Kartezjusz.

Teorja równań*).

Przedewszystkim wiedzcie, że każde równanie może mieć tyle różnych pierwiastków, t. j. tyle wartości niewiadomej, ile ta niewiadoma posiada wymiarów **). Np. przypuśćmy najpierw, że x równa się 2, czyli że $x-2$ równa się niczemu; po-wtóre, że $x=3$ ***), czyli że $x-3=0$. Mnożąc dwa równania $x-2=0$ i $x-3=0$, otrzymamy

$$x^2-5x+6=0\ , \quad \text{czyli}\ x^2=5x-6\ ^{****})\ ;$$

w tym równaniu x ma wartość 2 i jednocześnie wartość 3. Jeśli uczynimy $x-4=0$ i równanie to pomnożymy przez $x^2-5x+6=0$, otrzymamy równanie

$$x^3-9x^2+26x-24=0\ ,$$

w którym x, posiadając trzy wymiary, ma również trzy wartości, mianowicie 2, 3, 4.

Często jednak zdarza się, że niektóre z tych pierwiastków są fałszywe (fausses), czyli mniejsze niż nic. Przypuśćmy np., że x oznacza brak pewnej wielkości równej 5; w takim razie

$$x+5=0\ ,$$

co, pomnożone przez równanie $x^3-9x^2+26x-24=0$, daje

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0\ .$$

---

*) Podajemy pod tym tytułem przekład znacznej części księgi trzeciej dzieła „La Géométrie de René Descartes". Przekładu dokonaliśmy z przedruku wydanego przez Hermanna w Paryżu w 1886 r.

**) Potęgę liczby Descartes nazywa jej wymiarem, mówi tedy o zagadnieniach linjowych, płaskich, bryłowych i „więcej niż bryłowych" (plusque solides), rozumiejąc przez to zagadnienia stopnia pierwszego, drugiego, trzeciego i wyższych.

***) Kartezjusz posługuje się znakiem ∞ jako symbolem równości, pisze więc $x \infty 3$, pomimo że znak = został już dawniej wynaleziony przez Tomasza Harriota z Oksfordu (1560—1621 r.)

****) Kartezjusz ustalił nowoczesny sposób pisania potęg, pomimo to jednak, mając do czynienia z potęgami drugiemi, pisze zazwyczaj xx. Zresztą jeszcze Euler pisze zwykle $ppxx$, ale obok tego x^4.

Równanie to ma cztery pierwiastki, mianowicie trzy prawdziwe 2, 3, 4 i jeden fałszywy 5.

Z powyższego widać, iż suma równania *), posiadającego kilka pierwiastków, jest zawsze podzielna przez dwumian, utworzony z niewiadomej mniej wartość któregokolwiek pierwiastka prawdziwego, albo też z niewiadomej więcej wartość jednego z pierwiastków fałszywych. Przez takie dzielenie obniżamy wymiar równania.

Odwrotnie: jeżeli suma równania nie jest podzielna przez dwumian, utworzony z niewiadomej, do której dodaliśmy lub odjęliśmy jakąś liczbę, w takim razie owa liczba nie jest wartością żadnego pierwiastka równania. Np. równanie $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ daje się podzielić przez $x-2$, przez $x-3$, przez $x-4$ i przez $x+5$, nie daje się natomiast podzielić przez $x+$ albo $-$ jakakolwiek inna liczba, co dowodzi, że równanie nasze może mieć tylko cztery pierwiastki 2, 3, 4, 5.

Stąd również można poznać, ile może być w jakimś równaniu pierwiastków prawdziwych, ile zaś fałszywych. Mianowicie pierwiastków prawdziwych może być tyle, ile razy zachodzi zmiana znaków $+$ i $-$, fałszywych zaś tyle, ile razy dwa znaki $+$ albo dwa znaki $-$ następują po sobie. Np. w naszym równaniu po $+x^4$ mamy $-4x^3$, t. j. mamy jedną zmianę znaku $+$ na $-$; po $-19x^2$ mamy $+106x$, po $+106x$ mamy -120, co daje jeszcze dwie zmiany znaku, wnosimy tedy, że równanie ma trzy pierwiastki prawdziwe i jeden fałszywy, gdyż w wyrazach $-4x^3$ i $-19x^2$ dwa znaki $-$ następują po sobie.

