

6.65 — konsolidacja

7.72 — plastyczność

9 / 1984

Stefan Jan Kowalski

TEORIA KONSOLIDACJI
Z UWZGLĘDNIENIEM
PLASTYCZNOŚCI SZKIELETU

9/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 października 1983 r.



56957



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,1. Ark. druk. 2 .
Oddano do drukarni w lutym 1984 r.
Nr zamówienia 153/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Stefan Jan KOWALSKI

Zakład Aeroakustyki
Pracownia Mechaniki Ośrodków Porowatych
IPPT - PAN
Poznań

TEORIA KONSOLIDACJI Z UWZGLĘDNIENIEM PLASTYCZNOŚCI SZKIELETU

1. WSTĘP

Ośrodki porowate stanowią częsty przedmiot zainteresowania, bądź to z powodu ich masowego występowania (grunt, skały), bądź też ze względu na ich szczególne własności {por.np. [17]}. Są one bardziej podatne na odkształcenia niż ośrodki pełne i doznają odkształceń trwałych także pod działaniem kulistego stanu naprężenia.

Własność łatwej deformowalności ośrodków porowatych znajduje zastosowanie w technice wszędzie tam, gdzie chodzi o możliwie maksymalne "wychwycenie" energii w pewnym miejscu, np. w zagadnieniach izolacji. Taką własność powinien mieć np. zderzak samochodowy, łożysko wału korbowego silnika itp. Jeśli ponadto pory ośrodka wypełnione są cieczą lepką, to oprócz własności izolujących, ośrodek ten charakteryzuje się własnościami tłumiącymi. Może on więc znaleźć zastosowanie np. do ekranizacji budynków w terenie sejsmicznym, tłumienia drgań itp.

Nie opracowano dotąd uniwersalnego modelu opisującego plastyczne zachowanie się ośrodka porowatego wypełnionego cieczą. Pewien przyczynek w tym kierunku zrobili MIŁOŠKOJIOĆ i CHATHAM, [19], którzy analizowali trwałe deformacje ośrodka porowatego zawierającego ciecz przy założeniu, że ziarna szkieletu odkształcają się sprężysto, a trwałe deformacje powstają wskutek wzajemnego poślizgu ziaren szkieletu względem siebie (model Coulomba). Praca ta budzi jednakże pewne wątpliwości odnośnie równań pola i ich interpretacji (parcjalne tensory naprężenia,

siły interakcji). Także interpretacja niektórych współczynników jest niezbyt jasna. IZBICKI i MRÓZ, [14], oraz CRISTESCU, [7], analizowali modele związane ze stabilnością gruntów i skał. Istnieje szereg prac dotyczących plastyczności porowatych ośrodków z pustymi porami, np. CARROLL i inni, [4], [5], [6], GREEN, [13], MIELNICZUK, [18], RICE, [22], SHIMA i OYANE, [23], oraz inni. Brak jest jednakże ogólnego modelu opisującego deformacje plastyczne w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą.

W niniejszej pracy podjęto próbę w miarę ogólnego ujęcia zagadnienia trwałych deformacji w ośrodku porowatym zawierającym ciecz. Zawarte tu są główne tezy wcześniejszej pracy de BOERA i autora, [2], uzupełnione bliższymi wyjaśnieniami niektórych elementów tej pracy, które budziły wątpliwości podczas jej prezentacji na seminariach.

Przedmiotem rozważań jest sprężysto-idealnie plastyczny ośrodek porowaty, którego drożne pory wypełnione są cieczą lepką. Dla takiego ośrodka proponuje się warunek plastyczności, który w przestrzeni naprężeń stanowi gładką powierzchnię II stopnia. Następnie, wykorzystując koncepcję potencjału plastycznego, wyprowadza się stowarzyszone prawa płynięcia. Tok rozważań oparty jest na postulatach termodynamiki procesów nieodwracalnych, co umożliwia jasną interpretację wprowadzonych współczynników.

Podjęty problem jest w ogólności fizycznie i geometrycznie nieliniowy. Aby otrzymać prostą i praktycznie możliwą do zastosowania teorię, wiele zjawisk, takich jak np. wpływ prędkości deformacji na związki fizyczne, będzie pominiętych i wprowadzi się wiele dość silnych założeń, jak np. izotropia ośrodka.

Tak więc, zajmujemy się teorią sprężysto-idealnej plastyczności dla izotropowego ośrodka porowatego ze statystycznym rozkładem szkieletu i cieczy oraz z jednorodnym rozkładem temperatury (zakładamy brak dopływu ciepła). Przyjmujemy, że materiał szkieletu jest niewrażliwy na prędkość deformacji oraz, że ścisłość poszczególnych składników jest pomijalnie mała w stosunku do ścisłości ośrodka jako całości. Pomija się dewiator naprężenia w cieczy jako pomijalnie mały w porównaniu z dewiatorem naprężenia w szkielecie, a siły lepkości cieczy poruszającej się w porach uwzględnione są we współczynniku Darcy.

Przy wyprowadzaniu związków fizycznych zakłada się, że sprężyste deformacje są małe.

Efektom końcowym pracy jest pełny układ równań teorii plastyczności dla ośrodków porowatych wypełnionych cieczą wraz z dyskusją warunków brzegowych dla tego ośrodka.

2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

W pracy stosujemy opis przestrzenny ruchu i wyrażamy wszystkie wielkości jako funkcje wektora pozycyjnego \mathbf{x} i czasu t . Równania ciągłości masy i równania ruchu dla ośrodka porowatego wypełnionego cieczą były już dyskutowane w literaturze [por. np. [9 + 11]]. Dlatego nie będziemy dyskutować tu szczegółów, a przytoczymy tylko te rezultaty, które są niezbędne dla jasności wyводу.

Rozważamy ośrodek składający się ze szkieletu, którego gęstość rzeczywista wynosi ϱ_r^s i cieczy, której gęstość rzeczywista wynosi ϱ_r^f . W rozważaniach używamy gęstości mas odniesionych do jednostki objętości całkowitej. W tym celu wprowadza się pojęcie funkcji porowatości, przy czym tutaj wprowadza się dwa rodzaje porowatości: porowatość objętościową f_v (równą średniej porowatości powierzchniowej) i efektywną porowatość powierzchniową f_p , [16]. Te dwa rodzaje porowatości wprowadza się dla wyróżnienia tzw. cieczy swobodnej, która porusza się niezależnie od szkieletu, od całkowitej cieczy zawartej w ośrodku, której część porusza się w sposób narzucony przez ruch szkieletu, [16]. W ślad za tym wprowadza się następujące gęstości parcjalne:

$$(2.1) \quad \varrho^s = (1 - f_v)\varrho_r^s, \quad \varrho^f = f_v\varrho_r^f, \quad \bar{\varrho} = f_p\varrho_r^f,$$

przy czym ϱ^s , ϱ^f i $\bar{\varrho}$ oznaczają odpowiednio gęstość parcjalną: szkieletu, całkowitej cieczy i cieczy swobodnej.

