Anfangsgründe

der

endlichen Differenzen

mit besonderer Berücksichtigung ihrer

forstwissenschaftlichen Anwendungen

von

Prof. Ritter Francesco Piccioli

Director des k. Forstinstitutes zu Vallombrosa.

Uebersetzung aus dem Italienischen

von

Emil Meeraus und **Agostino Lunardoni.**

WIEN.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1881.

Vorwort.

In der „Allgemeinen Forst- und Jagdzeitung", herausgegeben von Dr. Lorey und Dr. Lehr, im fünfundfünfzigsten Jahrgange, Seite 166—167, lasen wir folgende Recension des in deutscher Uebersetzung vorliegenden Originalwerkchens des Herrn Prof. Piccioli.

„In Bezug auf Inhalt und Art der Durchführung sei bemerkt, dass sich alle Entwicklungen durch grosse Einfachheit und Klarheit auszeichnen. Wir bedauern, dass das Buch nicht in deutscher Uebersetzung vorliegt und somit wohl den meisten deutschen Forstleuten nicht zugänglich ist. Denn dasselbe gibt Alles, was auf dem fraglichen Gebiete zu wissen nothwendig ist, in einer, wie gesagt, überaus fasslichen Darstellung; es zeigt zugleich an der Behandlung einiger forstlichen Fragen (Zuwachs der Bestände etc.) die Art der directen Anwendung. Insbesondere ist auf die hohe Wichtigkeit von Interpolationen auf dem Gebiete der Taxation und Statik hingewiesen."

Die warme Anerkennung, die dieses Werk bei allgemein geachteten Blättern gefunden, sowie der vielfach ausgesprochene Wunsch, dasselbe durch Uebersetzung einem deutschen Leserkreise zugänglich zu machen, war die Veranlassung, dass wir uns dieser Arbeit unterzogen haben. Wir hoffen hiemit den deutschen forstlichen Fachgenossen einen Dienst erwiesen zu haben.

Wien, im Mai 1881.

Emil Meeraus und **Agostino Lunardoni.**

Inhalt.

Erster Theil.

Lehre von den bestimmten Differenzen.

Zweiter Theil.

Die umgekehrte Rechnung von den Differenzen.

Erster Theil.

Lehre von den bestimmten Differenzen.

§. I. Allgemeine Kenntnisse der Functionen und deren Differenzen.

Man nennt eine Grösse Function einer andern, wenn deren Werth gleichzeitig mit jenem der Function wechselt und von einem Gesetze abhängt, das bekannt oder unbekannt sein kann. Unter den Grössen, die eine Function bilden, unterscheidet man „variable“ und „constante“ Grössen; erstere können beliebige Werthe annehmen, letztere dagegen behalten immer denselben Werth bei. Nehmen wir also an, wir hätten zwei Grössen x und y, welche durch die Relation

$$y = 3x + 2$$

verbunden sind, so fällt uns sofort auf, dass die Art ihres Variirens verschieden ist. Den Werthen 0, 1, 2, 3, 4... von x entspricht die Reihe der Werthe 2, 5, 8, 11, 14... von y. Sind die Werthe von x bestimmte, so sind es auch jene von y. Man unterscheidet daher „unabhängige“ und „abhängige“ Variable. Die unabhängige Variable ist jene, die, willkürliche Werthe annehmend, die zweite bestimmt. Letztere nimmt dann auch den Namen „Function“ an. Wir werden im Allgemeinen die unabhängige Variable mit x und die Function mit y bezeichnen, so dass die Grösse y in den Gleichungen

$$y = (x + 1)^2, \quad y = sin x, \quad y = log x$$

die Function und x die unabhängige Variable darstellt. Die Form dieser Gleichungen drückt aber auch die Art ihres gegenseitigen Zusammenhanges, das heisst die Natur der Functionen aus.

Um eine Function auszudrücken, gebraucht man gewöhnlich die Buchstaben $F, f, \varphi, \psi, \ldots$, hinter welchen man in Klammern die unabhängige Variable anschliesst. Deshalb bedeutet die Gleichung

$$y = F(x), \tag{1}$$

dass man vermittelst gewisser Rechnungsoperationen, die man der Allgemeinheit halber unbestimmt lässt, für einen bestimmten Werth von x den entsprechenden Werth von y finden kann.

Betrachtet man die zwei Variablen einer Gleichung als die Coordinaten einer Curve, so kann man vermittelst dieser Gleichung so viele Punkte der Curve bestimmen, als zur Construction derselben nothwendig sind. Die Continuität der Curve ist das beste Merkmal für jene der Function, und kann deren Verlauf auf den ersten Blick Eigenthümlichkeiten darbieten, die man sonst nur durch eine algebraische Discussion ihrer Gleichung zeigen könnte. Wenn in der Function $y = F(x)$ jedem Werthe der unabhängigen Variablen ein einziger und bestimmter Werth von y entspricht und eine sehr kleine Aenderung im Werthe dieser unabhängigen Variablen eine sehr kleine Aenderung in der Function hervorruft, so nennt man sie eine „continuirliche", im entgegengesetzte Falle eine „discontinuirliche". Die Functionen, die hier in Betracht kommen, beziehen sich alle auf Naturerscheinungen und werden immer continuirliche sein, wenn man das enge Intervalle berücksichtigt, innerhalb dessen sich die Betrachtung bewegt.

Sonach ist es klar, was man unter der Function einer oder mehrerer unabhängiger Variablen zu verstehen habe. Sie ist eine Grösse, die von zwei oder mehreren willkürlichen Variablen abhängt. Z. B. kann man die Gleichung

$$y = x + 3z,$$

in welcher y Function von x und z ist, allgemein durch die Formel

$$y = F(x, z) \tag{2}$$

ausdrücken.

Ist ein Ausdruck Function von drei oder mehr Variablen, so drückt man denselben durch die Formeln

$$y = \varphi(x, z, u), \quad y = \psi(x, y, z, u, v, \ldots) \text{ aus.} \tag{3}$$

Ist eine Function nicht nur von der Variablen x, sondern auch von gewissen constanten Werthen $a, b, c, \ldots$ abhängig, so werden innerhalb der Klammer und hinter den Variablen diese constanten Grössen beigesetzt, z. B.:

$$y = F(x, a, b, c, \ldots), \quad y = F(x, a, b, c, \ldots z), \tag{4}$$

in welcher Gleichung die Buchstaben $a, b, c, \ldots x, z \ldots$, concrete Grössen, wie Längen, Flächen, Volumen etc. bedeuten können.

Wenn wir in einer dieser Gleichungen für den Werth der unabhängigen Variablen einen anderen substituiren, so ändert sich auch der Werth der Function. Es sei der ursprüngliche Werth der Function $y = f(x)$ und wir verändern x in $x + h$, so wird der neue Werth von $y = f(x + h)$ sein und daher

$$f(x + h) - f(x)$$

die Grösse der Aenderung der Function y ausdrücken. Diese Grösse nennt man die Differenz der Function $f(x)$ und drückt sie durch $\Delta f(x)$ aus, wobei das Zeichen Δ nicht als Factor, wohl aber als Symbol angesehen werden muss. Es bleibt sich daher gleich, ob man

$$\Delta f(x), \text{ oder } f(x + h) - f(x), \text{ oder}$$

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \tag{5}$$

oder auch

$$\Delta y = f(x + h) - f(x)$$

schreibt.

Im speciellen Falle, in welchem die Function

$$f(x) = x \tag{6}$$

ist, hat man

$$\Delta x = (x + h) - x = h, \tag{7}$$

d. h. man kann die Variation oder die Differenz der Grösse x durch h oder durch Δx in derselben Art ausdrücken, wie man jene der Function $f(x)$ durch $\Delta f(x)$ ausgedrückt hat. Deshalb kann die Gleichung (5) auch lauten:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Löst man eine der Gleichungen (1), (2), (3), (4) in Bezug auf eine andere Variable, so kann man letztere als Function betrachten und der Gleichung eine andere Form geben.

So erhält man, wenn man die Gleichung (1) in Bezug auf x auflöst, die Gleichung

$$x = f(y),$$

worin y als unabhängige Variable und x als Function angesehen werden kann.

