LE VARIETÀ ALGEBRICHE CON INDICE DI SINGOLARITÀ MASSIMO (*) (**) (***)

Nota II

4. Imporre a un complesso lineare di Σ la condizione di avere un punto singolare in un punto assegnato, cioè di avere per asse uno spazio di dimensione ≥ 1 passante per questo punto, equivale ad imporgli $2p - 1$ condizioni lineari indipendenti; quindi, in corrispondenza agli ∞^{2p-1} punti di Σ:

L'ipersuperficie F contiene ∞^{2p-1} spazî lineari aventi ciascuno la dimensione

$$p(2p-1) - 1 - (2p-1) = p(2p-3).$$

È utile, per quel che segue, precisare questo risultato, ponendosi alla determinazione di tutti gli spazî lineari di F aventi la massima dimensione possibile.

Perchè i complessi di un fascio di complessi lineari di Σ siano tutti singolari, occorre e basta che essi abbiano almeno un punto singolare comune (14);

(*) *Rendiconti del R. Accademia dei Lincei*, vol. XXIV. serie 5ª, 2º sem., fasc. 7º - Roma, ottobre 1915.

(**) La numerazione degli articoli o delle note è fatta in continuazione di quella della Nota I.

(***) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1915.

(14) Siano

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a'_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0\,;\; a'_{r,s} + a'_{s,r} = 0)$$

le equazioni di due complessi lineari di Σ dotati ciascuno di un S_{2l-1} asse: e supponiamo che i loro due assi siano indipendenti, per modo che sarà $2l \leq p$.

Senza venir meno alla generalità possiamo supporre che l'asse del primo sia lo spazio rappresentato dalle equazioni:

$$x_{2l+1} = x_{2l+2} = \ldots = x_{2p} = 0$$

quindi gli spazî lineari di dimensione massima contenuti nell'ipersuperficie F si otterranno considerando in Σ i sistemi lineari di dimensione massima di complessi dotati genericamente di retta-asse e le cui rette-assi si taglino a due a due.

e l'asse del secondo quello rappresentato dalle equazioni:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2l} = x_{4l+1} = x_{4l+2} = \ldots x_{2p} = 0$$

Ciò val quanto dire che nell'equazione del primo complesso sono nulle tutte le $a_{r\,s}$ per cui uno qualunque dei due indici è un numero della successione

$$1\,,2\,,\ldots,2l\,,$$

e che nell'equazione del secondo complesso sono nulle tutte le $a'_{r\,s}$ per cui uno qualunque dei due indici è un numero della successione

$$2l+1\,,2l+2\,,\ldots,4l\,.$$

Poichè l'asse di un complesso è il *luogo* dei suoi punti singolari, nessuno dei due complessi dati ha punti singolari esterni al proprio asse; e quindi, in virtù dell'ipotesi fatta, ciascuno dei due complessi induce sull'asse dell'altro un sistema nullo non singolare. Queste due osservazioni portano, in particolare, che i determinanti

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 0 & a_{2l+1,2l+2} & \cdots & a_{2l+1,2p} \\ a_{2l+2,2l+1} & 0 & \cdots & a_{2l+2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2p,2l+1} & a_{2p,2l+2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \varDelta' = \begin{vmatrix} 0 & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,2l} \\ a'_{2,1} & 0 & \cdots & a'_{2,2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{2l,1} & a'_{2l,2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

sono entrambi diversi da zero.

Se i complessi del fascio determinato dai due complessi dati fossero tutti singolari l'equazione in $\frac{\lambda}{\mu}$ che si ottiene ponendo uguale a zero il determinante $|\lambda a_{r\,s} + \mu a'_{r\,s}|$ dovrebbe essere un'identità. Ma ciò è impossibile perchè, divisi per μ gli elementi delle prime $2l$ righe e fatto poi $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, questo determinante si riduce al prodotto

$$\varDelta\,\varDelta',$$

dunque è assurdo supporre che i nostri due complessi generino un fascio di complessi tutti singolari; e ciò basta a dimostrare l'affermazione del testo quando si rifletta che, se i complessi di un fascio sono tutti singolari, l'asse del complesso generico ha una dimensione fissa.