Całkowita gęstość ośrodka jest sumą gęstości parcjalnych tj.:

$$(2.1a) \quad \varrho = \varrho^s + \varrho^f = (\varrho - \bar{\varrho}) + \bar{\varrho}.$$

Wyróżniamy dwa pola prędkości: szkieletu \mathbf{v} i cieczy swobodnej \mathbf{w} . Tak więc, równania ciągłości masy dla szkieletu i cieczy przedstawiają się następująco, [11]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varrho^s}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho^s \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \varrho^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v}) &= -\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned}$$

przy czym:

$$(2.2a) \quad \boldsymbol{\eta} = \bar{\varrho} (\mathbf{w} - \mathbf{v})$$

oznacza strumień masy cieczy swobodnej przez powierzchnię związaną ze szkieletem. Równania ciągłości masy można napisać alternatywnie dla szkieletu wraz z częścią poruszającą się z nim cieczy oraz dla cieczy swobodnej tj.:

$$(2.2b) \quad \frac{\partial (\varrho - \bar{\varrho})}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho - \bar{\varrho}) \mathbf{v} = \varrho_{12}^* \approx 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\varrho} \mathbf{w} = \varrho_{21}^* \approx 0,$$

przy czym $\varrho_{12}^* = -\varrho_{21}^*$ oznacza ubytek cieczy uwięzionej na rzecz cieczy swobodnej lub odwrotnie, [11]. W tej pracy przyjmujemy, że zjawisko to jest pomijalnie małe.

Równania ruchu, wynikające z bilansu pędu i momentu pędu przyjmują postać, [9], [11]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} + (\varrho - \bar{\varrho}) \mathbf{b} + \mathbf{f}_{12} &= (\varrho - \bar{\varrho}) \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}^T, \\ \operatorname{grad} \bar{p} + \bar{\varrho} \mathbf{b} + \mathbf{f}_{21} &= \bar{\varrho} \frac{D\mathbf{w}}{Dt}, \end{aligned}$$

przy czym:

$$(2.3a) \quad \frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \operatorname{grad}(\cdot) \cdot \mathbf{v}, \quad \frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \operatorname{grad}(\cdot) \cdot \mathbf{w}.$$

Tutaj $\bar{\mathbf{T}}$ oznacza parcjalny tensor naprężenia w szkielecie i cieczy uwięzionej, $\bar{p} = -p f_p$ oznacza parcjalne ciśnienie cieczy swobodnej, p jest rzeczywistym ciśnieniem cieczy, \mathbf{b} oznacza siły masowe, a $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21} = \mathbf{f}$ oznaczają siły wzajemnego oddziaływania składników w ruchu względnym.

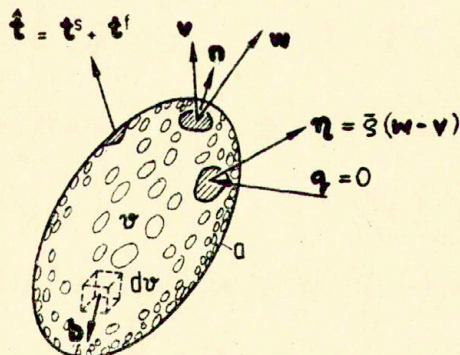
Całkowity tensor naprężenia działający na element ośrodka dwuskładnikowego jest sumą tensorów parcjalnych:

$$(2.4) \quad \hat{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}} + \bar{p} \mathbf{I}.$$

Wektor naprężenia $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{n}$ może być zinterpretowany jako średnia całkowita siła działająca na jednostkę powierzchni całkowitej ośrodka w bieżącej konfiguracji; \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do tej powierzchni.

3. OGRANICZENIA TERMODYNAMICZNE

Przedyskutujemy ograniczenia, jakie nakładają na niniejszą teorię prawa termodynamiki. Rozpocniemy od bilansu energii. W tym celu rozważymy dowolną objętość \mathcal{V} ośrodka w chwili t , ograniczoną regularną powierzchnią \mathcal{Q} , zorientowaną w przestrzeni przez jednostkowy wektor normalny \mathbf{n} (rys.1).



Rys.1. Dowolna objętość ośrodka porowatego wypełnionego cieczą.

Równanie bilansu energii dla tej wydzielonej objętości ma postać:

$$(3.1) \quad \dot{U} + \dot{K} = L + Q,$$

gdzie \dot{U} i \dot{K} oznaczają odpowiednio pochodną materialną całkowitej energii wewnętrznej i kinetycznej ośrodka w objętości V , a L i Q odpowiednio moc mechaniczną i niemechaniczną dostarczaną do tej objętości z zewnątrz. Energia wewnętrzna jest wielkością ekstensywną, i w naszym przypadku składa się z energii wewnętrznej szkieletu i cieczy, co zapisujemy:

$$(3.2) \quad U = \int_V (\rho_s u_s + \rho_f u_f) dV,$$

przy czym u_s i u_f oznaczają energię wewnętrzną ośrodka na jednostkę masy, odniesioną odpowiednio do masy szkieletu i cieczy. Przy obliczaniu pochodnej materialnej należy zwrócić uwagę, że istnieją dwie prędkości konwekcji: \mathbf{v} i \mathbf{w} . Z tego względu przyjmujemy, że "powierzchnia kontrolna" związana jest ze szkieletem i porusza się z prędkością \mathbf{v} . Przy tym założeniu, przez powierzchnię tą następuje przepływ masy, której strumień określony jest wzorem (2.2a). Pochodną materialną energii wewnętrznej możemy obecnie zapisać jak następuje:

$$(3.3) \quad \dot{U} = \int_V (\dot{U} + \eta \cdot \text{grad } u_f) dV,$$

przy czym wielkość

$$(3.4) \quad \dot{U} \stackrel{df}{=} \rho_s \dot{u}_s + \rho_f \dot{u}_f = \frac{d}{dt} (\rho_s u_s + \rho_f u_f)_{\text{masa}} = \text{const}$$

z definicji, oznacza zmiany energii wewnętrznej ośrodka w jednostce objętości, spowodowane przyczynami innymi niż zmiana masy. Drugi człon pod całką (3.3) określa zmiany energii wewnętrznej, spowodowane przepływem masy przez powierzchnię kontrolną.