Betrachtet man die Grössen in einer gegebenen Function von einem abstracten Gesichtspunkte aus, so kann man jede beliebige Variable als unabhängig auffassen, da die Werthe der anderen Variablen, wenn man die eine willkürliche Werthe annehmen lässt, bestimmt sind. Aber oft sind die Verhältnisse zugleich variirender Grössen durch die Natur derart festgesetzt, dass die Variationen der einen Grösse als jenen der anderen subordinirt angesehen werden müssen.

So muss man z. B. bei der Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem Massenzuwachse eines Baumes und seinem Alter, die Masse als eine der Zeit subordinirte Variable ansehen, weshalb letztere die unabhängige Variable vorstellen wird.

Eine umgekehrte Anschauung wäre absurd, denn die Zeit verläuft unabhängig vom Wachsthume des Baumes.

§. 2. Die Differenzenberechnung einfacher Functionen.

Einfache Functionen einer Variablen nennt man solche Functionen, die nur ein einziges Glied und eine einzige Variable haben. Zusammengesetzte Functionen nennt man jene, welche man in mehrere einfache Functionen derselben Variablen zerlegen kann. Die Arithmetik und Geometrie mit Inbegriff der Trigonometrie liefern uns Beispiele solcher einfacher Functionen. So begegnen wir häufig der Gleichung

$$c = a^b.$$

Nehmen wir die Basis a als variabel und b als constant an, so wird der Werth von c eine Function von a. Dies wird noch einleuchtender, wenn man $a = x$ und $c = y$ setzt. Man hat dann

(1) $$y = x^b,$$

welcher Ausdruck eine einfache Function und zwar eine Potenz von x darstellt. Lässt man dagegen b variiren und behält a als constant bei, so hat man eine andere Function

$$(2) \qquad y = a^x,$$

die zwar auch einfach ist, aber den Namen einer Exponentialfunction führt.

Lassen wir endlich c variiren und nehmen es als unabhängige Veränderliche und b als Function derselben, so erhalten wir

$$c^y = x,$$

woraus, wenn wir diese Gleichung logarithmiren

$$y \log a = \log x$$

folgt, und wenn wir a als Basis der Logarithmen annehmen, so erhält man

$$y = \log x$$

welcher Ausdruck eine logarithmische Function genannt wird.

Functionen heissen dann algebraische, wenn sie aus den fünf ersten Operationen der Algebra zusammengesetzt sind. Sie werden in rationale und irrationale eingetheilt, je nachdem die durch das Wurzelzeichen angezeigte Operation ohne Rest durchführbar ist oder nicht. Eine andere Reihe von Functionen wird von der Trigonometrie geliefert und diese nehmen mit den logarithmischen und exponentiellen den gemeinschaftlichen Namen transcendenter Functionen an. Z. B.:

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\log x$, a^x, e^x, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.

Diese letzteren Functionen haben für die forstliche Anwendung keine grosse Bedeutung und wir werden deshalb keine Gelegenheit finden, dieselben einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

Hängt eine Variable von einer oder mehreren Grössen ab, die ihrerseits wieder von einer oder mehreren Variablen abhängig sind, so sagt man, die erste Variable sei Function einer Function.

Hat man z. B.

$$z = F(y), \qquad y = f(x),$$

so sagt man, z sei Function der Function von x.

In den folgenden Beispielen werden wir die Differenzen einiger der angeführten einfachen Functionen suchen.

Beispiel I. Es sei die Function

$$y = x^a$$

gegeben, in welcher a eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl sei. Daraus folgt nach Gleichung (5)

$$\Delta y = (x + h)^a - x^a \text{ oder}$$

$$\Delta y = x^a \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^a - 1 \right\}$$

Beispiel II. Es sei

$$y = a^x.$$

Nimmt man die Differenz oder gibt man x einen kleinen Zuwachs und zieht den ursprünglichen Werth von y ab, so erhält man

$$\Delta y = a^{x+h} - a^x = (a^h - 1)\, a^x.$$

Beispiel III. Es sei die Gleichung

$$a^y = x.$$

Löst man dieselbe in Bezug auf y auf, und nimmt man a als Basis der Logarithmen, so ergibt sich

$$y = log\, x.$$

Ihre Differenz wird:

$$\Delta y = log\,(x + h) - log\, x = log\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Beispiel IV. Suchen wir die Differenz der Functionen:

(a) $y = sin\, a x, \qquad y = cos\, a x.$

Aendert sich x um den gewöhnlichen Zuwachs h, und ziehen wir vom neuen Werthe der Function den ursprünglichen ab, so erhalten wir

(b) $\Delta\, sin\, a x = sin\, a\,(x + h) - sin\, a x;$

$\Delta\, cos\, a x = cos\, a\,(x + h) - cos\, a x.$

Nach einem Elementarsatze der Trigonometrie folgt:

(c) $sin\, a - sin\, b = 2\, sin\, \frac{a - b}{2}\, cos\, \frac{a + b}{2},$

$cos\, a - cos\, b = 2\, sin\, \frac{a - b}{2}\, sin\, \frac{a + b}{2};$

substituiren wir nun diese zwei Gleichungen den zweiten Gliedern der Gleichung (b), so erhalten wir:

$$\Delta \sin a x = 2 \sin \frac{a h}{2} \cos a \left(x + \frac{h}{2} \right),$$

$$\Delta \cos a x = -2 \sin \frac{a h}{2} \sin a \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

Während die Differenzenrechnung das Verhältniss zwischen den bestimmten Grössenzunahmen, die gleichzeitig variiren, in Betracht zieht, befasst sich die Differentialrechnung mit den Grenzwerthen dieser Verhältnisse.

Im Calcul der bestimmten Differenzen bezeichnet die Grösse $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ einen concreten Bruch, dessen Zähler eine bestimmte Grösse und das Zeichen Δ nichts anderes ist als der Ausdruck der Fundamentaloperation dieser Rechnung, jedoch unter der Voraussetzung, dass der Zuwachs Δx gegeben sei.

In der Differentialrechnung braucht man anstatt des Zeichens Δ das Zeichen d, und es bezeichnet die Grösse $\frac{d u}{d x}$ nicht mehr einen concreten Bruch, sondern jede der zwei Grössen $d u$ und $d x$ bezeichnet zwei gleichzeitig und fortwährend gesetzmässig abnehmende Grössen. Das Aufsuchen der Grenzen, zu welchen dieser Bruch für die verschiedenen Functionen führt, gehört in das Gebiet der Differentialrechnung.

Den Zweck der Differenzen-Rechnung kann man auch, wenn man sie in Bezug auf das von ihr angewendete Zeichen betrachtet, als eine mathematische Disciplin definiren, die sich mit den durch das Zeichen Δ oder $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ angedeuteten Operationen beschäftigt, wenn man Δx als gegeben und bestimmt annimmt.

Die Grösse Δx kann einen beliebigen constanten Werth haben; man kann daher auch $\Delta x = 1$ setzen, wodurch man die Grundregeln von der Differenz bedeutend vereinfacht. Wir werden es jedoch im Allgemeinen vorziehen, die Buchstaben h oder Δx beizubehalten.

§. 3. Differenzen zusammengesetzter Functionen.

Sind die Differenzen zusammengesetzter Functionen zu suchen, so wird man vorerst untersuchen, durch welche

Operationen die zusammengesetzten Functionen verbunden seien. Es können dies die vier ersten Operationen der Arithmetik sein.

I. Die zusammengesetzte Function habe die Form

$$(1) \qquad y = u \pm v \pm w \pm \dots$$

In derselben bedeuten $u, v, w, \dots$ Functionen von x, so dass die zweite Seite der Gleichung eine Function von x ist. Man verwandle das x in $x + h$; dann wird jede der Functionen $u, v, w, \dots$ Veränderungen erleiden, welche wir durch Δu, Δv, $\Delta w, \dots$ bezeichnen können. Auch die Function y wird einen Zuwachs Δy erleiden, der wie die andern positiv oder negativ sein kann. Man erhält sonach

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) \pm (w + \Delta w) \pm \dots$$

Ziehen wir davon die Gleichung (1) ab:

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm \dots$$

Setzen wir anstatt y dessen Werth (1)

$$(2) \qquad \Delta (u \pm v \pm w \pm \dots) = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm \dots,$$

womit der wichtige Satz ausgesprochen ist:

Die Differenz der algebraischen Summe mehrerer Functionen ist gleich der algebraischen Summe der Differenzen der einzelnen Functionen.