Łatwo też uczynić w równaniu tak, by wszystkie pierwiastki, które były prawdziwe, stały się fałszywemi, wszystkie zaś fałszywe — prawdziwemi; trzeba mianowicie zmienić znaki $+$ lub $-$ na miejscach drugim, czwartym, szóstym i t. d., wogóle na miejscach mających numery parzyste, pozostawić zaś bez zmiany znaki na miejscach pierwszym, trzecim, piątym, wogóle na miejscach, oznaczonych numerami nieparzystemi. Jeżeli np. zamiast

$$+x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

napiszemy

$$+x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0\ ,$$

otrzymamy równanie, które posiada jeden tylko pierwiastek prawdziwy 5, trzy zaś fałszywe 2, 3, 4.

Jeżeli, nie znając wartości pierwiastków równania, chcemy je zwiększyć lub zmniejszyć o pewną liczbę znaną, wystarczy zamiast danej niewiadomej wziąć inną, większą od niej lub mniejszą o tę liczbę, i nową niewiadomą wstawić na miejsce poprzedniej.

Chcąc np. zwiększyć o 3 pierwiastek równania $x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$, bierzemy y zamiast x i przypuszczamy, że y jest o 3 większe od x, tak iż $y-3=x$. Zamiast x^2 wypadnie wziąć kwadrat (liczby) $y-3$, t. j. y^2-6y+9; zamiast x^3 wstawimy sześcian, czyli $y^3-9y^2+27y-27$; wreszcie

*) t. j. wielomian, stanowiący część lewą równania

zamiast x^4 wstawimy kwadrat kwadratu, czyli $y^4-12y^3+54y^2-108y+81$. W ten sposób, pisząc wszędzie y zamiast x, będziemy mieli

$$\begin{array}{r} y^4-12y^3+54y^2-108y+81 \\ +4y^3-36y^2+108y-108 \\ -19y^2+114y-171 \\ -106y+318 \\ -120 \\ \hline y^4-8y^3-y^2+8y+*=0\text{*)} \end{array}$$

czyli $y^3-8y^2-y+8=0$;

w równaniu tym pierwotny pierwiastek 5 stał się równym 8.

Chcąc przeciwnie zmniejszyć o 3 pierwiastek tego samego równania, musimy uczynić $y+3=x$, a więc $y^2+6y+9=x^2$ i t. d. Zamiast tedy równania

$$x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0,$$

mamy

$$\begin{array}{r} y^4+12y^3+54y^2+108y+81 \\ +4y^3+36y^2+108y+108 \\ -19y^2-114y-171 \\ -106y-318 \\ -120 \\ \hline y^4+16y^3+71y^2-4y-420=0. \end{array}$$

Należy zauważyć, że zwiększając pierwiastki prawdziwe równania, zmniejszamy jednocześnie fałszywe o taką samą liczbę, zmniejszając zaś prawdziwe, powiększamy fałszywe. Jeżeli zmniejszamy jakiekolwiek pierwiastki (prawdziwe czy fałszywe) o liczbę równą im, stają się one żadnemi**); jeżeli zwiększymy je o liczbę, która je przewyższa, staną się one z prawdziwych fałszywemi, z fałszywych zaś prawdziwemi. W poprzednim przykładzie zwiększyliśmy o 3 pierwiastek prawdziwy równania 5, i przez to samo zmniejszyliśmy o 3 każdy fałszywy pierwiastek, tak iż ten, który równał się 4, obecnie zaledwie równa się 1; ten, który był równy 3, stał się żadnym, ten zaś, który równał się 2, stał się prawdziwym i równa się 1, gdyż $-2+3$ daje $+1$. Wskutek tego w równaniu

$$y^3-8y^2-y+8=0$$

mamy tylko trzy pierwiastki; z nich dwa prawdziwe (1 i 8), jeden zaś fałszywy, który również jest 1. W równaniu

$$y^4+16y^3+71y^2-4y-420=0$$

---

*) Brak wyrazu w równaniu Descartes zaznacza zawsze gwiazdką; w dalszym ciągu gwiazdkę tę będziemy zawsze opuszczali.