Energia kinetyczna K jest sumą energii kinetycznej szkieletu wraz z cieczą uwieczoną i energii kinetycznej cieczy swobodnej, tj.:

$$(3.5) \quad K = \frac{1}{2} \int_V [(\rho_s \bar{\xi}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \bar{\xi} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}] dV.$$

Pochodna materialna tej energii, po uwzględnieniu równań ciągłości (2.2b), wyraża się jak następuje:

$$(3.6) \quad \dot{\mathcal{K}} = \int_V \left[(\varrho - \bar{\varrho}) \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \bar{\varrho} \frac{D\mathbf{w}}{Dt} \cdot \mathbf{w} \right] dV.$$

Moc mechaniczna jest równa mocy sił powierzchniowych i mocy sił masowych:

$$(3.7) \quad \dot{\mathcal{L}} = \int_a (\mathbf{t}^s \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}^f \cdot \mathbf{w}) d\alpha + \int_V \left[(\varrho - \bar{\varrho}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \bar{\varrho} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \right] dV.$$

Wektory naprężenia w szkieletcie i cieczy uwięzionej \mathbf{t}^s oraz w cieczy swobodnej \mathbf{t}^f , zgodnie z formułą Cauchy, wyrażają się jak następuje:

$$(3.8) \quad \mathbf{t}^s = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}^f = \bar{p} \mathbf{n}.$$

Podstawiamy zależności (3.8) do (3.7) i dokonujemy zamiany całek powierzchniowych na objętościowe. Następnie, wykorzystując równania ruchu (2.3), otrzymujemy:

$$(3.9) \quad \dot{\mathcal{L}} = \int_V \left[\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} + \bar{p} \operatorname{div} \mathbf{w} + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) + (\varrho - \bar{\varrho}) \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \bar{\varrho} \frac{D\mathbf{w}}{Dt} \cdot \mathbf{w} \right] dV,$$

przy czym:

$$(3.10) \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \right],$$

oznacza tensor prędkości deformacji szkieletu.

Obliczymy jeszcze wyrażenie "div w" z równania ciągłości masy (2.2)₂ przy założeniu, że ściśliwość szkieletu i cieczy jest pomijalnie mała. Mamy więc:

$$(3.11) \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = - \frac{1-f_0}{f} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \cdot \boldsymbol{\eta}.$$

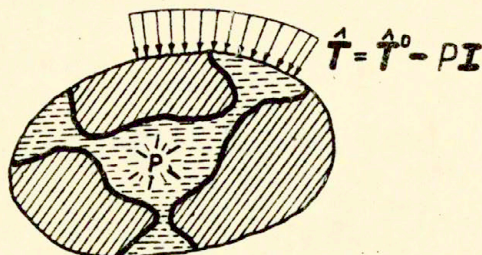
Wyrażenie to podstawiamy do (3.9) i otrzymujemy:

$$(3.12) \quad \dot{\mathcal{L}} = \int_V \left[\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \bar{p} \operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \cdot \boldsymbol{\eta} + (\varrho - \bar{\varrho}) \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \bar{\varrho} \frac{D\mathbf{w}}{Dt} \cdot \mathbf{w} \right] dV,$$

przy czym:

$$(3.13) \quad \bar{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}} + p \mathbf{I}$$

nazywać będziemy, za pracą [6], efektywnym tensorem naprężenia. Celem jego bliższego zinterpretowania rozważmy element ośrodka (rys.2).



Rys.2. Porowaty element ośrodka.

Niech średnie całkowite naprężenie na powierzchni elementu wynosi $\hat{T} = \hat{T}^D - pI$, gdzie \hat{T}^D oznacza dewiator naprężenia, a $(-p)$, jego część kulistą. Wtedy efektywny tensor naprężenia wynosi $T = \hat{T}^D - (p - p)I$, tj. składa się z dewiatora oraz różnicy pomiędzy średnim całkowitym ciśnieniem i rzeczywistym ciśnieniem cieczy w porach.*

Moc niemechaniczna, w ogólnym przypadku, jest równa strumieniowi ciepła q oraz strumieniowi ciepła transportowanego przez masę cieczy, tj.:

$$(3.14) \quad G = - \int_a (q + c^f \psi \eta) \cdot n da$$

gdzie c^f oznacza ciepło właściwe cieczy na jednostkę masy, a $\psi = T - T_0$ temperaturę względną ośrodka.

Zakładamy brak dopływu ciepła przez powierzchnię, a więc $q = 0$. Przyjęliśmy też jednorodny rozkład temperatury w ośrodku,

*Analizując znaczenie efektywnego tensora naprężenia przy porowatości zdejmującej do zera, należy jednocześnie wziąć pod uwagę warunki brzegowe.

co w konsekwencji oznacza, że $\text{grad } \psi = 0$. Dopływ energii niemechanicznej do "układu" mógłby więc wynikać ze zmiany zawartości w nim masy cieczy, tj.:

$$(3.15) \quad Q = - \int_V \dot{c} \psi \text{div} \mathbf{v} \, dV.$$

Podstawiamy wypisane wyżej składniki energii do równania bilansu i otrzymujemy (piszemy od razu postać lokalną):

$$(3.16) \quad \dot{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \eta \cdot [\text{grad } u_f + p f_p \text{grad} (g_r^f f_p)^{-1}] - \dot{c} \psi \text{div} \mathbf{v}.$$

Wyrażenie w nawiasie prostokątnym po prawej stronie (3.16) jest proporcjonalne do gradientu temperatury, [11], a więc w naszym przypadku równe zero. Ponadto, jak wynika z (3.4), lewa strona wyraża zmiany energii przy stałej masie, tj. dla stałych g_s i g_f . Równania ciągłości masy (2.2) wskazują, że wtedy również $\text{div} \mathbf{v}$ musi być równa zero. A zatem, lokalna postać bilansu energii w naszym przypadku ma ostatecznie postać:

$$(3.17) \quad \dot{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

Zmiany energii wewnętrznej, jak widać, wynikają z mocy mechanicznej efektywnego tensora naprężenia na prędkości odkształceń szkieletu oraz mocy sił interakcji na prędkościach względnych.

Dokonyjemy rozdzielenia tensora prędkości deformacji (3.10) na część sprężystą \mathbf{D}^e i plastyczną \mathbf{D}^p :

$$(3.18) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$$

i skorzystamy z równania Gibbsa {[21], str. 112}:

$$(3.19) \quad T \dot{S} = \dot{U} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^e,$$

gdzie T oznacza temperaturę absolutną, a S entropię.

Wstawiając równanie bilansu energii (3.17) do równania Gibbsa otrzymamy:

$$(3.20) \quad T \dot{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

Całkowita entropia S składa się z części S_e , która jest wymieniana z otoczeniem i części S_i , związanej z procesami wewnętrznymi. W naszym przypadku, wskutek założenia o równomiernym rozkładzie temperatury oraz matematycznego warunku, że zmiany energii \dot{U} , a na podstawie (3.19), także zmiany entropii liczone są przy stałej masie, brak jest entropii wymienianej z otoczeniem, tj. $\dot{S}_e \equiv 0$. Zatem, zgodnie z drugą zasadą termodynamiki, wyrażenie (3.20) musi być większe od zera, tj.:

$$(3.21) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \geq 0$$

Konsekwencje wynikające z tego ograniczenia przeanalizujemy w następnym punkcie.

4. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Założymy, że odkształcenia sprężyste są małe, co w konsekwencji pozwala przyjąć, że tensor prędkości deformacji \mathbf{D}^e jest równy pochodnej czasowej tensora odkształceń sprężystych \mathbf{E}^e :

$$(4.1) \quad \mathbf{D}^e \approx \dot{\mathbf{E}}^e.$$

Dokonamy przekształcenia Legendre'a na równaniu (3.19), wyrażając je za pomocą funkcji energii swobodnej Helmholtza F :

$$(4.2) \quad \dot{F} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e - S\dot{T} = \dot{F}(\mathbf{E}^e, T) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{E}^e} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T}.$$

Widzimy, że funkcja energii swobodnej zależy jedynie od odkształceń sprężystych i temperatury, a nie zależy od odkształceń plastycznych i zmiennych, opisujących ruch cieczy. Fakt ten możemy zinterpretować następująco. Dysypacja energii, wskutek plastycznych deformacji i przepływu cieczy lepkiej, wywołuje wzrost temperatury. Zatem ten wzrost temperatury jest odzwierciedleniem zachodzących w ośrodku procesów nieodwracalnych. Przyjęcie postulatu Gibbsa wydaje się więc uzasadnione dla rozważanego w tej pracy ośrodka i zachodzących w nim procesów.

Z zależności (4.2) wynikają następujące równania stanu:

$$(4.3a) \quad \mathbf{T} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{E}^e},$$

$$(4.3b) \quad S = - \frac{\partial F}{\partial T}.$$

Aby wyspecyfikować związki fizyczne dla deformacji sprężystych, rozwijamy funkcję energii swobodnej w szereg Taylora w sąsiedztwie stanu niezdeformowanego mechanicznie. Jako, że zmienne są infinitezymalne, pominiemy w rozwinięciu wyrazy szeregu rzędu większego niż drugi. Ponadto, ponieważ ośrodek jest izotropowy, funkcja F musi spełniać warunki niezmienniczości względem każdego przekształcenia ortogonalnego. Zatem F musi dać się wyrazić jako funkcja niezmienników tensora odkształcenia i temperatury tj.:

$$(4.4) \quad F = F(I_1, I_2, T),$$

gdzie

$$I_1 = \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I} \quad , \quad I_2 = \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^e.$$

Otrzymujemy więc:

$$(4.5) \quad F(I_1, I_2, T) = F(0, 0, T) + \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_1} I_1 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial I_1^2} I_1^2 + \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_2} I_2.$$

Geometryczne przedstawienie wzoru (4.5) w przestrzeni $\{F, I_1, I_2\}$ sugeruje następującą interpretację mechaniczną pochodnych:

$$(4.6) \quad N = \frac{\partial F(0, 0, T)}{\partial I_2} \quad - \quad \text{moduł ścinania dla porowatego ośrodka,}$$

$$\Lambda = \frac{\partial^2 F(0, 0, T)}{\partial I_1^2} \quad - \quad \text{moduł zmian objętościowych porowatego ośrodka.}$$

Na podstawie (4.3a) i (4.5) otrzymujemy:

$$(4.7) \quad \mathbf{T} = 2N \mathbf{E}^e + \left[\Lambda (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}_1} \right] \mathbf{I}.$$

W stanie nieobciążonym mechanicznie, deformacje mogą wystąpić pod wpływem temperatury:

$$(4.8) \quad (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I})|_{\mathbf{T}=0} = - \frac{1}{2N + \Lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}_1} = 3\alpha_T \psi,$$

gdzie $\psi = T - T_0$ jest temperaturą względną (odniesioną do temperatury stanu naturalnego T_0), a α_T oznacza współczynnik liniowej termicznej rozszerzalności ośrodka.

Na podstawie (4.8) mamy:

$$(4.9) \quad - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}_1} = \delta_T \psi, \quad \delta_T = (2N + 3\Lambda) \alpha_T.$$

Funkcję $F(0,0,T)$ określimy ze znanej zależności pomiędzy ciepłem właściwym a entropią {por.np. [10]}:

$$(4.10) \quad c_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_v,$$

przy czym c_v jest ciepłem właściwym ośrodka przy stałej objętości. Po dwukrotnym całkowaniu równania (4.10) względem temperatury otrzymujemy:

$$(4.11) \quad F(0,0,T) = -c_v \left(T \ln \frac{T}{T_0} - \psi \right).$$

Przy całkowaniu założono, że w rozważanym zakresie temperatur $c_v = \text{const.}$

Obecnie funkcje stanu możemy zapisać w postaci jawnej, a więc:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} F &= N \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^e + \frac{1}{2} \Lambda (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I})^2 - \delta_T \psi (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I}) - c_v \left(T \ln \frac{T}{T_0} - \psi \right), \\ S &= \delta_T (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I}) + c_v \ln \frac{T}{T_0}, \\ U &= N \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^e + \frac{1}{2} \Lambda (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I})^2 + \delta_T (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I}) T_0 + c_v \psi. \end{aligned}$$

Związek fizyczny w zakresie sprężystym ma ostatecznie postać:

$$(4.13) \quad \mathbf{T} = 2N \mathbf{E}^e + [\wedge \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{I} - \gamma_T \psi] \mathbf{I}.$$

Obliczając pochodną czasową entropii (4.12)₂ i wstawiając ją do równania (3.20), otrzymujemy równanie opisujące zmiany temperatury:

$$(4.14) \quad c_V \dot{T} + \gamma_T (\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{D}) T = D,$$

przy czym $D = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^P + f(\mathbf{w} - \mathbf{v})$ oznacza funkcję energii dysypowanej.

Nierówność (3.21) jest spełniona podczas obciążania, natomiast podczas odciążania, przy którym $\mathbf{D}^P = 0$, mamy:

$$(4.15) \quad f(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \geq 0.$$

Stąd wnioskujemy, zakładając liniowość, następującą prostą postać sił interakcji:

$$(4.16) \quad \mathbf{f} = b(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \quad b > 0.$$

Postać ta jest oczywiście warunkiem dostatecznym, a nie koniecznym dla spełnienia nierówności (4.15).

Warto zauważyć, że drugie z równań ruchu (2.3), po wstawieniu (4.16) i po pominięciu sił masowych i sił energii, prowadzi do równania Darcy:

$$(4.17) \quad \text{grad } \bar{p} = b(\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

Współczynnik b oznacza tu stałą Darcy.

W przypadku, gdy w rozważanym ośrodku nie występuje ruch względny, nierówność (3.21) przy obciążaniu ma postać:

$$(4.18) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^P > 0.$$

Deformacje plastyczne określamy, wykorzystując znaną koncepcję plastycznego płynięcia. Zakładamy, że powierzchnia płynięcia

jest gładką powierzchnią drugiego stopnia w przestrzeni naprężeń zależną od stanu dewiatorowego i kulistego stanu naprężenia.

Jeśli sprzężenie pomiędzy stanem dewiatorowym i kulistym jest pominięte, to plastyczny potencjał ϕ może być wyrażony w postaci:

$$(4.19) \quad 2\phi = \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D + \alpha^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I})^2 - K^2,$$

gdzie α i K są stałymi zależnymi od porowatości. Są one określone w następnym punkcie. Stowarzyszone prawa płynięcia wyraża się więc następująco:

$$(4.20) \quad \mathbf{D}^P = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}} = \lambda [\mathbf{T}^D + \alpha^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}],$$

przy czym

$$(4.21a) \quad \phi = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} < 0$$

jest warunkiem odciążenia od stanu plastycznego, a

$$(4.21b) \quad \phi = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 0$$

jest warunkiem obciążenia dla idealnie plastycznego ośrodka. Podstawiając (4.20) do (4.18) otrzymujemy:

$$(4.22) \quad \frac{1}{\lambda} [(\mathbf{D}^P)^D \cdot (\mathbf{D}^P)^D + \left(\frac{\mathbf{D}^P \cdot \mathbf{I}}{3\alpha}\right)^2] = \lambda K^2 \geq 0$$

gdzie $(\mathbf{D}^P)^D$ jest dewiatorem tensora \mathbf{D}^P .