Del resto la cosa stessa può dedursi da teoremi del sig. PALATINI contenuti nella sua Nota: *Sui complessi lineari di rette negli iperspazi* (Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, vol. XLI, 1903, pp. 85-96).

Ma se più rette si tagliano a due a due o stanno in un piano o passano per uno stesso punto, dunque:

In ogni caso gli spazî lineari di dimensione massima di F hanno la dimensione $p(2p-3)$; però se $p>2$ codesti $S_{p(2p-3)}$ di F costituiscono un unico sistema continuo ∞^{2p-1}, rispecchiantesi nel modo chiarito più sopra sugli ∞^{2p-1} punti di Σ, mentre se $p=2$ codesti spazî di F (che sono adesso degli S_2) si distribuiscono (come è ben noto, una volta che per $p=2$ F è una quadrica) in due sistemi continui ∞^3 rispecchiantisi l'uno, al solito modo sugli ∞^3 punti di Σ, l'altro sulle ∞^3 reti di complessi lineari speciali di Σ aventi per assi le rette dei singoli piani Σ.

Se un punto di Σ è razionale, è evidentemente razionale l'$S_{p(2p-3)}$ di S situato su F, che ad esso corrisponde; e se un $S_{p(2p-3)}$ di F è razionale, tale è pure il corrispondente punto o piano di Σ, poichè in tal caso l'$S_{p(2p-3)}$ contiene $p(2p-3)+1$ punti razionali indipendenti a cui rispondono in Σ altrettanti complessi singolari razionali, e gli assi (razionali) di questi complessi determinano il punto o il piano rispondente a quell'$S_{p(2p-3)}$. Quindi possiamo dire che:

L'ipersuperficie F contiene infiniti spazi razionali della dimensione $p(2p-3)$. Se $p>2$ tali spazi razionali costituiscono un unico insieme riflettentesi sull'insieme dei punti razionali di Σ; se $p=2$ essi possono distribuirsi in due insiemi dei quali uno si rispecchia sull'insieme dei punti razionali di Σ, e l'altro sull'insieme dei piani razionali di Σ.

5. Adesso supponiamo che V_p sia k volte singolare.

Poichè ogni relazione di RIEMANN di V_p dà luogo ad un *sistema nullo di* V_p (15), e quindi a un complesso razionale di Λ, possiamo dire che:

Se V_p è k volte singolare, lo spazio Σ' contiene $k+1$ punti razionali indipendenti e non più.

Chiamiamo μ l'S_k razionale contenente tutti i punti razionali di Σ'.

Poichè l'esistenza di un sistema regolare di integrali semplici di prima specie riducibili di V_p dà luogo all'esistenza di un sistema nullo (almeno) di V_p avente per asse l'asse del sistema, e poichè inversamente ad ogni sistema nullo singolare di V_p risponde *un* sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del sistema (16), possiamo dire che:

(15) Loc. cit. 3), Nota II, n. 10.
(16) Loc. cit. 3), Nota II, n. 19.

La varietà V_p ammette sistemi regolari ∞^{q-1} di integrali riducibili quando e solo quando μ contenga punti razionali appartenenti ad $F^{(q)}$, ma non ad $F^{(q+1)}$ se $q < p-1$.

La corrispondenza, ora considerata, fra i sistemi regolari ∞^{q-1} di V_p e i sistemi nulli singolari di V_p dotati di un S_{2q-1} asse è biunivoca certamente se $q = p - 1$, poichè un sistema nullo singolare di specie $2(p-1)$ in un S_{2p-1} è individuato dal suo asse, dunque:

Tanti sono i sistemi regolari ∞^{p-2} di integrali riducibili di V_p, quanti sono i punti razionali di μ appartenenti ad $F^{(p-1)}$.