II. Es sei die Function

$$(3) \qquad y = u\, v$$

gegeben, in welcher u und v Functionen von x sind. Verwandelt man nun x in $x + h$, so werden die ursprünglichen Functionen u und v sich in $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ verwandeln. Wir erhalten daher:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v)$$

oder

$$y + \Delta y = u v + u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Subtrahirt man hievon die Gleichung (3), so erhält man

$$\Delta y = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Substituiren wir für y dessen Werth, so folgt:

$$(4) \qquad \Delta (u v) = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v,$$

durch welchen Ausdruck wir die Regel für die Differenz des Productes zweier Functionen erhalten.

Ist die Grösse v constant, so kann der Zuwachs Δv nicht statthaben und dieses Verhältniss wird, wenn man v in k verwandelt und $\Delta v = o$ setzt:

(5) $$\Delta k u = k \Delta u,$$

d. h. die Differenz des Productes einer Constanten mit einer Function ist gleich der Constanten multiplicirt mit der Differenz der Function.

Nehmen wir an, es wäre die Function

(6) $$y = u v w$$

gegeben, das Product der drei einfachen Functionen u, v und w von x. Verwandelt man in jeder dieser Functionen x in $x + h$, so erleiden sie die Zuwächse Δu, Δv, Δw und auch y verwandelt sich in $y + \Delta y$. Es ist daher:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)(w + \Delta w).$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Entwicklung des zweiten Gliedes und dadurch, dass man Glied für Glied die Gleichung (6) abzieht, einen Ausdruck, den man folgenderweise ordnen kann

(7) $$\begin{aligned} \Delta y = u v \Delta w &+ u \Delta v \Delta w + \Delta u \Delta v \Delta w \\ &+ u w \Delta v + v \Delta u \Delta w \\ &+ v w \Delta u + w \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke einer jeden dieser Colonnen zeigen deutlich die Art der Bildung der Differenz des Productes dreier Functionen. Auf ähnliche Weise bildet man die Differenz aus dem Producte mehrerer Functionen. Verbindet man ferner den durch die Gleichung (5) ausgedrückten Satz mit jenem, den die Gleichung (2) zum Ausdruck brachte, so kann man noch einen andern nicht weniger wichtigen allgemeinen Satz aufstellen. Hat man nämlich eine Function

$$y = a u + b v + c w + \ldots,$$

in welcher $u, v, w, \ldots$ Functionen von x und $a, b, c, \ldots$ constante Grössen sind, so ist die Differenz der Summe dieser Functionen ausgedrückt durch

(8) $$\Delta y = a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w + \ldots$$

III. Ist die Function y oder $f(x)$ aus dem Quotienten zweier anderer Functionen gebildet, oder

$$y = \frac{v}{u}, \tag{9}$$

und man verwandelt x in $x + \varDelta x$, und daher u in $u + \varDelta u$, v in $v + \varDelta v$, y in $y + \varDelta y$, so erhält man

$$y + \varDelta y = \frac{v + \varDelta v}{u + \varDelta u}.$$

Zieht man ferner die vorhergehende Gleichung ab, so liefert der Ausdruck:

$$\varDelta y = \frac{u \varDelta v - v \varDelta u}{u (u + \varDelta u)} \tag{10}$$

die Regel von der Differenz eines Quotienten.

Ist v gleich einer Constanten a, so ist der Zuwachs derselben $\varDelta v = o$, und daher wird die Differenz des Quotienten einer Constanten durch eine Function durch die Gleichung

$$\varDelta y = \frac{-a \varDelta u}{u (u + \varDelta u)} \tag{11}$$

ausgedrückt.

§. 4. Differenzen höherer Ordnung und deren Bildungsgesetze.

Die Differenz einer Function von x im Allgemeinen ist eine andere Function derselben Variablen. Deshalb kann man an ihr die Operation der Differenzirung in einer gewissen Anzahl wiederholen. So erhält man aus der Gleichung

$$\varDelta y = f(x + h) - f(x)$$

indem man die Differenzirung wiederholt unter Anwendung des Satzes I des vorhergehenden Paragraphes

$$\varDelta (\varDelta y) = \varDelta f(x + h) - \varDelta f(x),$$

oder kürzer

$$\varDelta^2 y = \varDelta f(x + h) - \varDelta f(x). \tag{1}$$

Der Exponent 2 von $\varDelta$ hat nicht die Bedeutung eines Potenzexponenten, sondern ist ein einfacher Index, der anzeigt, wie oft die Function y differenzirt worden sei. Es wird daher immer zur Unterscheidung in Klammern gesetzt. So wird man, anstatt $\varDelta \varDelta y$, $\varDelta \varDelta \varDelta y$, ... einfach $\varDelta^{(2)} y$, $\varDelta^{(3)} y$, ... $\varDelta^{(n)} y$ schreiben und sagen, dass es Differenzen der ersten, zweiten, dritten, ... n^{ten} Ordnung sind, je nachdem man diese Operation einmal, zweimal, dreimal, ... $n$mal vornehmen muss.

Entwickeln wir die Differenzen von $\Delta f(x+h)$ und $\Delta f(x)$ nach den gewöhnlichen Regeln, so erhalten wir:

$$\Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h),$$
$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x);$$

und wenn wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung (1) substituiren:

(2) $$\Delta^{(2)} y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Analog wird man, wenn man $\Delta^{(3)} y$ als die dritte Differenz der Function $y = f(x)$ nimmt, erhalten

$$\Delta^{(3)} y = \Delta f(x+2h) - 2\Delta f(x+h) + \Delta f(x),$$
$$\Delta f(x+2h) = f(x+3h) - f(x+2h),$$
$$\Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h),$$
$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x);$$

und wenn man substituirt, so erhält man

(3) $$\Delta^{(3)} y = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Für die vierte Differenz wird, wenn man auf analoge Weise vorgeht, der Ausdruck

(4) $$\Delta^{(4)} y = f(x+4h) - 4f(x+3h) + 6f(x+2h) - - 4f(x+h) + f(x)$$

gefunden etc. etc.

Aus den Gleichungen (1), (2), (3), (4) erhellt das Bildungsgesetz der Differenzen beliebiger Ordnung. Die Coefficienten sind dieselben, wie bei der Entwicklung des Newton'schen Binoms. Die Vorzeichen sind alternirend und die Werthe der Functionen sind jene, welche den successiven Werthen von $x = nh$, $(n-1)h$, $(n-2)h$, ... entsprechen. Man kann dieses Bildungsgesetz bis auf die n^{te} Differenz ausdehnen, welche folgendermassen lauten wird:

(5) $$\Delta^{(n)} y = f(x+nh) - \frac{n}{1} f(x+(n-1)h) + + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} f(x+(n-2)h) - \ldots - (-1)^n \frac{n}{1} f(x+h) + f(x).$$

Setzen wir der grösseren Uebersicht wegen

$$f(x) = y,\ f(x+h) = y_1,\ f(x+2h) = y_2, \ldots$$
$$f(x+nh) = y_n,$$

so wird sich die Gleichung (5) unter der Form

$$(6) \qquad \Delta^{(n)} y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} -$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y_{n-3} + \ldots - (-1)^n \frac{n}{1} y_1 + (-1)^n y$$

wiedergeben lassen, in welcher die Indices von y successiv um eine Einheit abnehmen und die Coefficienten, wie schon erwähnt, mit denen des Newton'schen Binoms übereinstimmen.