Na podstawie (4.22) stwierdzamy, że parametr λ jest nieujemny. Wyrażamy go za pomocą tensora prędkości deformacji:

$$(4.23) \quad \lambda = \left[(\mathbf{D}^P)^D \cdot (\mathbf{D}^P)^D + \left(\frac{\mathbf{D}^P \cdot \mathbf{I}}{3\alpha}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} / K$$

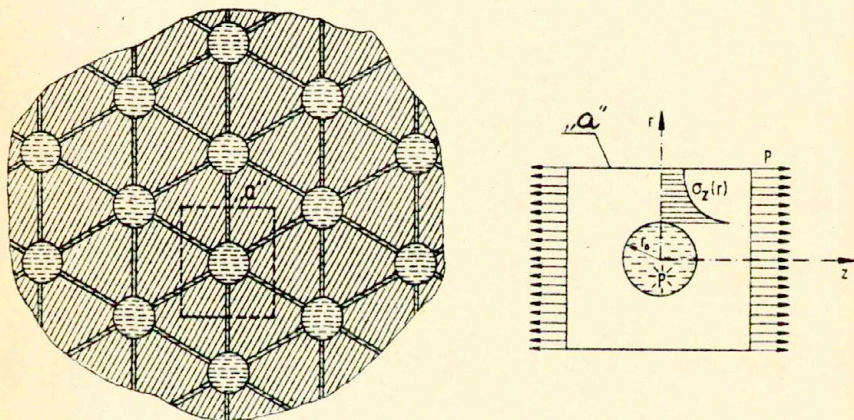
Prawa płynięcia (4.20) możemy obecnie przepisać w postaci:

$$(4.24) \quad \frac{\mathbf{D}^P}{\left[(\mathbf{D}^P)^D \cdot (\mathbf{D}^P)^D + \left(\frac{\mathbf{D}^P \cdot \mathbf{I}}{3\alpha}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = [\mathbf{T}^D + \alpha^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I})] / K,$$

przy czym: $\mathbf{D}^P = (\mathbf{D}^P)^D + \frac{1}{3}(\mathbf{D}^P \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$.

5. IDENTYFIKACJA WSPÓŁCZYNNIKÓW α i K

Celem określenia współczynników α i K , wykorzystamy sposób podobny do tego, jaki zaproponował GREEN, [13], a mianowicie zbadamy warunek uplastycznienia pojedynczego "elementu" ośrodka porowatego zawierającego ciecz (rys.3). GREEN określał te współczynniki dla sztywno-idealnie plastycznego ośrodka z pustymi porami. Tutaj rozważać będziemy sprężysto-idealnie plastyczny ośrodek porowaty, w którego porach znajduje się ciecz.



Rys.3. Ośrodek porowaty wypełniony cieczą.

Wyobraźmy sobie najpierw pewien jednorodny element ośrodka stałego, poddanego rozciąganiu, którego stan naprężenia określony jest następującym tensorem:

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}P & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{3} \end{bmatrix}$$

Ten jednorodny stan zostanie zakłócony, gdy w wyciętym myślowo elemencie umieścimy jakąś pustkę (por). Wtedy stan naprężenia (5.1) może być traktowany jedynie jako stan średni dla tego elementu. Dla ułatwienia obliczeń zakładamy, że por ma kształt kulisty (rys.3). Pominiemy więc geometryczne nieregularności i oddziaływanie innych porów na zachowanie się rozważanego elementu. W obliczeniach pomijając też będziemy sieć kanalików łączących drożne pory, aczkolwiek zakładamy, że ciśnienie w porach może się zmieniać niezależnie od deformacji elementu.

a. Uplastycznienie elementu spowodowane sferycznym stanem naprężenia

Założmy, że element poddany jest tylko obciążeniu kulistemu. Równanie równowagi we współrzędnych sferycznych wynosi:

$$(5.2) \quad \frac{dG_r}{dr} + \frac{2}{r} (G_r - G_\theta) = 0,$$

gdzie r jest współrzędną promieniową, G_r i G_θ są odpowiednio promieniowym i obwodowym naprężeniem.

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe dla naprężeń:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} G_r &= \frac{P}{3} & \text{gdy } r &\rightarrow \infty, \\ G_r &= -p & \text{gdy } r &= r_0, \end{aligned}$$

gdzie r_0 oznacza promień pory.

Jeśli odkształcenia plastyczne nie występują, to rozkład naprężeń w porowatym elemencie przedstawia się następująco:

$$(5.4) \quad \sigma_r(r) = \frac{p}{3} - \left(\frac{p}{3} + p\right) \frac{r_0^3}{r^3},$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{p}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{3} + p\right) \frac{r_0^3}{r^3}.$$

Jeśli naprężenia σ_r i σ_θ spełniają warunek (warunek plastyczności Misesa przy sferycznej symetrii):

$$(5.5) \quad \sigma_\theta - \sigma_r = Y,$$

gdzie Y oznacza granicę plastyczności dla materiału szkieletu przy rozciąganiu, wtedy w elemencie pojawiają się plastyczne deformacje.

Niech r_p oznacza promień obszaru plastycznego. Wtedy w obszarze sprężystym $r > r_p$ mamy:

$$(5.6) \quad \sigma_r(r) = \frac{p}{3} - \frac{2}{3} Y \frac{r_p^3}{r^3},$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{p}{3} + \frac{1}{3} Y \frac{r_p^3}{r^3},$$

natomiast w obszarze plastycznym $r_0 \leq r \leq r_p$, rozkład naprężeń wynosi:

$$(5.7) \quad \sigma_r(r) = -p + 2Y \ln \frac{r}{r_0},$$

$$\sigma_\theta(r) = -p + Y \left(1 + 2 \ln \frac{r}{r_0}\right).$$

Z warunku zgodności naprężeń na granicy obszaru plastycznego i sprężystego znajdujemy wzór określający promień obszaru plastycznego:

$$(5.8) \quad r_p = r_0 \exp \left[\frac{\left(\frac{p}{3} + p\right) - \frac{2}{3} Y}{2Y} \right].$$

Niech średni promień elementu porowatego, zdefiniowany za pomocą

porowatości f_v , wynosi:

$$(5.9) \quad r_1 = r_0 \sqrt[3]{f_v} .$$

Jeśli r_p zdąży do r_1 , to ze wzoru (5.8) znajdujemy obciążenie, które powoduje uplastycznienie porowatego elementu:

$$(5.10) \quad P + 3p = 2Y \ln \frac{e}{f_v} ,$$

przy czym e oznacza tu podstawę logarytmu naturalnego.