**) Autor powiada: n u l l e s, czego jednak nie tłumaczymy: „równe zeru“, gdyż autor nie traktuje jeszcze wyraźnie zera jako liczby i nie uważa zera za pierwiastek równania.

mamy jeden tylko prawdziwy pierwiastek 2 (gdyż $+5-3$ daje $+2$), trzy zaś fałszywe 5, 6 i 7.

Dzięki temu, że, nie znając pierwiastków, możemy zmieniać ich wartości, można osiągnąć dwie rzeczy, które w dalszym ciągu będą miały pewne zastosowanie. Po-pierwsze, możemy zawsze usunąć drugi wyraz równania; w tym celu zmniejszamy pierwiastki prawdziwe o liczbę znaną tego drugiego wyrazu, podzieloną przez liczbę wymiarów pierwszego wyrazu, jeżeli jeden z tych wyrazów ma znak $+$, drugi zaś $-$. Gdyby oba wyrazy miały znak $+$ lub $-$, wypadłoby pierwiastki prawdziwe zwiększyć o taką samą liczbę. Przypuśćmy np., że chcę usunąć drugi wyraz równania $y^4+16y^3+ +71y^2-4y-420=0$. Dzielę 16 przez 4, ze względu na czwarty wymiar wyrazu y^4; otrzymuję 4. Wobec tego kładę $z-4=y$ i piszę

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 & -16z^3 & +96z^2 & -256z & +256 \\
 & +16z^3 & -192z^2 & +768z & -1024 \\
 & & +71z^2 & -568z & +1136 \\
 & & & -4z & +16 \\
 & & & & -420 \\
\hline
z^4 & & -25z^2 & -60z & -36=0\,.
\end{array}$$

W równaniu tym pierwiastek prawdziwy, który równał się 2, stał się równy 6, gdyż został zwiększony o 4, fałszywe zaś, które równały się 5, 6 i 7, obecnie równają się 1, 2 i 3, zmniejszyliśmy je bowiem wszystkie o 4.

Tak samo, chcąc usunąć wyraz drugi w równaniu

$$x^4-2ax^3+(2a^2-c^2)\,x^2-2a^3x+a^4=0\,,$$

dzielimy $2a$ przez 4, otrzymujemy $\frac{a}{2}$; kładziemy więc $z+\frac{a}{2}=x$. *)

. . . .

Drugie spostrzeżenie, które w dalszym ciągu będziemy stosowali, jest następujące: zwiększając wartości pierwiastków o liczbę większą od każdego z pierwiastków fałszywych, możemy uczynić wszystkie pierwiastki prawdziwemi (nigdzie tedy w równaniu dwa znaki $+$, ani dwa znaki $-$ nie będą po sobie następowały), a prócz tego wielkość znaną w wyrazie trzecim możemy uczynić większą od kwadratu połowy wielkości znanej w wyrazie drugim. Jakkolwiek bowiem owych pierwiastków fałszywych nie znamy, możemy jednak mniej więcej zdać sobie sprawę z ich wielkości i wybrać liczbę o tyle większą od nich, ile potrzeba, lub nawet jeszcze większą. Weźmy np. równanie

$$x^6+nx^5-6n^2x^4+36n^3x^3-216n^4x^2+1296n^5x-7776n^6=0\;;$$

---

*) Szczegółowy rachunek opuszczamy.

kładąc $y-6n=x$, mamy

$$
\begin{array}{llllll}
\left.\begin{array}{r} y^6-36n \\ +n \end{array}\right\} &
\left.\begin{array}{r} y^5+540n^2 \\ -30n^2 \\ -6n^2 \end{array}\right\} &
\left.\begin{array}{r} y^4-4320n^3 \\ +360n^3 \\ +144n^3 \\ +36n^3 \end{array}\right\} &
\left.\begin{array}{r} y^3+19440n^4 \\ -2160n^4 \\ -1296n^4 \\ -648n^4 \\ -216n^4 \end{array}\right\} &
\left.\begin{array}{r} y^2-46656n^5 \\ +6480n^5 \\ +5184n^5 \\ +3888n^5 \\ +2592n^5 \\ +1296n^5 \end{array}\right\} &
\begin{array}{r} y+46656n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \end{array}
\end{array}
$$

$$y^6-35ny^5 \quad +504n^2y^4 \quad -3780n^3y^3 \quad +15120n^4y^2 \quad -27216n^5y \quad =0\ .$$

Rzecz oczywista, że $504n^2$, t. j. wielkość znana w wyrazie trzecim, jest większa od kwadratu liczby $\frac{35n}{2}$, t. j. od kwadratu połowy wielkości znanej w wyrazie drugim.