Um die Allgemeinheit dieser Formel zu zeigen, genügt es, zu beweisen, dass wenn dieselbe für einen bestimmten Werth von $n = p$ gilt, sie auch Giltigkeit besitzt für den Werth von $p + 1$, und hiemit für eine beliebige Zahl n. Es ist eine bekannte Eigenschaft des Binomial-Coefficienten, dass die Summe zweier auf einander folgenden Coefficienten derselben Potenzentwicklung den Coefficienten der unmittelbar höheren Potenz bildet.

Beweis: Es sei das Binom

$$(x+a)^n = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} a + A_2 x^{n-2} a^2 + \ldots$$

und die unmittelbare höhere Potenz:

$$(x+a)^n (x+a) = A_0 x^n (x+a) + A_1 x^{n-1} a (x+a) +$$
$$+ A_2 x^{n-2} a^2 (x+a) + \ldots$$

daher

$$(x+a)^{n+1} = A_0 x^{n+1} + (A_0 + A_1) a x^n + (A_1 + A_2) a^2 x^{n-1} +$$
$$+ (A_2 + A_3) a^3 x^{n-2} + \ldots$$

jener Ausdruck, welcher den eben citirten Satz ausspricht.

Nachdem wir dies vorausgeschickt, nehmen wir an, die Gleichung (6) gelte für den Werth von $n = p$. Wenden wir dieselbe nun auf die ersten $p + 1$ Glieder der vorausgeschickten Reihe an, dann auf die $p + 1$ Glieder derselben Reihe, welche dem ersten y folgen, so erhalten wir:

$$\Delta^{(p)} y = y_p - p y_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} y_{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y_{p-3} +$$
$$+ \ldots + (-1)^p y,$$

$$\Delta^{(p)} y_1 = y_{p+1} - p y_p + \frac{p(p-1)}{1.2} y_{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y_{p-2} +$$
$$+ \ldots + (-1)^p y_1.$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweiten ab, so erhält man

$$\Delta^{(p+1)}y=\Delta^{(p)}y_1-\Delta^{(p)}y=y_{p+1}-(p+1)\,y_p+\left(\frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}+p\right)y_{p-1}-$$
$$-\left(\frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}\right)y_{p-2}+\ldots,$$

und wenn man den in Erinnerung gebrachten Satz, dass die Summe zweier auf einander folgender Coefficienten derselben Potenzentwicklung den Coefficienten der unmittelbar höheren Potenz bildet, berücksichtigt, so kann man auch schreiben:

$$\Delta^{(p-1)}y=y_{p+1}-(p+1)\,y_p+\frac{(p+1)\,p}{1.2}\,y_{p-1}-$$
$$-\frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,y_{p-2}+\ldots,$$

welcher Ausdruck genau der Formel (6) entspricht, wenn man darin $n=p+1$ setzt.

Beispiel I. Es wäre die Function

$$(a)\qquad y=a^x$$

gegeben, und wir hätten die n^{te} Differenz dieser Function zu suchen.

Die Gleichung (5) gibt in diesem Falle

$$(b)\qquad \Delta^{(n)}a^x=a^{x+nh}-\frac{n}{1}\,a^{x+(n-1)h}+\frac{n\,(n-1)}{1.2}\,a^{x+(n-2)h}-$$
$$-\ldots+(-1)^n a^x,$$

oder

$$(c)\qquad \Delta^{(n)}a^x=a^x\left\{(a^h)^n-\frac{n}{1}\,(a^h)^{n-1}+\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,(a^h)^{n-2}-\right.$$
$$\left.-\ldots+(-1)^n\right\}.$$

Im speciellen Falle, wo $n=1$ ist, bekömmt man die erste der unter (d) angeführten Gleichungen, und führt man eine zweite, dritte etc. Differenz aus, so erhält man die zweite, dritte etc. der unter (d) folgenden Gleichungen.

$$(d)\qquad \begin{aligned}\Delta\,a^x&=(a^h-1)\,a^x,\\ \Delta^{(2)}a^x&=(a^h-1)\;\Delta\,a^x=(a^h-1)^2\,a^x,\\ \Delta^{(3)}a^x&=(a^h-1)^2\,\Delta\,a^x=(a^h-1)^3\,a^x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta^{(n)}a^x&=(a^h-1)^{n-1}\,\Delta\,a^x=(a^h-1)^n\,a^x.\end{aligned}$$

Substituirt man diesen letzten Werth in die Gleichung (c), so bekommt man:

$$(a^h - 1)^n = (a^h)^n - \frac{n}{1}(a^h)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(a^h)^{n-2} - $$
$$- \ldots + (-1)^2,$$

und wird a^h gleich der Grösse b gesetzt, so ist:

$$(b-1)^n = b^n - \frac{n}{1} b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2} - \ldots + (-1)^n$$

übereinstimmend mit der Entwicklung von $(b - 1)$ zur n^{ten} Potenz.

Beispiel II. Eine andere Anwendung der Bildung der Differenz einer Function ist jene von

$$y = f(x) = x^m,$$

wobei m eine ganze und positive Zahl sein möge.

Wenn wir in diesem Falle die Differenz entwickeln

$$\Delta x^m = (x+h)^m - x^m,$$

so erhalten wir

$$(a) \qquad \Delta x^{(m)} = \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots,$$

und indem wir der Kürze halber die Coefficienten

$$\frac{m(m-1)}{1.2}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \ldots$$

durch die Grösse $a_1, a_2 \ldots$ ersetzen, so wird:

$$\Delta x^m = m x^{m-1} h + a_1 x^{m-2} h^2 + a_2 x^{m-3} h^3 + \ldots$$

Nehmen wir von der Gleichung $y = x^m$ die zweite Differenz, so wird sich neuerdings der Potenzexponent von x um 1 vermindern und wir erhalten:

$$\Delta^{(2)} x^m = m h \Delta x^{m-1} + a_1 h^2 \Delta x^{m-2} + a_2 h^3 \Delta x^{m-3} + \ldots$$

und die erwähnten Differenzen entwickelt:

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)} x^m = m h & \left\{(m-1) x^{m-2} h + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} h^2 + \ldots\right\} + \\ a_1 h^2 & \left\{(m-2) x^{m-3} h + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} x^{m-4} h^2 + \ldots\right\} + \\ a_2 h^3 & \left\{(m-3) x^{m-4} h + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} x^{m-5} h^2 + \ldots\right\} + \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\end{aligned}$$

Nach abnehmenden Potenzen von x geordnet, erhalten wir ein Polynom von der Ordnung $m-2$

(b) $\Delta^{(2)} x^m = m(m-1) x^{m-2} h^2 + b_1 x^{m-3} h^3 + b_2 x^{m-4} h^4 + \ldots$

Nehmen wir noch von dieser Function die Differenz, so erhalten wir nach Entwicklung und Ordnung derselben:

(c) $\Delta^{(3)} x^m = m(m-1)(m-2) x^{m-3} h^3 + c_1 x^{m-4} h^4 + + c_2 x^{m-5} h^5 + \ldots$

Setzt man die Operation der Differenzirung fort, so bemerkt man bald, dass in den neuen Differenzen die Potenzen von x allmälig um eine Einheit bei jedesmaliger Wiederholung der Operation fallen, und da es keine negativen Potenzen von x gibt, so kommt die Gleichung

(d) $\Delta^{(m)} x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1) x^{m-m}) h^m$

zur Geltung, welche ausdrückt, dass die m^{te} Differenz von x^m eine von x unabhängige Grösse sei, d. i. eine constante. Es wird daher die $(m+1)^{ste}$ Differenz gleich Null sein, oder

(c) $$\Delta^{m+1} x^m = 0$$

und so alle folgenden.