Dla modelu sztywno-idealnie plastycznego wzór (5.10) ma postać:

$$(5.10a) \quad P + 3p = 2Y \ln \frac{1}{f_v} ,$$

Widzimy, że dla porowatości malejącej do zera obciążenie, potrzebne do uplastycznienia elementu zdąży do nieskończoności. Ponieważ $P + 3p$ jest tutaj adekwatne pierwszemu niezmiennikowi efektywnego tensora \mathbf{T} , możemy więc napisać:

$$(5.11) \quad Y_0 = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}}{2 \ln \frac{e}{f_v}} .$$

Wzór (5.11) określa wielkość obciążenia powodującego uplastycznienie elementu porowatego w przypadku, gdy nie występuje stan dewiatorowy.

b. Uplastycznienie elementu spowodowane dewiatorowym stanem naprężenia

Gdy część kulista tensora (5.1) jest zerowa, to element porowaty jest pod działaniem dewiatorowego stanu naprężenia z osiową symetrią.

Niech z , r i θ stanowią cylindryczny układ współrzędnych z początkiem umieszczonym w środku pory. Równania równowagi w tym przypadku są:

$$(5.12) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 ,$$

$$(5.12) \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 .$$

Plastyczne deformacje pojawiają się przede wszystkim w przekroju o minimalnym polu powierzchni, tj. dla $z = 0$ (rys.3). Dla tego przekroju obowiązują następujące warunki:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 && \text{dla dowolnego } r, \\ \sigma_{rz} \Big|_{z=0} &= 0 && \text{dla dowolnego } r, \\ \sigma_r \Big|_{r=r_0} &= -p, \\ \sigma_r \Big|_{r \rightarrow \infty} &= -\frac{p}{3}. \end{aligned}$$

Z powyższych czterech warunków, pierwsze dwa wynikają z symetrii problemu względem płaszczyzny $z = 0$, trzeci jest warunkiem na powierzchni pory, a czwarty wynika z (5.1). Ponadto, jak łatwo sprawdzić:

$$(5.14) \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{R(r)},$$

gdzie R jest promieniem krzywizny kierunków głównych w przekroju minimalnym.

Równanie (5.12) dla $z = 0$ redukuje się do postaci:

$$(5.15) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_z - \sigma_r}{R(r)} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Określimy najpierw sprężyste deformacje. Niech u_r oznacza przemieszczenia promieniowe, a e_r , e_θ , e_z odkształcenia promieniowe, obwodowe i podłużne. Odkształcenia te wyrażają się za pomocą przemieszczenia u_r :

$$(5.16) \quad e_r = \frac{du_r}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad e_z = -(e_r + e_\theta) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_r),$$

przy czym w (5.16) wykorzystano fakt, że dla stanu dewiatorowego

$$\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 0.$$

Na podstawie (5.15) otrzymujemy:

$$(5.17) \quad R(r) = \frac{e_z - e_r}{\frac{de_z}{dr}} = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{\frac{d\sigma_z}{dr}}.$$

Widzimy, że dla $\sigma_z(r)|_{z=0} = \text{const}$ promień R jest nieskończony, tzn. linie kierunków głównych są prostymi. Wiadomym jest jednakże, że rozkład naprężeń w rozciąganej próbce z karbem nie jest równomierny w całym przekroju. Rozkład tych naprężeń, zilustrowany na rys.3b, może być dobrze opisany równaniem postaci:

$$(5.18) \quad \sigma_z(r) = \frac{A}{r^n} + \frac{2}{3}P,$$

przy czym A i n są stałymi. Stałą A określamy uśredniając $\sigma_z(r)$ w przekroju $z = 0$. Zakładając $n > 2$ otrzymujemy:

$$(5.19) \quad A = \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{3}P + p \right) r_0^n.$$

Stałą n określimy później. Rozkład naprężeń w elemencie, gdy występują tylko sprężyste deformacje, przedstawia się następująco:

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r) &= \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{3}P + p \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^n + \frac{2}{3}P, \\ \sigma_r(r) &= \frac{n-1}{2} \left(\frac{2}{3}P + p \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^n + \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{2}{3}P + p \right) - 3p \right] \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{P}{3}, \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}P + p \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^n - \frac{1}{2} \left[n \frac{2}{3}P + p - 3p \right] \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{P}{3}. \end{aligned}$$

W chwili, gdy stan naprężenia osiąga warunek uplastycznienia, w elemencie występuje strefa plastyczna i sprężysta. W strefie plastycznej prędkości odkształceń są jednorodne, [13], co prowadzi do zależności:

$$(5.21) \quad \sigma_r = \sigma_\theta.$$

Warunek plastyczności Misesa przyjmuje więc postać:

$$(5.22) \quad \sigma_z - \sigma_r = Y .$$

Wykorzystując warunek zgodności naprężeń na powierzchni rozgraniczającej strefę sprężystą i plastyczną, $r = r_p$, znajdujemy następujący rozkład naprężeń w strefie sprężystej, $r_p \leq r$:

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r) &= \frac{2}{3}(Y - P)\left(\frac{r_p}{r}\right)^n + \frac{2}{3}P , \\ \sigma_r(r) &= \frac{Y-P}{\frac{2}{3}(n-2)} \left[-2(n-1)\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 + n\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \right] - \frac{P}{3} , \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{Y-P}{\frac{2}{3}(n-2)} \left[2\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 - n\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \right] - \frac{P}{3} . \end{aligned}$$

Z równania (5.17) znajdujemy promień krzywizny R na powierzchni granicznej od strony obszaru sprężystego:

$$(5.24) \quad R(r_p) = - \frac{Y}{\frac{2}{3}(Y - P)n} r_p .$$

Dla obszaru plastycznego, $r_0 \leq r \leq r_p$, przyjmujemy:

$$(5.25) \quad R(r) = \frac{Y}{\frac{2}{3}(Y - P)n} r .$$

W obszarze plastycznym mamy więc następujący rozkład naprężeń:

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \sigma_r(r) = \sigma_\theta(r) &= -p - \frac{2}{3}(Y - P)n \ln \frac{r}{r_0} , \\ \sigma_z(r) &= Y - p - \frac{2}{3}(Y - P)n \ln \frac{r}{r_0} . \end{aligned}$$

Z warunku zgodności naprężeń na powierzchni granicznej określamy promień strefy plastycznej:

$$(5.27) \quad r_p = r_0 \exp \left[\frac{\frac{Y}{3} - p}{\frac{2}{3}(Y - P)n} \right] .$$

Uśrednimy naprężenie $\sigma_z(r)$ w przekroju minimalnym, zakładając $r_p = r_1$ (por. (5.9)):

$$\frac{2}{3} P \pi \xi^2 = \int_0^{\xi} 2\pi r (-p) dr + \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r \left[(Y-p) - \frac{2}{3} (Y-p) n \ln \frac{r}{r_0} \right] dr + \\ + \int_{r_1}^{\xi} 2\pi r \left[\frac{2}{3} (Y-p) \left(\frac{r-1}{r} \right)^n + \frac{2}{3} P \right] dr ,$$

przy czym ξ jest pewnym promieniem, większym od r_1 .