. . . .

Nie znając wartości pierwiastków prawdziwych równania, można je wszystkie pomnożyć lub podzielić przez dowolną liczbę znaną. W tym celu przypuszczamy, że niewiadoma, pomnożona lub podzielona przez liczbę, przez którą chcemy pomnożyć lub podzielić pierwiastki, równa się pewnej innej liczbie; następnie mnożymy lub dzielimy wielkość znaną drugiego wyrazu przez liczbę, przez którą chcemy pomnożyć lub podzielić pierwiastki; wielkość znaną trzeciego wyrazu mnożymy przez kwadrat tej samej liczby, i t. d. aż do ostatniego wyrazu. W ten sposób możemy z wyrazów równania usunąć ułamki lub liczby głuche (nombres sourds) *), zastępując je całkowitemi i wymiernemi.

Weźmy np. równanie

$$x^3-\sqrt{3}\,x^2+\frac{26}{27}\,x-\frac{8}{27\sqrt{3}}=0\ .$$

Chcąc zastąpić je równaniem, w którym wszystkie wyrazy byłyby wymierne, musimy założyć $y=x\sqrt{3}$ i pomnożyć przez $\sqrt{3}$ wielkość znaną wyrazu drugiego, przez 3—wielkości znaną wyrazu trzeciego, i przez $3\sqrt{3}$—wielkość znaną ostatniego wyrazu, co daje

$$y^3-3y^2+\frac{26}{9}\,y-\frac{8}{9}=0\ .$$

Gdybyśmy chcieli zastąpić to równanie jeszcze innym, w którym wielkości znane wyrażałyby się li tylko liczbami całkowitemi, wypadłoby założyć $z=3y$..... Mielibyśmy równanie

$$z^3-9z^2+26z-24=0\ ,$$

*) t. j. niewymierne; Anglicy dziś jeszcze nazywają niewymierne wyrażenia surds. W dalszym ciągu będziemy pisali: niewymierne.

którego pierwiastkami są 2, 3, 4, zatym pierwiastkami poprzedniego są liczby $^2/_3$, 1, $^4/_3$, pierwiastkami zaś pierwszego

$$\tfrac{2}{9}\sqrt{3}\ ,\ \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\ ,\ \tfrac{4}{9}\sqrt{3}\ .$$

Przez takie postępowanie możemy również wielkość znaną któregokolwiek wyrazu równania uczynić równą dowolnej liczbie. Dajmy na to, iż równanie

$$x^3 - b^2x + c^3 = 0$$

chcemy zastąpić innym, w którym wielkość znana w wyrazie trzecim, t. j. b^2, byłaby równa $3a^2$. W tym celu kładziemy $y = x\sqrt{\frac{3a^2}{b^2}}$, skąd wypływa, że

$$y^3 - 3a^2y + 3\frac{a^2c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0\ .$$

Zresztą zarówno pierwiastki prawdziwe, jak fałszywe nie zawsze bywają rzeczywiste; przeciwnie, nieraz bywają urojone. Innemi słowami: w każdym równaniu możemy pomyśleć tyle pierwiastków, ile mówiłem, czasem jednak żadna liczba nie odpowiada takiemu pierwiastkowi. Np. możemy pomyśleć trzy pierwiastki w równaniu

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0\ ,$$

a jednak ma ono jeden tylko pierwiastek rzeczywisty 2, drugie zaś dwa, choćbyśmy je nie wiedzieć jak zmniejszali lub zwiększali, pozostaną zawsze urojonemi.