Im Allgemeinen kann man beobachten, dass die m^{te} Differenz einer rationalen und ganzen Function der m^{ten} Ordnung constant ist. Ein Polynom von der Form

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

in welchem ein jedes Glied das Product einer wirklichen oder imaginären Constanten mit der Potenz einer wirklichen oder imaginären Variablen ist, nennt man eine **ganze** Function von x. Wenn diese in Bezug auf die Potenzen von x geordnet ist, so zeigt die m^{te} Potenz des ersten Gliedes die Ordnung der Function an. Wenn wir dies als bekannt voraussetzen und die Differenz einer solchen Function bilden, so erhalten wir eine andere von der $m-1^{sten}$ Ordnung, und wenn wir so fortfahren, so wird jede neue Operation die Ordnung der Function um eine Stufe herabdrücken. Da

$$y = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

ist, so erhält man, wenn die Differenz ausgeführt wird:

$$\Delta y = A_0 (x+h)^m + A_1 (x+h)^{m-1} + \ldots$$
$$- A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots$$
$$= A_0 m x^{m-1} h + B_1 x^{m-2} h^2 + B_2 x^{m-3} h^3 + \ldots,$$

in welcher Gleichung B_1, B_2,... constante Coefficienten sind. Diese Function ist somit von der $m - 1^{\text{sten}}$ Ordnung. Wird die zweite Differenz ausgeführt, so erhält man

$$\varDelta^{(2)} y = A m (m-1) x^{m-2} h^2 + C_1 x^{m-3} h^3 + C_2 x^{m-4} h^4 + \ldots,$$

welche Differenz der $m - 2^{\text{ten}}$ Ordnung angehört, und so weiter. Es ist deshalb

$$\varDelta^{(m)} y = m (m-1)(m-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 h^m.$$

oder

$$\varDelta^{(m)} y = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (m-1) m h^m.$$

Beispiel III. Es seien die successiven Differenzen der Function

$$y = x (x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-1)h)$$

zu suchen. Verwandelt man x in $x + h$ und subtrahirt man vom Resultate die gegebene Function, so findet man

$$\varDelta y = (x+h) x (x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-2)h) - \\ - x(x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-1)h),$$

$$\varDelta y = (x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-2)h)\, x \times \\ \left\{(x+h) - (x-(m-1)h)\right\},$$

oder

$$\varDelta y = x(x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-2)h) m h.$$

Von dieser Differenz kann leicht die zweite, wie auch die dritte und alle folgenden abgeleitet werden. Und zwar:

$$\varDelta^{(2)} y = x(x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-3)h) m(m-1)h^2,$$

$$\varDelta^{(3)} y = x(x-h)(x-2h)(x-3h) \ldots (x-(m-4)h) m(m-1)(m-2)h^3,$$

. . . .

allgemein

$$\varDelta^{(n)} y = x(x-h)(x-2h) \ldots (x-(m-n-1)h) m(m-1)(m-2) \ldots \\ \ldots (m-n+1)h^n.$$

Setzt man auf analoge Weise

$$y = x(x+h)(x+2h) \ldots (x+(m-1)h),$$

so findet man

$$\varDelta y = (x+h)(x+2h)(x+3h) \ldots (x+(m-1)h) m h,$$

$$\varDelta^{(2)} y = (x+2h)(x+3h) \ldots (x+(m-1)h) m(m-1)h^2,$$

. . . .

$$\varDelta^{(n)} y = (x+nh)(x+(n+1)h) \ldots (x+(m-1)h) m(m-1) \ldots \\ \ldots (m-n+1)h^n.$$

Beispiel IV. Es sei die der vorigen reciproke Function

$$y = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)};$$

gegeben, so erhält man

$$\Delta y = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} - \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+mh} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)},$$

oder

$$\Delta y = \frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta^{(n)} y = \pm \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)h^n}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m+n-1)h)}.$$

Auch die trigonometrischen und goniometrischen Functionen kann man sehr leicht der Operation der Differenzirung unterziehen, aber da sie keine directe forstliche Anwendung finden, so wollen wir davon nur das folgende Beispiel betrachten.

Beispiel V. Suchen wir die successiven Differenzen von $\sin x$.

Wir fanden bereits (§. 2, Beispiel IV)

$$(a) \qquad \Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

oder

$$(b) \qquad \Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h+\pi}{2}\right).$$

Differenzirt man neuerdings, so erhält man

$$\Delta^{(2)} \sin x = 2 \sin \frac{h}{2}\left\{\sin\left(x + h + \frac{h+\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h+\pi}{2}\right)\right\},$$

und bedient man sich dann der durch die Formeln (c) des §. 2, Beispiel IV ausgesprochenen Regeln, so wird

$$\Delta^{(2)} \sin x = 2 \sin \frac{h}{2}\left\{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x + h + 2\,\frac{h+\pi}{2}}{2}\right\}$$

$$= \left(2 \sin \frac{h}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{2x + h + 2\,\frac{h+\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(2 \sin \frac{h}{2}\right)^2 \sin\left(x + 2\,\frac{h+\pi}{2}\right).$$

In gleicher Weise fortfahrend, wird man im Allgemeinen finden:

$$(c) \qquad \Delta^{(n)} \sin x = \left(2 \sin \frac{h}{2}\right)^n \sin\left(x + n \frac{h+\pi}{2}\right).$$

§. 5. Der Werth des Endgliedes einer Reihe, in Function des ersten Gliedes und seiner Differenzen.

Bis jetzt haben wir uns mit der Aufgabe beschäftigt, die Differenzen einer gegebenen Function zu finden, oder die Differenzen Δy_0, $\Delta^{(2)} y_0$, vermittelst der Functionen y_0, y_1, y_2,... auszudrücken. Nunmehr wollen wir die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich die Functionen y_1, y_2,... vermittelst y_0 und seiner Differenzen Δy_0, $\Delta^{(2)} y_0$... ausdrücken. Den eingeführten Bezeichnungen zu Folge müssen wir das Stattfinden folgender Relationen einräumen:

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \quad y_3 - y_2 = \Delta y_2, \ldots$$
$$y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}.$$

Geben wir denselben die Form

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1, \quad y_3 = y_2 + \Delta y_2, \ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$$

und substituiren wir in die zweite den aus der ersten gefundenen Werth von y_1, in die dritte den von den zwei ersten gegebenen Werth von y_2 und so weiter, so erhalten wir:

$$y_2 = (y_0 + \Delta y_0) + \Delta (y_0 + \Delta y_0) = y_0 + 2 \Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$
$$y_3 = (y_0 + 2 \Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \Delta (y_0 + 2 \Delta y_0 + \Delta^2 y_0) =$$
$$= y_0 + 3 \Delta y_0 + 3 \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,$$

. . . .

In diesen Formeln finden wir die Coefficienten aus der Entwicklung des Newton'schen Binoms wieder und die Zeichen der einzelnen Glieder sind positiv, wesshalb dieselben allgemein geschrieben werden können

$$(1) \qquad y_n = y_0 + \frac{n}{1} \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^{(2)} y_0 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^{(3)} y_0 + \ldots \Delta^{(n)} y_0.$$

Auch in diesem Falle können wir die Richtigkeit des Entwicklungsgesetzes für jeden beliebigen Werth von n beweisen. Es genügt zu diesem Zwecke zu beweisen, dass, wenn diese Entwicklung für $n = p$ richtig sei, dieselbe auch richtig bleibt für $n = p + 1$, — daher allgemeine Giltigkeit besitzt.

Nimmt man an, die Gleichung (1) sei für den Fall $n = p$ entwickelt, so hat man

$$y_p = y_0 + p\,\Delta\, y_0 + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^{(2)} y_0 + \ldots + \Delta^{(p)}\, y_0$$

und nimmt man die Differenz dieser Gleichung, so:

$$\Delta\, y_p = \Delta\, y_0 + p\,\Delta^{(2)} y_0 + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^{(3)}\, y_0 + \ldots$$
$$+ p\,\Delta^{(p)} y_0 + \Delta^{(p+1)} y_0.$$

Werden diese beiden Gleichungen addirt und berücksichtigt, dass die Summe zweier auf einander folgender Glieder in der Entwicklung des Newton'schen Binoms das Glied der unmittelbar höheren Potenz bildet, so erhält man:

$$y_{p+1} = y_0 + (p+1)\,\Delta\, y_0 + \frac{(p+1)p}{1\,.\,2}\,\Delta^{(2)} y_0 + \ldots + \Delta^{(p+1)} y_0,$$

was ein mit der Formel (1) übereinstimmendes Resultat liefert, sobald man für $n = p + 1$ substituirt.

Da nun diese Entwicklung für $n = p$ gilt, so gilt sie auch für $n = p + 1$ und mithin für jeden beliebigen Werth von n.

