservando che le radici delle equazioni di 1° grado $x_{is} - \frac{z}{n}\sum_{1}^{n}{}_h\, m_{ih}\, x_{hs} = z m_{is}$ sono sviluppabili nell'intorno di $z = 0$ nelle serie $x_{is} = m_{is}\, z + m'_{is}\, z^2 + m''_{is}\, z^3 + \cdots$

TEOREMA VIII. – *Se*

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso, la funzione

$$f(z \mid x, y) = c_1\, \mathrm{S}z + c_2\, \ddot{\mathrm{S}}^2 z^2 + c_3\, \ddot{\mathrm{S}}^3 z^3 + \cdots, \tag{10}$$

in cui S *è una funzione di* x, y *finita e continua, sarà pure una funzione olomorfa di* z *in tutto il piano complesso. Essa si denoterà anche con* $f(\ddot{\mathrm{S}}z)$.

TEOREMA IX. – *Se*

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{11}$$

è una funzione meromorfa, la funzione ottenuta per prolungamento analitico in tutto il piano complesso dell'elemento individuato nell'intorno di $z = 0$ *dalla serie*

$$f(z \mid x, y) = c_1\, \mathrm{S}z + c_2\, \ddot{\mathrm{S}}\, z^2 + c_3\, \ddot{\mathrm{S}}^3 z^3 + \cdots \tag{12}$$

resulterà pure una funzione meromorfa (o olomorfa) di z.

I teoremi VIII e IX sono stati ottenuti come casi limiti dal teorema VII, quando si supponga n, i, s, crescenti indefinitamente, in modo da passare dalle somme agli integrali, ma possono darsi dei teoremi stessi anche delle dimostrazioni dirette molto semplici. Ci risparmiamo quella del teorema VIII. Quella del teorema IX può aversi nel modo seguente, che ci fornisce nel

(4) « Acta Mathem. », T. 22; vedi BOREL, « Bull. Soc. Math. », T. 26; PINCHERLE, « Rend. R. Acc. di Bologna », nuova serie, t. III, 1899.

www.rcin.org.pl

tempo stesso la espressione analitica della (12) valida in tutto il piano complesso.

Supponiamo per semplicità che i poli $b_1, b_2, \cdots$ della (11) siano semplici. In virtù del teorema di MITTAG–LEFFLER potremo scrivere

$$f(z) = \Sigma_i\, m_i \left[\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \cdots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right] + P_0(z),$$

in cui $P_0(z)$ è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso.

Poniamo ora la soluzione dell'equazione

$$(13) \qquad S(x, y) = F(z \mid x, y) - z \int_0^1 F(z \mid x, \xi)\, S(\xi, y)\, d\xi$$

sotto la forma

$$(14) \qquad F(z \mid x, y) = \frac{H(z \mid x, y)}{D(z)}$$

in cui il numeratore ed il denominatore sono funzioni intere di z e $D(z)$ è il determinante (5).

Potremo prendere le h_i tali che le due serie

$$\Sigma_i\, m_i \left[\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \cdots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right],$$

$$\Sigma_i\, m_i \left[\frac{\frac{z}{b_i} H\left(\frac{z}{b_i} \,\middle|\, x, y\right)}{D\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i} S - \frac{z^2}{b_i^2} \ddot{S}^2 - \cdots - \frac{z^{h_i} \ddot{S}^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right]$$

siano contemporaneamente uniformemente convergenti nell'intorno di ogni valore di z che non sia della forma $b_i a_s$, in cui $a_1, a_2, \cdots$ denotano le radici di $D(z) = 0$.

Ne segue che la funzione

$$(15) \qquad \Sigma_i\, m_i \left[\frac{\frac{z}{b_i} H\left(\frac{z}{b_i} \,\middle|\, x, y\right)}{D\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i} S - \frac{z^2}{b_i^2} \ddot{S}^2 - \cdots - \frac{z^{h_i} \ddot{S}^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right] + P_0(\ddot{S} z)$$

non sarà altro che la funzione $f(z \mid x, y)$. La (15) sarà in generale meromorfa, ed i suoi poli non potranno essere che nei punti $b_i a_s$.

20. È facile dedurre dalle equazioni differenziali, dai teoremi d'addizione, dalle relazioni algebriche e funzionali, a cui soddisfa un insieme di funzioni (11), delle equazioni integro–differenziali, dei teoremi di addizione integrali, e delle relazioni funzionali per le funzioni corrispondenti (15), in modo analogo a quanto facemmo nei paragrafi precedenti.

(5) Vedi FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, «Acta Math.», t. 27.

www.rcin.org.pl

In particolare, se partiamo dalle funzioni ellittiche, otterremo tre funzioni meromorfe $\psi_1(z \mid x, y)$, $\psi_2(z \mid x, y)$, $\psi_3(z \mid x, y)$ le quali soddisfano le equazioni integro–differenziali

$$\frac{d\psi_1(z \mid x, y)}{dz} = \int_0^1 \psi_2(z \mid x, \xi)\, \psi_3(z \mid \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\psi_2(z \mid x, y)}{dz} = -\int_0^1 \psi_3(z \mid x, \xi)\, \psi_1(z_1 \mid \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\psi_3(z \mid x, y)}{dz} = -k^2 \int_0^1 \psi_1(z \mid x, \xi)\, \psi_2(z \mid \xi, y)\, d\xi$$

e posseggono dei teoremi di addizione integrali ben facili ad ottenersi.

Le trascendenti ellittiche, al pari di altre trascendenti, possono quindi condurre a varii tipi di nuove trascendenti, le une olomorfe e le altre meromorfe, le quali soddisfano ad equazioni integro–differenziali e posseggono teoremi d'addizione integrali.

www.rcin.org.pl