Jeżeli przy rozwiązaniu jakiegoś zagadnienia konstrukcyjnego dochodzimy do równania, w którym niewiadoma ma trzy wymiary, należy przedewszystkim wielkości znane wyrazów, o ile sa ułamkami, zastąpić przez liczby całkowite za pomocą mnożenia, któreśmy poprzednio wyjaśnili; o ile zawierają one liczby niewymierne, należy je zastąpić wymiernemi bądź za pomocą mnożenia, bądź innemi sposobami, łatwemi do znalezienia. Następnie badamy po kolei wszystkie czynniki ostatniego wyrazu, czy który z nich, będąc połączony znakiem + lub — z niewiadomą, nie daje dwumianu, przez który podzielić można sumę równania. Jeżeli tak jest, zagadnienie nasze jest płaskie, t. j. konstrukcję można wykonać za pomocą cyrklu i linjału*).

. . . .

Jeżeli jednak nie znajdziemy żadnego dwumianu, przez który możnaby w ten sposób podzielić całą sumę danego równania, wówczas jest rzeczą

*) Autor uczy dalej na przykładach, jak należy dzielić wielomian przez wielomian.

pewną, że odpowiednie zagadnienie jest bryłowe*). Wobec tego chcieć wykonać konstrukcję takiego zadania li tylko za pomocą kół i prostych byłoby równie wielkim błędem, jak stosowanie przecięć stożkowych tam, gdzie wystarcza koło, gdyż błędem nazywamy wszystko, co świadczy o pewnym nieuctwie**).

. . . .

Jeżeli jednak dwumianu takiego znaleźć nie możemy, usuwamy drugi wyraz równania sposobem poprzednio objaśnionym, poczym równanie sprowadzamy do innego, mającego tylko trzy wymiary. Czynimy to w następujący sposób: zamiast równania

$$+x^4 \ldots\ldots px^2 \ldots\ldots qx \ldots\ldots r = 0 \ ,$$

piszemy
$$+y^6 \ldots\ldots 2py^4 + (p^2 \ldots\ldots 4r)y^2 - q^2 = 0 \ .$$

Co się tyczy opuszczonych przezemnie znaków + i —, to, o ile w pierwszym równaniu mieliśmy $+p$, trzeba w drugim napisać $+2p$, gdyby zaś w pierwszym było $-p$, trzebaby w drugim napisać $-2p$. Jeżeli w pierwszym równaniu mieliśmy $+r$, musimy w drugim napisać $-4r$, jeżeli zaś mieliśmy $-r$, musimy w drugim równaniu napisać $+4r$. Bez względu zaś na to, czy mieliśmy $+q$ czy $-q$, piszemy w drugim równaniu zawsze $-q^2$ i $+q^2$ oczywiście w założeniu, że x^4 i y^6 mają znak +; gdyby niewiadome miały znak —, wypadłoby postąpić wprost przeciwnie.

Np. zamiast równania $+x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$

piszemy $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. ***)

. . . .

Sprowadziwszy w ten sposób równanie do trzech wymiarów, szukamy wartości y^2, stosując wyłuszczoną poprzednio metodę. Jeżeli się to nam nie udaje, nie potrzebujemy dalej trudzić się, gdyż stąd niechybnie wynika, że zagadnienie jest bryłowe. Jeżeli zaś wartość taką znajdziemy, możemy za jej pomocą rozszczepić nasze równanie na dwa inne, z których każde będzie zawierało niewiadomą w drugim wymiarze, przyczym pierwiastki ich będą te same co w równaniu pierwotnym. Mianowicie

zamiast
$$+x^4 \ldots\ldots px^2 \ldots\ldots qx \ldots\ldots r = 0$$

piszemy
$$+x^2 - yx + \tfrac{1}{2}y^2 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p \ldots\ldots \frac{q}{2y} = 0 \ ,$$

oraz
$$x^2 + yx + \tfrac{1}{2}y^2 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p \ldots\ldots \frac{q}{2y} = 0 \ .$$

---

*) Dowodu na to autor nie podaje, poprzestając (w innym ustępie) na dość mętnym rozumowaniu takiej, mniej więcej, treści: zagadnienia 3-go stopnia sprowadzają się do wyznaczenia dwuch punktów, dzielących łuk na trzy równe części, oraz do wyznaczenia dwuch średnich proporcjonalnych; otóż krzywizna koła zależy tylko od jednego warunku, zatym koło nadaje się do wyznaczenia jednego tylko punktu; przeciwnie, krzywizna stożkowych zależy od dwuch warunków, a więc stożkowe dają rozwiązanie żądane.