Po scałkowaniu i przejściu z ξ do nieskończoności, przy założeniu $n > 2$ i wykorzystaniu (5.27), otrzymujemy:

$$(5.28) \quad \frac{P}{Y} = \beta ; \quad \beta = \frac{n^2 - (n-2)(n+3)f_v^{\frac{2}{3}}}{n^2 - n(n-2)f_v^{\frac{2}{3}}} .$$

$P^2/3$ odpowiada drugiemu niezmiennikowi dewiatora średniego tensora naprężeń, tj.:

$$(5.29) \quad P^2 \sim 3J'_2 = \frac{3}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D .$$

Na podstawie (5.28) i (5.29) możemy więc napisać:

$$(5.30) \quad Y_D^2 = \frac{3J'_2}{\beta^2} .$$

Wzór (5.30) wyraża warunek uplastycznienia elementu porowatego dewiatorowym stanem naprężenia.

W ogólnym przypadku, gdy jednocześnie występuje dewiatorowy i kulisty stan naprężenia, powierzchnia płynięcia powinna być gładką powierzchnią drugiego rzędu (elipsoidą) w przestrzeni naprężeń. Na podstawie (5.11) i (5.30) możemy napisać:

$$(5.31) \quad \frac{3}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D + \gamma^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I})^2 = \beta^2 Y^2 ,$$

gdzie:

$$(5.32) \quad \beta = \frac{n^2 - (n-2)(n+3)f_v^{\frac{2}{3}}}{n^2 - n(n-2)f_v^{\frac{2}{3}}} , \quad \gamma = \beta/2 \ln(e/f_v) .$$

Obecnie, współczynniki α i K występujące w (4.19), mogą być zidentyfikowane jako:

$$(5.33) \quad \alpha^2 = \frac{2}{3} \gamma^2, \quad K^2 = \frac{2}{3} \beta^2 Y^2.$$

Aby określić współczynnik n , rozpatrzmy prosty przykład pręta porowatego pod działaniem jednoosiowego stanu naprężenia, przy ciśnieniu cieczy $p = 0$. Niech Y^* będzie naprężeniem działającym wzdłuż osi pręta. Wzór (5.31) dla takiego stanu redukuje się do postaci:

$$(5.34) \quad Y^* = \beta Y / \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

Gdy porowatość zdąży do jedności, wartość obciążenia Y^* , powodującego uplastycznienie pręta, powinna zdążyć do zera. Warunek ten będzie spełniony, jeśli:

$$(5.35) \quad \bar{n} = 6.$$

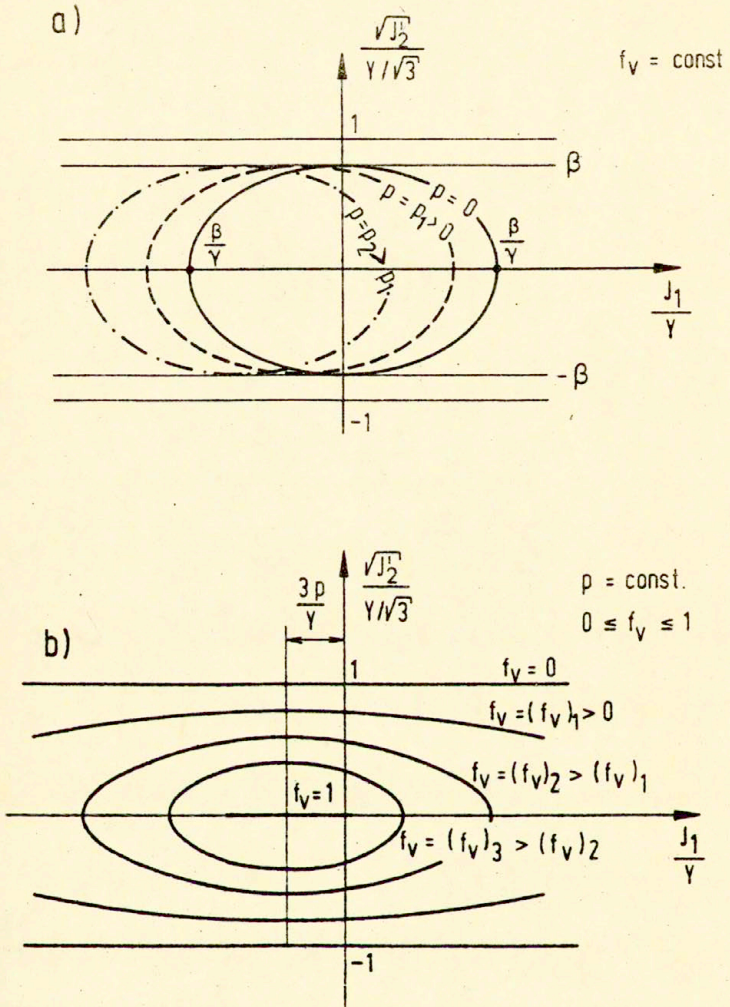
Współczynnik β obecnie wyraża się jak następuje:

$$(5.36) \quad \beta = \frac{3(1-f_v^{\frac{3}{4}})}{3-2f_v^{\frac{3}{4}}}, \quad \gamma = \beta/2 \ln(e/f_v).$$

Analogiczne współczynniki określone przez GREENA, [13], w nieco inny sposób wynoszą:

$$(5.37) \quad \beta = \frac{3(1-f_v^{\frac{3}{4}})}{3-2f_v^{\frac{3}{4}}}, \quad \gamma = \beta/2 \ln(1/f_v).$$

Widzimy, że współczynniki (5.36) i (5.37) są jakościowo podobne. SHIMA i OYANE, [23], określali te współczynniki eksperymentalnie dla sproszkowanych metali, takich jak żelazo, aluminium i miedź. Rys.4 jest graficzną ilustracją warunku uplastycznienia (5.31). Rys.4a przedstawia powierzchnię płynięcia dla różnych ciśnień cieczy p przy stałej porowatości f_v , a rys.4b dla różnych porowatości przy stałym ciśnieniu. Na rys.4a widzimy, że powierzchnia płynięcia przemieszcza się w przestrzeni naprężeń, zachowując swój rozmiar i orientację. Zatem ciecz konsoliduje ośrodek



Rys.4. Przekrój powierzchni płynięcia

ze wzrostem ciśnienia p . Jest to zjawisko typowe dla wzmocnienia kinematycznego, [21]. Na rys.4b widzimy, że wpływ kulistego naprężenia na uplastycznienie ośrodka maleje przy zmniejszającej się porowatości.

6. ZESTAWIENIE RÓWNAŃ. WARUNKI BRZEGOWE

Dla jasności, zestawimy wielkości niewiadome oraz równania służące do ich wyznaczenia. Wielkościami niewiadomymi w prezentowanej teorii są:

1. sześć współrzędnych tensora naprężenia $\bar{\mathbf{T}}$,
2. ciśnienie cieczy p ,
3. aktualna porowatość objętościowa f_v ,
4. aktualna porowatość powierzchniowa f_p ,
5. trzy współrzędne wektora prędkości szkieletu \mathbf{v} ,
6. trzy współrzędne wektora prędkości cieczy \mathbf{w} ,
7. temperatura względna ϑ .