Die Formel (1) kann man auch symbolisch durch folgende Form ausdrücken:

(2) $$y_n = (1 + \Delta)^n y_0,$$

welche entwickelt die erste Formel gibt, wenn man das Zeichen Δ nicht mehr als Symbol, sondern als Factor ansieht.

§. 6. Analogien zwischen einigen Regeln der Differenzen- und der Differentialrechnung.

Die Differentialrechnung ist nur ein Specialfall der Rechnung der bestimmten Differenzen und wir wollen im Folgenden einige Analogien zeigen, die in etlichen Formeln dieser beiden Operationen auftreten. Im späteren Verlaufe werden wir häufig Gelegenheit haben, noch weitere Analogien in Betracht zu ziehen.

Wir fanden früher (§. 4, Beispiel V):

$$\varDelta^{(n)} \sin x = (2 \sin \tfrac{1}{2} h)^n \sin \left(x + n \frac{h + \pi}{2} \right),$$

dividiren wir durch $h^n = (\varDelta x)^n$, so

$$\frac{\varDelta^{(n)} \sin x}{(\varDelta x)^n} = \frac{(2 \sin \frac{1}{2} \varDelta h)^n \sin \left(x + n \frac{h + \pi}{2} \right)}{(\varDelta x)^n};$$

und nehmen wir nun die Grenzen der beiden Glieder dieser Gleichung, welche dem $\varDelta x$ oder dem h unendlich klein genommen entsprechen, und berücksichtigen wir, dass in diesem Falle $\sin \frac{h}{2}$ in $\frac{h}{2}$ übergeht, so erhalten wir:

$$\frac{d^n \sin x}{d x^n} = \sin \left(x + \frac{n \pi}{2} \right),$$

übereinstimmend mit dem wichtigen Satze der Differentialrechnung.

Ebenso fanden wir (§. 4, Beispiel I), dass

$$\frac{\varDelta^n a^x}{(\varDelta x)^n} = \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)^n a^x.$$

Wird x unendlich klein, so nähert sich die Grösse zwischen den Klammern der Grenze $\log a$, wesshalb:

$$\frac{d^n x}{d x^n} = (\log a)^n a^x.$$

Prüfen wir noch die in §. 3 bewiesenen Sätze über die Differenzen zusammengesetzter Functionen, so finden wir, dass sich dieselben auch in der Differentialrechnung mit sehr kleinen Modificationen wiederholen. So ist der Differentialquotient der algebraischen Summe mehrerer Functionen gleich der algebraischen Summe der Differentialquotienten der einzelnen Functionen. Als Differenz des Productes zweier Functionen haben wir gefunden:

$$\varDelta u v = u \varDelta v + v \varDelta u + \varDelta u \varDelta v;$$

dividirt man durch $\varDelta x$ und nimmt die Grenze, so findet man

$$\frac{d u v}{d x} = u \frac{d v}{d x} + v \frac{d u}{d x},$$

wobei $\frac{d\,u\,v}{d\,x}$ als unendlich klein verschwindet, und ein Ausdruck bleibt, welcher zeigt, wie der Differentialquotient eines Productes gefunden wird.

Ist v constant, und setzt man dasselbe $= k$, so wird

$$\varDelta\, k\, u = k\, \varDelta\, u.$$

Dividirt man durch $\varDelta\, x$ und geht zur Grenzbestimmung über, so wird

$$\frac{d\,k\,u}{d\,x} = k\,\frac{d\,u}{d\,x},$$

d. h. der Differentialquotient des Productes einer Constanten mit einer Function ist gleich dem Producte der Constanten in den Differentialquotienten der Function.

Analog haben wir gefunden

$$\varDelta\, y = \frac{u\,\varDelta\, v - v\,\varDelta\, u}{u\,(u + \varDelta\, u)}.$$

Dividirt man durch $\varDelta\, x$, so wird

$$\frac{\varDelta\, y}{\varDelta\, x} = \frac{u\,\frac{\varDelta\, v}{\varDelta x} - v\,\frac{\varDelta\, u}{\varDelta\, x}}{u\,(u + \varDelta\, u)},$$

und indem man zur Grenze übergeht, erhält man den Ausdruck:

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{u\,\frac{d\,v}{dx} - v\,\frac{d\,u}{d\,x}}{u^2},$$

welcher anzeigt, wie ein Quotient zu differenziren ist.

Man sieht also, dass die Formeln und Regeln der Differentialrechnung nichts weiter sind, als ein specieller Fall der Rechnung von den Differenzen.

§. 7. Formeln von Taylor und Maclaurin.

Schreiben wir die Gleichung (1) des §. 5 unter der Form:

$$f\,(x + n\,h) = f\,(x) + \frac{n}{1}\,\varDelta\, f\,(x) + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\varDelta^2\, f\,(x) + \ldots .$$

und setzen wir $n\,h = \varepsilon$, wobei ε ein Vielfaches von h ist, so erhalten wir:

$$(1) \qquad f\,(x + \varepsilon) = f\,(x) + \frac{\varepsilon}{1}\,\frac{\varDelta f\,(x)}{h} + \frac{\varepsilon\,(\varepsilon - h)}{1.2}\,\frac{\varDelta^2\, f\,(x)}{h^2} + \cdots$$

Diese Reihe muss man sich fortgesetzt denken bis sie von selbst aufhört. Dieser Fall wird eintreten, denn in den Grössen h, $2\,h$, $3\,h$, $(\varepsilon - 1)\,h$, $\varepsilon\,h$, ... muss sich ein Vielfaches von h zeigen, das gleich ε ist. Stellen wir uns vor, dass das Intervall $h = \Delta\,x$ unendlich klein, und die Zahl n unendlich gross werde, so dass das Product $n\,h$ gleich bleibe einer constanten Grösse ε. Die Zahl der Glieder, aus welchen sich die rechte Seite der vorerwähnten Gleichung zusammensetzt, wird unendlich gross werden und die Verhältnisse

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta\,x}, \frac{\Delta^{(2)} f(x)}{\Delta\,x^2}, \frac{\Delta^{(3)} f(x)}{\Delta\,x^3}, \ldots$$

in welchen man anstatt h dessen Werth $\Delta\,x$ gesetzt hat, werden gegen Grenzen convergiren, welche durch die Ausdrücke:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$$

bezeichnet sind, daher die Gleichung (1) folgende Gestalt annimmt:

$$(2)\qquad f(x+\varepsilon) = f(x) + \frac{\varepsilon}{1} f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2} f''(x) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots + R,$$

wobei R das Restglied der Reihe vorstellt.

Vernachlässigt man in besonderen Fällen diesen Rest, so lässt sich der Fehler, der durch diese Vernachlässigung entsteht, leicht berechnen.

Die Grössen $f'(x)$, $f''(x)$, ... heissen Derivate der ersten, zweiten, ... n^{ten} Ordnung, oder die ersten, zweiten, etc. Derivate der Function $f(x)$.

Die Reihe (2) heisst nach ihrem Erfinder Formel von Taylor. Dieselbe findet in der Analyse sehr häufig wichtige Anwendung. Sie drückt die Variationen aus, welche die Function $f(x)$ erleidet, wenn in derselben die unabhängige Variable x eine willkürliche Aenderung ε erfährt.

Wenn $f(x)$ eine ganze und rationale Function n^{ter} Ordnung von x ist, so wird $(n\,h)$ das Derivat derselben gleich Null sein. In der That, ist m die Ordnung der Function, so ist die m^{te} Differenz und daher auch die m^{te} Derivate eine Constante und die successiven Derivate gleich Null. Die Reihe (2) besteht dann aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern.

Aber es kann vorkommen, dass keine dieser Derivate gleich Null wird, dann ist die Reihe (2) der bestimmte Ausdruck einer unbestimmten Anzahl von Gliedern, und es ist wichtig, bei Anwendung dieser Reihe, wenn man den Werth einer Function in jenen Fällen finden will, wo nur eine bestimmte Anzahl von Ausdrücken zu berücksichtigen ist, den Rest R, den man vernachlässigt, schätzen zu können, oder wenigstens die Grenze des Fehlers zu bestimmen, welchen man durch die Vernachlässigung dieses Restes begeht.