**) Descartes rozważa następnie równanie 4-go stopnia, przyczym postępowanie jest, oczywiście, takie, jak przy równaniu 3-go stop., o ile lewa część równania jest podzielna przez odpowiedni dwumian.

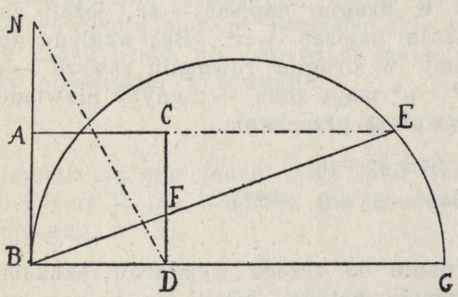
***) Opuszczamy inne przykłady, podane w oryginale.

Co się tyczy znaków $+$ i $-$, które tu opuściłem, piszemy $+\frac{1}{2}p$ w obu ostatnich równaniach, jeżeli w pierwszym mamy $+p$, przeciwnie zaś $-\frac{1}{2}p$, jeżeli w pierwszym mcmy $-p$. Dalej, jeżeli w pierwszym równaniu mamy $+q$, piszemy $+\frac{q}{2y}$ w tym równaniu, które zawiera wyraz $-yx$, przeciwnie zaś $-\frac{q}{2y}$ w tym, które zawiera wyraz $+yx$.

W taki sposób znajdziemy z łatwością wszystkie pierwiastki równania danego, rozwiążemy tedy odpowiednie zagadnienie konstrukcyjne, posługując się tylko kołami i prostemi *).

. . . .

Np. niech będzie dany kwadrat AD (rys. 1) i odcinek BN; przypuśćmy że trzeba przedłużyć bok AC do takiego punktu E, żeby $EF=NB$. Z P a p p u s a **) wiemy, że trzeba przedłużyć BD do takiego punktu G, żeby $DG=DN$, następnie trzeba wykreślić koło na BG jako na średnicy i przedłużyć bok AC do przecięcia z okręgiem w punkcie E. Kto nie zna tej konstrukcji, znajdzie ją z trudnością i, szukając metodą przez nas proponowaną, nie domyśli się obrać DG za niewiadomą — raczej obierze CF albo FD, przez co łatwiej otrzyma równanie. Otóż z równaniem tym trudno daś sobie rady, jeśli się nie zna reguły przez nas podanej.



Rys. 1.

Jakoż oznaczmy BD albo CD przez a, EF przez c, DF przez x; zatym $CF=a-x$, że zaś CF ma się do FE jak FD do BF, więc $BF=\frac{cx}{a-x}$. Z trójkąta prostokątnego BDF, którego boki są x i a, wynika, że $x^2+a^2=$ kwadratowi podstawy czyli $\frac{c^2x^2}{x^2-2ax+a^2}$. Mnożąc całe równanie przez $x^2-2ax+a^2$,

otrzymujemy $$x^4-2ax^3+2a^2x^2-2a^3x+a^4=c^2x^2\ ,$$

czyli $$x^4-2ax^3+(2a^2-c^2)x^2-2a^3x+a^4=0\ .$$

---

*) Rzecz jasna, że bieg myśli Descartesa trzeba odwrócić. Wychodząc z założenia, że lewa część równania $x^4+px^2+qx+r=0$ da się rozłożyć na dwa czynniki $(x^2+Ax+B)\,(x^2+A'x+B')$, otrzymamy

$$A+A'=0\ ,\quad B+B'+AA'=p\ ;\quad AB'+A'B=q\ ;\quad BB'=r\ ,$$ a stąd wynika, że

$$A^6+2pA^4+(p^2-4r)A^2-q^2=0$$ (t. zw. r e z o l w e n t a, albo r o z w i ą z u j ą c a).

