Przyczynek do wykładu gieometrji analitycznej.

Początki gieometrji analitycznej nie należą do rzeczy łatwych, gdyż wykład powinien odznaczać się ścisłością naukową, która zresztą jest już zupełnie możliwa w klasie VII, o ile w poprzednim kursie matematyki przygotowaliśmy uczniów do zrozumienia, jak dalece ścisłość jest rzeczą konieczną. Niestety, w praktyce nauczania nieraz popełniamy ciężkie grzechy przeciw ścisłości. Np. znany wzór na odległość

$$d = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

wyprowadzamy dla szczególnego przypadku, w odniesieniu do szczególnego trójkąta prostokątnego, nie zwracając przytym uwagi na dyskusję wzoru, na

---

* Te doświadczenia wykonywał sam Colladon; stanowią one część badań przedsięwziętych wraz ze Sturmem nad ściśliwością wody i były ogłoszone we wspólnej rozprawie obu uczonych. (Annales de chim. et de phys. XXXV, 1828).

zachowanie jego postaci bez względu na to, gdzie i jak zadane są na płaszczyźnie dwa punkty. A jednak taka dyskusja byłaby bardzo potrzebna. Tak samo bardzo często nie mówimy nic uczniom o znanych zależnościach między odcinkami na prostej: $AB+BA=0$ i $AB+BC+CA=0$, jakkolwiek bez nich trudno wykazać ogólność równania prostej $y=mx+n$.

Jeżeli teorja krzywych rzędu 2-go lub wyższych nie da się wyłożyć w szkole średniej z należytą precyzją i ścisłością, to w każdym razie teorję prostej, a więc dyskusję równania $ax+by+c=0$ i układu dwuch takich równań winniśmy podać z całą możliwą dokładnością.

Krzywe wyższych rzędów łączą się bezpośrednio z wykresami pouczającemi, które kształcą pojęcie zależności funkcjonalnej; traktowanie ich w szkole może mieć charakter bardziej doświadczalny, natomiast prosta i koło muszą być przedstawione ściśle. Wyłożę tu w krótkości, w jaki sposób możnaby traktować prostą.

Gdy uczeń zapoznał się z układem spółrzędnych kartezjańskich, należy wykazać, że pewne zagadnienia, znane mu z poprzedniego kursu gieometrji, dadzą się w sposób prosty rozwiązać za pomocą metody spółrzędnych. Ugruntuje to lepiej samą metodę i pomoże do zachowania ciągłości koniecznej w programie nauk. Do takich zagadnień zaliczyłbym znajdowanie pól trójkąta i wielokąta. Da się to zrobić w sposób bardzo prosty, o ile najpierw wyjdziemy z trójkąta, którego jeden wierzchołek leży w początku układu. Otrzymamy wzór $\frac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2)$, jak łatwo się przekonać, będzie zmieniał znak, zależnie od położenia dwuch innych wierzchołków (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Jeżeli więc dla wszelkich możliwych przypadków chcemy otrzymać wzór w powyższej postaci, musimy wprowadzić pojęcie znaku pola, musimy rozpatrywać pola dodatnie i ujemne, zależnie od kierunku obiegu po obwodzie trójkąta. Przechodząc następnie do trójkąta dowolnie położonego względem osi, wykazujemy, że tu sprawa ma się tak samo, że zależnie od porządku, w jakim bierzemy wierzchołki (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), zarówno pole trójkąta jak i wzór ogólny $S=\frac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2+x_2y_3-y_2x_3+x_3y_1-y_3x_1)$ będą zmieniały znak.

Nastręcza się tu szereg ciekawych zadań. Uważajmy np. dwa wierzchołki (x_1, y_1) i (x_2, y_2) za stałe, wierzchołek zaś (x_3, y_3) za zmienny, przyczym wskaźniki jego spółrzędnych możemy opuścić i pisać wprost x, y. Widzimy wtedy, że pole trójkąta z jednej strony prostej wyznaczonej przez dwa stałe wierzchołki ma znak dodatni, z drugiej zaś ujemny, a dla każdego położenia ruchomego wierzchołka na tej prostej $S=0$. Stąd widzimy, że równaniu $(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-y_1x_2=0$ czynią zadość spółrzędne każdego punktu na prostej. Wykażemy teraz, że gdziekolwiek na tej prostej wybraliśmy dwa stałe punkty, równanie pozostaje bez zmiany. Niech będą na naszej prostej (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2) dwa dowolne stałe punkty, nie przystające obydwa jednocześnie do punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Możemy napisać równanie

$$X(Y_1-Y_2)+Y(X_2-X_1)+M_1=0,$$

gdzie $M_1=X_1Y_2-Y_1X_2$. Otóż łatwo dowieść, że równanie to jest identyczne z poprzednim. Rzeczywiście, z podobieństwa odpowiednich trójkątów wnosimy, że

$$(Y_1-Y_2):(y_1-y_2)=(X_2-X_1):(x_2-x_1)=k\neq 0,$$

a więc, uwzględniając, że możemy przyjąć $X=x$ i $Y=y$, będziemy mogli drugie równanie przepisać tak

$$k(y_1 - y_2)x + k(x_2 - x_1)y + M_1 = 0,$$

czyli
$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + \frac{M_1}{k} = 0$$

Lecz zarówno w pierwszym równaniu, jak w ostatnim x i y są spółrzędnemi dowolnego punktu na prostej, zakładając więc chwilowo, że w obu równaniach rozpatrujemy ten sam (zresztą jakikolwiek) punkt na prostej, otrzymujemy $M_1 : k = M$, czyli $L_1 = kM$ gdzie $M = x_1y_2 - y_1x_2$.

Odwrotnie możemy wykazać, że każdemu równaniu $ax + by + c = 0$ odpowiada jedna i tylko jedna prosta. W tym celu przeprowadzamy dyskusję równania, uwzględniając kolejno następujące przypadki

1) $a = c = 0$ lub $b = c = 0$; 2) $a = 0$ lub $b = 0$; 3) $c = 0$; 4) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Konstrukcja prostej w pierwszych trzech przypadkach nie nasuwa żadnych trudności, jak również wykazanie, że istnieje tylko jedna taka prosta. W ostatnim przypadku wykazujemy, że równaniu czynią zadość spółrzędne punktów $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ i $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Przez te punkty przechodzi jedna prosta, a obierając te punkty za stałe, jak powyżej, otrzymamy równanie $-\frac{c}{b}x - \frac{c}{a}y - \frac{c^2}{ab} = 0$, czyli $ax + by + c = 0$, któremu czynią zadość spółrzędne każdego punktu na tej prostej.

W tym ostatnim przypadku możnaby, oczywiście, przejść do formy równania $y = mx + n$, przy dalszych jednak rozważaniach trzebaby koniecznie brać pod uwagę odcinki względne, czego zazwyczaj w wykładzie szkolnym nie robią — z wielką ujmą dla ścisłości i ogólności rozważań.

Sądzę, że taki sposób przedstawienia początków gieometrji analitycznej dobrze byłoby poddać dyskusji. Na razie poprzestanę na tych pierwszych początkach nauki o prostej. *)

L. Z.