Dies berücksichtigend, liefert die Formel von Taylor streng richtige Resultate, aber wir werden uns in die Discussion dieser Grenzen nicht einlassen, da alle Functionen, welche sich unserer Betrachtung darbieten, in rasch convergirenden Reihen sich entwickeln werden.

Die Derivate $f'(x)$, $f''(x)$, ... sind nichts anderes, als das Verhältniss zwischen dem unendlich kleinen Zuwachse der Function und jenem der entsprechenden unabhängigen Variablen. Haben wir ein vollständiges Polynom, dessen Glieder von der Form $A\,x^m$ sind, so ergibt die Formel (a), §. 4, Beispiel II:

$$\frac{\Delta\,x^m}{\Delta\,x} = m\,x^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,x^{m-2}\,\Delta\,x + \ldots$$

worin, wenn man $\Delta\,x$ unendlich klein werden lässt, der Bruch $\frac{\Delta\,x^m}{\Delta\,x}$ zur Grenze $m\,x^{m-1}$ strebt, denn alle andern Glieder werden gleich Null, da sie mit $\Delta\,x$, $\Delta\,x^2$, ... multiplicirt sind.

In der Gleichung

$$lim\,\frac{\Delta\,x^m}{\Delta\,x} = m\,x^{m-1}$$

ist die sehr einfache Regel von der Aufsuchung der Derivate der Function $y = x^m$ enthalten, welche Derivate für die Function $f(x)$ durch $\frac{d f(x)}{d\,x}$ und die successiven Derivaten mit

$$\frac{d^2 f(x)}{d\,x^2},\ \frac{d^3 f(x)}{d\,x^3},\ \ldots$$

ausgedrückt werden.

Setzt man in der Formel von Taylor $x = o$ und verwandelt das ε in x, so erhält man:

$$(3) \quad f(x) = f(o) + f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(o) + \dots,$$

welcher Ausdruck die Entwicklung einer Function in absteigender Reihe darstellt, und die Formel von Maclaurin genannt wird.

§. 8. Die Formel von Newton. Interpolation.

Man erinnere sich der Gleichung (1) des §. 5

$$(1) \quad y_n = \frac{n}{1} \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^{(2)} y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^{(3)} y_0 + \dots,$$

substituire in die Gleichung $x + nh = z$, so hat man:

$$y_n = y_0 + \frac{z-x}{h} \Delta y_0 + \frac{(z-x)(z-x-h)}{1.2.h^2} \Delta^{(2)} y_0 +$$
$$+ \frac{(z-x)(z-x-h)(z-x-2h)}{1.2.3.h^3} \Delta^{(3)} y_0 + \dots$$

Ebenso wissen wir, dass y_n die Function $f(x + nh)$ darstellt, da wir aber $x + nh = z$ gesetzt haben, so wird es eine Function von z sein, in welcher x nur einen speciellen Werth a vorstellt. Setzen wir überdies für $y_0, y_1, y_2, \dots$ die numerischen Werthe $A_0, A_1, A_2, \dots$, so wird die neue Function $F(z)$ lauten:

$$(2) \quad F(z) = A_0 + \frac{z-a}{h} \Delta A_0 + \frac{(z-a)(z-a-h)}{1.2.h^2} \Delta^{(2)} A_0 + \dots$$

Diese Formel heisst Newton'sche Formel.

Bedenken wir, dass diese Function für den Werth von

$$\begin{array}{ll}
z = a & F(a) = A_0, \\
z = a + h & F(a+h) = A_0 + \Delta A_0 = A_1, \\
z = a + 2h & F(a+2h) = A_0 + 2\Delta A_0 + \Delta^{(2)} A_0 = A_2, \\
\dots & \dots \\
z = a + (n-1)h & F(a + [n-1]h) = A_0 + (n-1)\Delta A_0 + \\
 & \quad + \dots = A_{n-1}
\end{array}$$

liefert, so ist damit ausgesprochen, dass die Function $F(z)$ die Eigenthümlichkeit hat, sich in die Werthe $A_0, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, umzuwandeln, wenn man in ihr für z die Werthe a, $a + h$, $a + 2h \dots$, $a + (n-1)h$ substituirt.

Es ist übrigens einleuchtend, dass, wenn man die angeführten Producte im zweiten Gliede der Gleichung (2) entwickelt und sie nach den absteigenden Potenzen von z ordnet, man ein Polynom von der Form erhält:

$$F(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots$$

worin $B_0, B_1, B_2 \dots$ aus $a, h, \Delta A_0, \Delta^{(2)} A_0$, zusammengesetzte Werthe sind. Diese Gleichung sagt uns, $F(z)$ ist eine algebraische, rationale und ganze Function von z, und zwar der $(n-1)^{\text{sten}}$ Ordnung. Nehmen wir umgekehrt an, es seien die Zahlen $a, a+h, a+2h, \dots a+(n-1)h, A_0, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, gegeben, so enthält die Gleichung (2) die Lösung des Problems, nämlich jene algebraische, rationale und ganze Function von z zu bestimmen, welche für n gleich weit abstehende Werthe $(a, a+h, a+2h, \dots a+[n-1]h)$ von z, als entsprechende Werthe $F(a) = A_0$, $F(a+h) = A_1$, $F(a+2h) = A_2, \dots F(a+[n-1]h) = A_{n-1}$ ergibt.

Versuchen wir nunmehr die diesen Resultaten innewohnende geometrische Bedeutung zu interpretiren. Betrachten wir $a, a+h, a+2h, \dots$ als die Abscissen und $A_0, A_1, A_2, \dots$ als die entsprechenden Ordinaten von n in einer Curve befindlichen Punkten, so wird die Gleichung derselben $y = F(z)$ eine Parabel von der $(n-1)^{\text{sten}}$ Ordnung, welche durch n Punkte geht, vorstellen.

Nehmen wir an, man suche jene Curve, welche durch drei Punkte von den Coordinaten

$$x = 2,\ 5,\ 8,$$
$$y = 13,\ 10,\ -11$$

bestimmt ist, so erhält man, da in diesem Falle $h = 3$ ist, für die Ordinaten und Abscissen

$$A_0 = 13,\quad A_1 = 10,\quad A_2 = -11$$
$$a = 2,\quad a + h = 2 + 3 = 5,\quad a + 2h = 8,$$

und als Differenzen der Coordinaten

$$\Delta A_0 = 10 - 13 = -3,\ \Delta A_1 = -11 - 10 = -21,$$
$$\Delta^{(2)} A_0 = -21 + 3 = -18$$

welche Differenzen immer in derselben Ordnung zu nehmen sind.

Die Gleichung (2) gibt uns durch die Substituirung dieser Werthe, indem wir hier x statt z schreiben:

$$y = F(x) = 13 - (x-2) - (x-2)(x-5) = 5 + 6x - x^2$$

welche Formel die Gleichung der gesuchten Parabel liefert.

Interpolationsverfahren. Unter Interpolation verstand man ursprünglich nur die Einreihung einer Anzahl Ausdrücke unter eine Reihe anderer demselben Gesetze unterworfener Glieder; im Allgemeinen jedoch versteht man darunter die Bestimmung eines Theiles einer Reihe vermittelst einiger ihrer bekannten Glieder. Da jedoch aus einigen gegebenen Zahlen oder speciellen Werthen sich im Allgemeinen kein Gesetz aufstellen lässt, und daher auch nicht die Form einer Function bestimmt werden kann, so ist das Problem der Interpolation in diesem Falle unbestimmt und bedarf folglich einer speciellen Voraussetzung über die Form und Continuität der Function, welche dieses Gesetz ausspricht. Hätten wir n Werthe $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ einer unabhängigen Variablen und auch n andere den ersteren entsprechende Werthe A_0, A_1, A_2, einer anderen abhängigen Variablen, d. h. einer Function, so entsteht die Frage, auf welche Weise man einen anderen zwischen a_0 und a_{n-1} stehenden Werth, der einem Werthe B der Function entspricht, finden kann? Mit anderen Worten: Wie kann man zwischen zwei Grössen $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ andere, demselben Gesetze unterworfene Grössen einreihen? Man bemerkt, dass dieses Problem unbestimmt ist, denn man kann unzählige Curven liefern, die der Bedingung durch n gegebene Punkte zu gehen entsprechen, und daher sind unendlich viele Functionen $F(z)$ im Stande, für

$$z = a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$$

die Werthe

$$F(a) = A_0, \; F(a_1) = A_1, \; F(a_2) = A_2 \ldots F(a_{n-1}) = A_{n-1}$$

zu liefern.