**) P a p p i A l e x a n d r i n i Collectiones, liber VII, problema IV, propositio LXXII.

Na mocy reguł poprzednio wyłuszczonych znajdujemy, że pierwiastek tego równania, czyli długość odcinka DF, równa się

$$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2}}\,.$$

Biorąc za niewiadomą BF, albo EC, albo wreszcie BE, doszlibyśmy znów do równania o czterech wymiarach, które byłoby dość łatwe do otrzymania, a do rozwiązania łatwiejsze od poprzedniego. Biorąc DG za niewiadomą, daleko trudniej otrzymać równanie, ale zato równanie jest bardzo proste. Mówię o tym, żeby zwrócić uwagę waszą, że gdy w zagadnieniu, które nie jest bryłowe, na jednej jakiejś drodze dochodzimy do równania bardzo złożonego, możemy zazwyczaj otrzymać na innej drodze równanie o wiele prostsze *).

. . . .

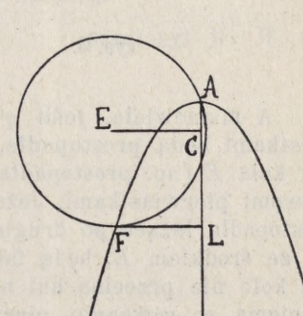
Jeżeli jesteśmy pewni, że zagadnienie dane jest bryłowe, to — bez względu na to, czy odpowiednie równanie jest stopnia 3-go czy 4-go — możemy zawsze znaleść jego pierwiastki za pomocą któregokolwiek z trzech przecięć stożkowych, a nawet za pomocą dowolnie małego łuku takiego przecięcia, posługując się poza tym tylko prostemi i kołami. Poprzestanę na podaniu reguły ogólnej, na mocy której znaleść można pierwiastki za pomocą paroboli, gdyż krzywa ta jest niejako najprostsza ze stożkowych.

Przedewszystkim należy usunąć wyraz drugi danego nam równania, sprowadzając je do kształtu $z^3 = \ldots\ldots apz \ldots\ldots a^2q$, jeżeli niewiadoma ma trzy wymiary, lub też do kształtu $z^4 = \ldots\ldots apz^2 \ldots\ldots a^2qz \ldots\ldots a^3r$, jeżeli niewiadoma ma cztery wymiary.

Biorąc wreszcie $a=1$, sprowadzamy równania

bądź do kształtu $z^3 = \ldots\ldots pz \ldots\ldots q$,

bądź też do kształtu $z^4 = \ldots\ldots pz^2 \ldots\ldots qz \ldots\ldots r$.



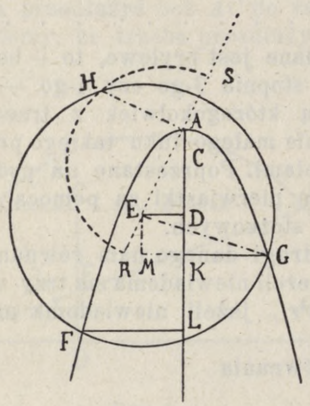
Rys. 2.

Przypuszczamy następnie, że mamy wykreśloną parabolę FA (rys. 2 i 3), której osią jest prosta AL, że bok prosty **) paraboli $=a$, czyli $=1$, że AC jest połową a, punkt A wierzchołkiem paraboli i że punkt C leży wewnątrz paraboli. Odkładamy $CD=\frac{p}{2}$, przytym odkładamy go z tej samej strony punktu C, z której leży A, jeżeli w równaniu mamy $+p$, z przeciwnej zaś strony, jeżeli mamy $-p$. W punkcie D (lub też w punkcie C, jeżeli $p=0$, jak na rys. 2) wystawiamy prostopadłą $DE=\frac{q}{2}$, poczym z E, jako ze środka, wykreślamy koło promieniem AE, jeżeli równanie jest sześcienne, t. j. jeżeli $r=0$. Jeżeli, przeciwnie, w równaniu mamy wyraz

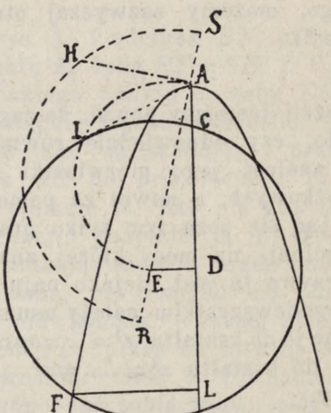
---

*) Opuszczamy ustęp dotyczący zagadnień stopnia wyższego niż czwarty.
**) t. j. latus rectum, prostopadła wystawiona w ognisku paraboli.

