SUR L'ÉQUIVALENCE DES POLYÈDRES

Note complémentaire par M. Henri Lebesgue, Paris

Sous le même titre j'ai démontré, dans ces Annales, t. XVII, année 1938, p. 218, un théorème de M. Dehn. Je disais:

„Nous sommes partis de deux polyèdres, ou systèmes de polyèdres, D et D', divisés respectivement en polyèdres d_i et d'_i congruents; nous avons considéré un segment s_n d'une arête de l'un des d_i pris aussi grand que possible sans qu'il contienne un sommet des d_i à son intérieur et, à ce segment de longueur σ_n, nous avons attaché la somme Σ_n des diètres α_p des d_i qu'on rencontre en tournant autour de s_n. Or, on a:

$$(1) \qquad \Sigma_n = A_k, \quad 2\pi, \quad \pi;$$

suivant les cas". Puis, considérant toutes les expressions (2) des longueurs l_h et L_k des arêtes des d_i et de D, exprimées comme sommes de σ_n, j'imaginais qu'on les ait résolues par rapport aux σ_n et obtenu ainsi des expressions (3) des σ_n comme sommes algébriques des l_h et L_k. Mais, j'ai eu le tort de me borner à affirmer la possibilité de cette résolution sans en détailler la démonstration, simple mais minutieuse, et je n'ai pas aperçu qu'avec la définition donnée plus haut la résolution serait parfois impossible. Il faut modifier la définition des s_n et des σ_n en ajoutant: *toutefois, si plusieurs segments donnent la même équation* (1) *c'est la réunion de ces segments qu'on appellera s_n et c'est la somme de leurs longueurs qu'on représentera par σ_n.*

Pour montrer qu'après cette modification les relations (3) existent bien, précisons que, par une même équation, on entend celle formée avec les mêmes symboles α et A pris différents pour les divers dièdres, qu'ils soient inégaux ou égaux. Même, s'il arrivait que deux faces aient toutes deux les segments AB et CD de la ligne d'intersection de leurs plans pour cotés,

AB et CD seraient considérés comme deux arêtes différentes de deux dièdres différents, même si ceux-ci, limités par les mêmes demi-plans, étaient géométriquement identiques. Alors, si deux segments donnent une même équation (1), soit E_1, tous les a ou A contenus dans cette équation doivent aussi figurer dans les équations E_2 relatives aux segments intermédiaires, les seconds membres des E_2 doivent donc être plus grands que celui de E_1; celui-ci ne doit donc pas être un A, car alors il ne pourrait varier, ni être 2π, car alors il ne pourrait pas croître. C'est donc pour les seuls seconds membres égaux à π que s_n peut comprendre plusieurs segments.

Soit az un segment de droite, pris aussi grand que possible couvert par des arêtes des d_i et soient $a, b, \ldots, y, z$ les points origines et extrémités de ces arêtes — ce ne sont donc pas tous les sommets des d_i qui peuvent être sur az. Nous avons des équations $E(ab), E(bc), \ldots$; deux équations consécutives sont certainement différentes car, en employant les signes contient $\supset$ et contenu dans $\subset$ et des notations telles que $a(ab)$, $dm(ab)$ pour désigner les a relatifs à ab et le deuxième membre de $E(ab)$ on n'a, en b par exemple, que les hypothèses suivantes:

1⁰ $a(ab) \supset a(bc)$ $dm(ab) > dm(bc)$; b est extrémité d'un l_h;

2⁰ $a(ab) \subset a(bc)$ $dm(ab) < dm(bc)$; b est origine d'un l_h;

3⁰ aucune des deux précédentes hypothèses n'est remplie; b est à la fois origine et extrémité d'un l_h. Dans le cas 1⁰, ou a) $dm(bc)$ est un A, ou b) $dm(ab) = \pi$; dans le premier de ces sous-cas, 1⁰ a), b est origine d'un L_k. De même dans 2⁰, ou a) $dm(ab)$ est un A, ou b) $dm(ab) = \pi$, et, dans 2⁰ a), b est extrémité d'un L_k. Donc, si, par exemple, fg est le premier segment pour lequel $dm = \pi$, les segments précédents sont chacun un s_n et les distances ab, ac, ad, ae, af sont des sommes de l et L puisque b, c, d, e, f sont à la fois origines et extrémités d'arêtes des d_i ou de D. Il en résulte que les σ_n égaux à ab, bc, cd, de, ef sont des sommes algébriques de l et L affectés des coefficients $+1$ ou -1. L'équation $E(fg)$ peut aussi être attachée à d'autres segments que fg; supposons la aussi attachée à lm, et à pq et seulement à ces trois segments qui formeront donc un s_n, soit s_ν. Les $a(fg) = a(lm) = a(pq)$ sont donc contenus dans tous les a des segments intermédiaires et peut-être dans d'autres, soit jusqu'à $\alpha(rs)$. s sera donc l'extrémité d'un l dont l'origine sera le point f ou antérieur au point f. Donc as est une somme de l et L. Pour chacun des segments gh, hi, ij, jk, kl; mn, no, op; qr, rs, le dm surpasse π, donc chacun de ces segments est un s_n. Pour comparer les $\alpha(hi)$ et $\alpha(ij)$, par exemple, il n'y a pas lieu de s'occuper des $\alpha(fg)$ qui sont communs aux deux familles de dièdres et par suite on est ramené au cas précédent, c'est à dire que h, i, j, k, l sont extrémités d'arêtes des d_i ou de D dont les origines ne sont pas en deça de g et que g, h, i, j, k sont origines d'arêtes des d_i ou de D dont les extrémités ne sont pas au delà de k. A l'aide des l_i et L_i correspondant à ces arêtes on a les longueurs σ de gh, hi, ij, jk, kl. De même se calculent les longueurs σ de mn, no, op et celles de qr et rs.

σ_ν seul n'a pas été calculé; mais la somme de tous les σ jusqu'ici considérés est la quantité connue as, d'où σ_ν. Si, de plus, on remarque que c'est seulement dans le calcul de rs qu'interviennent des l et L qui se trouvent dans l'expression de as on en conclut encore que, dans les expressions (3) obtenues, les coefficients des l et L sont $+1$ et -1, ou naturellement zéro; remarque d'ailleurs accessoire.

Le raisonnement se poursuit de la même façon; la lacune que comportait mon exposé, et dont je suis seul responsable, est ainsi comblée.