6. Se lo spazio μ ha una dimensione $k \geq 2p-1$, ogni $S_{p(2p-3)}$ razionale di F taglia μ in uno spazio razionale S_t appartenente ad $F^{(1)}$ per la cui dimensione t si ha:

$$t \geq k + p(2p-3) - p(2p-1) + 1 \geq 2p - 1 + \\ + p(2p-3) - p(2p-1) + 1 = 0\,;$$

dunque $F^{(1)}$ contiene intanto infiniti punti razionali. D'altro canto è facile persuadersi che gli infiniti punti razionali di $F^{(1)}$ a cui dànno luogo gli infiniti $S_{p(2p-3)}$ razionali di F riflettentisi sui punti razionali di Σ, non possono rispondere che a infiniti sistemi regolari distinti di integrali riducibili di V_p, quindi:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$ che sia almeno $2p-1$ volte singolare, contiene necessariamente infiniti sistemi regolari di integrali riducibili ([17]).

Le dimensioni di questi sistemi regolari dipendono dalle molteplicità che presentano per $F^{(1)}$ i suoi punti razionali: in particolare la varietà conterrà integrali ellittici solo se $F^{(1)}$ contiene punti razionali semplici.

7. Se $k = p^2 - 1$ (e come dimostreremo tra poco questa ipotesi è pienamente legittima), lo spazio μ coincide con Σ'.

([17]) L'aver dimostrato che F non ammette spazî lineari di dimensione superiore a $p(2p-3)$ prova che con ragionamenti analoghi a quelli del testo non si può assicurare l'esistenza su V_p di sistemi regolari di integrali riducibili dalla sola ispezione dell'indice di singolarità di V_p, finchè questo indice è inferiore a $2p-1$. Del resto che questo non possa farsi in alcuna maniera può essere stabilito con esempî.

L'intersezione di μ, cioè di Σ', con un $S_{p(2p-3)}$ di F corrispondente a un punto M di Σ è lo spazio lineare di $F^{(1)}$, della dimensione

$$(p-1)^2 - 1\,,$$

che rappresenta i complessi lineari di A, aventi per spazio singolare la retta m uscente da quel punto e appoggiata a τ e $\overline{\tau}$.

Se l'$S_{p(2p-3)}$ di F che si considera è razionale, cioè se è razionale il punto M, tale è pure la sua intersezione con lo spazio razionale Σ' e la retta m; quindi questa retta m è l'asse di un integrale di V_p che risulta ellittico.

Si conclude che V_p ammette infiniti integrali ellittici, e che dell'insieme degli assi di questi integrali ne passa uno per ogni punto razionale di Σ'. Ma allora (come si riconosce subito segando, p. es., con un iperpiano razionale di Σ') ogni retta reale appoggiata a τ e $\overline{\tau}$ è retta limite dell'insieme degli assi di questi integrali, e quindi *ogni integrale semplice di 1ª specie di V_p è approssimabile mediante integrali ellittici.*

8. Adesso supponiamo inversamente che ogni integrale semplice di 1ª specie di V_p sia approssimabile mediante integrali ellittici.

Allora si riconosce subito che combinando linearmente questi integrali ellittici a due a due, a tre a tre, ... a $p-1$ a $p-1$ si ottengono *infiniti* sistemi regolari di integrali riducibili di V_p delle dimensioni $1, 2, \ldots, p-2$; e si vede pure, considerando l'asse di un sistema lineare ∞^{p-2} di integrali semplici di 1ª specie di V_p come lo spazio congiungente gli assi di $p-1$ integrali indipendenti del sistema, che codesto asse si può considerare come limite di assi di sistemi regolari di integrali riducibili di V_p aventi la dimensione $p-2$.

Ciò porta che su $F^{(p-1)}$ esistono infiniti punti razionali, e che ogni punto reale di $F^{(p-1)}$ è limite per l'insieme di codesti punti razionali.