Całkowita liczba niewiadomych wynosi 16. Do ich wyznaczenia mamy do dyspozycji 16 następujących równań:

1. sześć równań ruchu:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} + \left[\mathcal{G}_R^S (1-f_v) + \mathcal{G}_R^f (f_v - f_p) \right] \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} + b(\mathbf{w} - \mathbf{v}) &= 0, \\ \operatorname{grad}(-pf_p) + \mathcal{G}_R^f f_p \left(\mathbf{b} - \frac{D\mathbf{w}}{Dt} \right) - b(\mathbf{w} - \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned}$$

2. dwa równania wynikające z równań ciągłości masy (2.2), a opisujące ewolucję zmian porowatości:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \dot{f}_v &= (1-f_v) \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \left[\mathbf{v} + f_p (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \right] &= 0, \end{aligned}$$

3. sześć związków fizycznych:

$$(6.3) \quad \frac{1}{2} \left[\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \right] = \frac{\dot{\mathbf{T}}^D}{2N} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{I}}{2N+3\lambda} + 3\alpha_T \dot{\vartheta} \right) \mathbf{I} + \lambda \left[\mathbf{T}^D + \alpha^2 (\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \right],$$

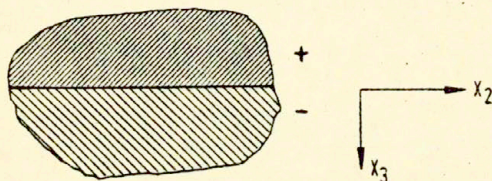
przy czym:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{I} + 3(1-f_p)P, \quad \mathbf{T}^D = \bar{\mathbf{T}} - \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I},$$

4. równanie ciepła (4.14),

5. warunek plastyczności (5.31).

Wypisane równania uzupełniamy odpowiednim zestawem warunków brzegowych. Powierzchnia brzegowa jest powierzchnią nieciągłości. Niech nią będzie powierzchnia rozgraniczająca dwa ośrodki porowate, mające różne porowatości (rys.5). Warunki na tej powierzchni nieciągłości, stanowiące jednocześnie ogólną postać warunków brzegowych, są następujące, [16],:



Rys.5. Powierzchnia nieciągłości na granicy dwóch ośrodków porowatych.

- strumień masy cieczy swobodnej musi być ciągły:

$$(6.4) \quad [|\eta|] \mathbf{n} = 0,$$

- nieciągłość ciśnienia lub porowatości powierzchniowej powoduje nieciągłość prędkości cieczy:

$$(6.5) \quad [|\text{pf}_p|] \mathbf{n} = \eta \cdot \mathbf{n} [|\mathbf{w}|],$$

- zachodzi warunek zgodności sił działających na szkielet:

$$(6.6) \quad [|\bar{\mathbf{T}}|] \mathbf{n} = 0,$$

przy czym $[j_a] = a^+ - a^-$, a \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym na powierzchni nieciągłości. Nie zawsze możliwe jest bezpośrednio określenie sił działających na poszczególne składniki. Zawsze możliwe jest jednak określenie całkowitej średniej siły na jednostkę powierzchni $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{n}$ oraz ciśnienia cieczy p i porowatości powierzchniowej f_p na powierzchni. Wtedy parcjalny tensor $\bar{\mathbf{T}}$ w szkielecie określamy pośrednio jako:

$$(6.7) \quad \bar{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}} + pf_p \mathbf{I} .$$

Dla temperatury żąda się jedynie warunku początkowego, gdyż z założenia rozkład temperatury jest równomierny w całym obszarze.

L I T E R A T U R A

- [1] BERG, C.A.: Plastic dilatation and void interaction, Inelastic Behavior of Solids, Mc Graw Hill Book, Comp. (171 - 209), 1970.
- [2] de BOER, R., KOWALSKI, S.J.: A plasticity theory for fluid-saturated porous solids, Int.J.Engng.Sci.(w druku).
- [3] BRIDGMAN, P.W.: Studies in large plastic flow and fracture, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, Toronto, London. 1952.
- [4] CARROLL, M.M., HOLT, A.C.: Suggested modification of the $P - \alpha$ model for porous materials, J.Appl.Phys.Vol.43, No.2, 1972.
- [5] CARROLL, M.M., HOLT, A.C.: Static and dynamic pore-collapse relation for ductile porous materials, J.Happl. Phys.Vol.43, No.4, 1972.
- [6] CARROLL, M.M., SCHATZ, J.F., YAMADA, S.E.: On plastic strain in porous materials, J.Appl.Mech.Vol.48, 1981 .
- [7] CRISTESCU, N.: Plasticity of compressible/dilatant rock-like materials, CISM, Seminar on "Plasticity Today", Udine, 1983.
- [8] DAGAN, G.: The generalization of Darcy s nonuniform flows, Water Resources Research, 15, 1, 1979.
- [9] DERSKI, W.: Equations of motions for fluid-saturated porous solids, Bull.Acad.Pol.Sc.Ser.tech.Vol.XXVI, No.1, 1978.
- [10] DERSKI, W., KOWALSKI, S.J.: Equations of linear thermo-consolidation, Archives of Mechanics, 31, 3, 1979.
- [11] DERSKI, W., KOWALSKI, S.J.: On the motion and mass continuity equations in a porous fluid-saturated medium, Studia Geotechnica et Mechanica, No.2, 1980.
- [12] GREEN, A.E., NAGHDI, P.M.: A general theory of an elastic plastic continuum, Arch.Rational Mech.Anal.18, 1965.
- [13] GREEN, R.J.: A plasticity theory for porous solids, Int.J.Mech.Sci.,Vol.14, 1972.
- [14] IZBICKI, R.J., MRÓZ, Z.: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa-Poznań, 1976.
- [15] KOWALSKI, S.J.: Teoretyczny opis porowatych materiałów poddanych działaniu obciążeń statycznych i dynamicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, ser.Mechanika, Nr 22, 1979.

- [16] KOWALSKI, S.J.: Identification of the coefficients in the equations of motion for a fluid-saturated porous medium, *Acta Mechanica* 47, 1983.
- [17] KOWALSKI, S.J.: Application of fluid-saturated porous solids to vibration isolation problems, *Journal of Sound and Vibration*, 66, 4, 577 - 587, 1979.
- [18] MIELNICZUK, J.: Zum ebenen plastischen Fließen der porigen Metalle, *Ingenieur-Archiv* 52, 1982.
- [19] MILOŠKOJIČ, J.B.; Cheatham, R.R.: Theory of plasticity of porous media with fluid flow, *Society of Petroleum Engineers Journal*, 14, 3, 1974.
- [20] PERZYNA, P.: *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa, 1966.
- [21] *Praca zbiorowa: Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa, 1965.
- [22] RICE, J.R., TRACEY, D.M.: On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.17, 1969.
- [23] SHIMA, S., CYANE, M.: Plasticity theory for porous metals, *Int.J.Mechanical Science*, Vol.18, 1976.