$+r$ (rys. 3), powinniśmy na przedłużeniu AE wziąć z jednej strony punktu A odcinek $AR=r$, z drugiej zaś $AS=a=1$, na RS jako na średnicy wykreślić koło, wreszcie poprowadzić AH prostopadle do RS. Prostopadła ta przecina koło RHS w punkcie, przez który powinno przejść koło FHG. O ile mamy w równaniu wyraz $-r$, należy, po znalezieniu odcinka AH, wpisać odcinek $AI=AH$ (rys. 3a) w koło, którego średnicą jest AE; wtedy koło FIG powinno przejść przez punkt I. Otóż to koło FG może dotykać paraboli lub przecinać ją w jednym, dwuch, trzech lub czterech punktach; prowadząc z tych punktów prostopadłe do osi, otrzymamy wszystkie pierwiastki równania—zarówno prawdziwe, jak fałszywe.



rys. 3.



rys. 3a.

A mianowicie, jeśli q oznaczone jest znakiem $+$, prawdziwemi pierwiastkami będą prostopadłe, leżące po tej samej stronie osi paraboli, co środek koła E (np. prostopadła FL), inne zaś, jak prostopadła GK, będą fałszywemi pierwiastkami. Jeżeli, przeciwnie, q ma znak —, prawdziwemi będą prostopadłe leżące po drugiej stronie osi, te zaś, które leżą po jednej stronie ze środkiem E, będą fałszywemi czyli mniejszemi niż nic. Nareszcie, jeżeli koło nie przecina ani nie dotyka paraboli w żadnym punkcie, dowód to, że niema w równaniu pierwiastków prawdziwych ani fałszywych, lecz że wszystkie są urojone. W ten sposób reguła nasza jest tak ogólna i doskonała, jak tylko można sobie życzyć.

Dowód tej reguły jest bardzo prosty. Oznaczmy przez z odcinek GK, znaleziony w ten sposób. $AK=z^2$, gdyż w paraboli GK jest średnią proporcjonalną między AK i bokiem prostym, który $=1$. Odejmując od AK odcinek $AC=\frac{1}{2}$ i $CD=\frac{p}{2}$, otrzymuje $DK=EM=z^2-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}$, którego kwadratem jest

$$z^4-pz^2-z^2+\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4};$$

że zaś $DE=KM=\frac{q}{2}$, $GM=z+\frac{q}{2}$, kwadrat zaś tego odcinka równa się $z^2+qz+\frac{q^2}{4}$. Dodając te dwa kwadraty, mamy

$$z^4-pz^2+qz+\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4},$$

czyli kwadrat odcinka GE, który jest podstawą trójkąta prostokątnego EMG.

Ponieważ ten sam odcinek EG jest promieniem koła FG, możemy przedstawić go jeszcze inaczej. Mianowicie $ED=\frac{q}{2}$; $AD=\frac{p}{2}+\frac{1}{2}$; $AE=\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}}$, gdyż kąt ADE jest prosty; ponieważ dalej AH jest średnią proporcjonalną między $AS=1$ i $AR=r$, więc $AH=\sqrt{r}$, że zaś kąt EAH jest prosty, więc kwadrat HE, czyli kwadrat EG jest równy

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+\frac{1}{4}+r.$$

Zachodzi tedy równość między tą sumą a poprzednią, czyli że

$$z^4=pz^2-qz+r,$$

a więc odcinek GK, który oznaczyliśmy przez z, jest pierwiastkiem danego równania.

c. b. d. o.

Stosując ten sam rachunek do innych przypadków naszej reguły (zmieniając tylko wedle potrzeby znaki $+$ i $-$), otrzymacie sami odpowiedni wynik, nie potrzebuję tedy zatrzymywać się nad tą sprawą.

przełożył *W. W.*