Segue che lo spazio razionale μ contenente tutti i punti razionali di $F^{(1)}$ contiene tutti i punti reali di $F^{(p-1)}$, cioè $F^{(p-1)}$; e quindi μ coincide con lo spazio di appartenenza di $F^{(p-1)}$, cioè con Σ'. Il che val quanto dire che, *nell'ipotesi fatta, l'indice di singolarità di V_p è appunto p^2-1.*

9. Perchè le considerazioni dei due ultimi numeri non siano illusorie, e perchè resti compiutamente dimostrato il teorema enunciato nell'introduzione (Nota I), occorre e basta far vedere che:

Esistono effettivamente delle varietà algebriche V_p di irregolarità superficiale $p > 1$, il cui indice di singolarità eguaglia $p^2 - 1$.

Per questo si consideri la matrice

$$\text{(I)} \qquad \begin{Vmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{1,2p} \\ \omega_{2,2} & \omega_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{2\,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p,2p} \end{Vmatrix},$$

e posto

$$\omega_{j,r} = \alpha_{j,r} + i\beta_{j,r} \qquad (i = \sqrt{-1}\,; j = 1, 2, \ldots, p\,; r = 1, 2, \ldots, 2p)$$

con le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ reali, si supponga che le $\alpha_{j,r}$ e $\beta_{j,r}$ siano tutte numeri interi e che il determinante

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{p,2p} \\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{p,2p} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Dico che la tabella (I) (ove si suppone naturalmente $p > 1$) può considerarsi come la tabella di $2p$ sistemi primitivi di periodi di un corpo di funzioni abeliane a p variabili indipendenti.

E infatti, in uno spazio Σ a $2p - 1$ dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee, si considerino i punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ le cui coordinate sono date dagli elementi delle righe della matrice (I); per l'ipotesi fatta sul determinante (II) i punti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ saranno indipendenti, e l'S_{p-1}, τ, che li congiunge sarà indipendente dall'S_{p-1} imaginario coniugato $\overline{\tau}$.

Le $\frac{1}{2}\, p\,(p-1)$ rette che congiungono a due a due i punti ω_j $(j = 1, 2, \ldots p)$ e le $\frac{1}{2}\, p\,(p-1)$ rette che congiungono a due a due i punti immaginari coniugati ai punti ω_j hanno per coordinate numeri complessi aventi per parte reale e per coefficiente dell'imaginario i dei numeri interi; quindi perchè un complesso lineare di Σ

rappresentato da una equazione del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0)$$

contenga tutte le rette di τ e $\overline{\tau}$ [per il che occorre e basta che contenga le $p(p-1)$ rette ora nominate], bisognerà che i coefficienti $a_{r,s}$ della sua equazione soddisfacciano a $p(p-1)$ equazioni lineari omogenee a coefficienti interi.

Segue che se si introduce, come più sopra, uno spazio S a $p(2p-1)-1$ dimensioni a rappresentare, nel modo già dichiarato, i complessi lineari di Σ, lo spazio Σ' di S, rappresentante i complessi lineari di Σ che contengono tutte le rette di τ e $\overline{\tau}$, è uno spazio razionale.

Ma allora, se $F^{(1)}$ è l'ipersuperficie di Σ' rispondente alla totalità dei complessi singolari di Σ che contengono le rette di τ e $\overline{\tau}$, esiste certo qualche punto razionale di S appartenente a Σ' e interno alla *prima falda* di $F^{(1)}$, poichè i punti reali di Σ' interni alla prima falda di $F^{(1)}$ costituiscono un dominio a p^2-1 dimensioni, e i punti razionali di S situati in Σ' costituiscono in Σ' un insieme di punti dovunque denso; in base all'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che noi abbiamo stabilita altrove ([18]), la nostra affermazione relativa alla tabella (I) è pienamente dimostrata.

Ciò posto, si consideri una varietà abeliana di rango 1 appartenente alla tabella (I); cioè una varietà di dimensione p che ammetta una rappresentazione parametrica per funzioni abeliane di p parametri appartenenti alla tabella (I), la rappresentazione essendo tale da far corrispondere ad ogni punto della varietà, a meno di periodi, un sol gruppo di valori dei parametri.

Tale varietà abeliana sarà appunto di irregolarità superficiale $p > 1$ e avrà per indice di singolarità p^2-1.

([18]) Loc. cit. [5]), n. 55.