Die Unbestimmtheit dieses Problems kann vermittelst einer speciellen Voraussetzung, z. B. dass in einer Gleichung die Differenzen einer gewissen Ordnung gleich Null sind, verschwinden. So nimmt man beispielsweise manchmal an, dass der Holzzuwachs dem Alter proportional sei. Diese Annahme hat nur dann Giltigkeit, wenn die Altersstufen wenig von einander abstehen. Gäbe man diese Proportionalität zu, so wäre es dasselbe, als ob man die zweiten Differenzen des Holzzuwachses gleich Null setzen würde. Sind aber die Altersstufen wenig von einander verschieden und sehr klein, so ist es nothwendig, erst höhere Differenzen gleich Null sein zu lassen. Die Annäherung an die Wahrheit, die man bei der Darstellung einer gegebenen Erscheinung erzielt, wird um so grösser sein, je grösser die Anzahl der Glieder der Reihe ist, die den wenig verschiedenen Werthen der unabhängigen Variablen — hier der Zeit — entsprechen.

In anderen Fällen bestimmt man die Form der Function, welche eine gewisse Erscheinung darstellen soll, und es erübrigt nur, die numerischen Werthe der Parameter oder willkürlicher Constanten, welche im Ausdrucke dieses Gesetzes vorkommen, d. h. die Werthe der unbekannten Coefficienten, die die gegebene Gleichung enthält, zu bestimmen. Oder es kommt auf das Einreihen zwischen die Glieder einer Reihe an, die eine der Variablen anderer, demselben Gesetze unterworfener Glieder vorstellen, und auf das Vervollständigen der Reihe nach beiden Seiten hin. Oder es handelt sich darum, einer Function, deren analytischer Ausdruck gänzlich unbekannt ist, oder die sich zur numerischen Berechnung wenig eignet, eine andere einfachere und von gegebenen numerischen Werthen abgeleitete Function zu substituiren, welche innerhalb der Grenzen ihrer Anwendbarkeit, die wahre Function zu vertreten im Stande ist.

Zu diesem Zwecke untersucht man, ob die gegebenen Werthe irgend eine specielle Eigenthümlichkeit besitzen; wenn z. B. diese Werthe periodische sind, so wird man eine goniometrische Function anwenden. Sollten aber diese periodischen Eigenschaften fehlen, so wird man für diese Werthe eine ganze und rationale Function von x als Gesetz annehmen können, indem man die Coefficienten für dieselbe entsprechend feststellt. Auch in diesem letzten Falle setzt man immer voraus, dass die Differenzen der successiven Ordnungen rasch abnehmen, und dass die Differenz der $(n+1)^{\text{sten}}$ Ordnung, wenn die Function der n^{ten} Ordnung wäre, gleich Null wird.

Die Anwendung dieser Functionen verlangt überdies, dass die Werthe von x nicht zu verschieden und möglichst wenig von einander abstehend seien.

§. 9. Anwendung der Formel von Newton.

Das Problem der Interpolation nimmt verschiedene Formen an, je nachdem die gegebenen Werthe der Hauptvariablen gleich weit von einander abstehen oder nicht. Die Lösung dieses Problems beruht in beiden Fällen immer auf demselben Principe: Entweder man setzt voraus, dass die Differenzen einer gewissen Ordnung gleich Null sind, oder man substituirt der rationalen und ganzen Function, welche die gegebenen Erscheinungen zum Ausdruck bringen soll, eine andere annähernd gleichwerthige.

Im ersten Fall kann man also die Newton'sche Formel anwenden. Folgende Beispiele sollen die Anwendung derselben versinnlichen. Den zweiten Fall werden wir im §. 10 behandeln.

Beispiel I. Man hätte die Function gegeben

$$(a) \qquad y = x^2\,(2x + 1),$$

welche für die Werthe von

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

die Werthe

$$(b) \qquad y = 3,\ 20,\ 63,\ 144$$

liefert.

Setzen wir den Fall, die Gleichung (a) wäre uns unbekannt, es hätten sich aber erfahrungsgemäss für zwei variable Grössen x und y die Werthe (b) ergeben. Nehmen wir nun x als Hauptvariable und y als Function derselben an, so handelt es sich darum, das Gesetz und das Verhältniss, das zwischen diesen beiden Grössen besteht, zu ermitteln.

Erinnern wir uns der Gleichung (2) des vorhergehenden Paragraphes und setzen wir anstatt a, h, A_0, $\varDelta A_0$, $\varDelta^{(2)} A_0, \ldots$ ihre bezüglichen Werthe

$$a = 1,\ A_0 = 3,\ \varDelta A_0 = 20 - 3 = 17,\ \varDelta A_1 = 63 - 20 = 43$$
$$\varDelta A_2 = 144 - 63 = 81,$$
$$h = 1,\ A_1 = 20,\ \varDelta^{(2)} A_0 = 43 - 17 = 26,\ \varDelta^{(2)} A_1 = 81 - 43 = 38,$$
$$A_2 = 63,\ \varDelta^{(3)} A_0 = 38 - 26 = 12,\ A_3 = 144,\ \varDelta^{(4)} A_0 = \varDelta^{(5)} A_0 = \ldots = 0,$$

so erhalten wir:

$$y = F(x) = 3 + \frac{x-1}{1}\,17 + \frac{(x-1)(x-2)}{1\,.\,2}\,26 +$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,12 = x^2\,(2x + 1),$$

ein, wie man sieht, in diesem Falle ganz richtiges Resultat.

B e i s p i e l II. Suchen wir die den verschiedenen, zwischen 20 und 80 Jahren liegenden Zeitintervallen entsprechenden Holzmassen eines Fichtenbestandes.

Gesetzt den Fall, man fände für

20, 40, 60, 80 Jahre
46, 137, 247, 360 Fm. (Holz).

Entwickeln wir die successiven Differenzen, so erhalten wir

$$A_0 = 46, \quad A_1 = 137, \quad A_2 = 247, \quad A_3 = 360,$$
$$\Delta A_0 = 91, \quad \Delta A_1 = 110, \quad \Delta A_2 = 113,$$
$$\Delta^{(2)} A_0 = 19, \quad \Delta^{(2)} A_1 = 3, \quad \Delta^{(3)} A_0 = -16.$$

Ueberdies ergibt sich, da das Intervall h constant und gleich 20 Jahren ist

$$a = 20, \quad a + h = 40, \quad a + 2h = 60, \quad a + 3h = 80.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung (2), §. 8 und setzen x anstatt z, so erhalten wir

$$F(x) = 46 + \frac{x - 20}{20} 91 + \frac{(x - 20)(x - 40)}{1 \,.\, 2 \,.\, 20^2} 19 +$$
$$+ \frac{(x - 20)(x - 40)(x - 60)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 20^3} (-16).$$

Diese Formel ergibt für die verschiedenen 5jährigen Intervalle, die zwischen dem 20. und 80. enthalten sind, folgende Resultate:

Alter	Masse
20 Jahre	46·0 Fm.
25 „	67·7 „
30 „	88·1 „
35 „	111·8 „
40 „	137·0 „
45 „	163·2 „
50 „	190·6 „
55 „	218·4 „
60 „	247·0 „
65 „	275·2 „
70 „	304·1 „
75 „	332·0 „
80 „	360·0 „

§. 10. Graphische Darstellung und analytisches Gesetz des laufend jährlichen Zuwaches und der Holzmasse eines Waldes.

Eine wichtige Anwendung finden im Forstwesen die Formeln der Interpolation in der Entwicklung des Gesetzes vom jährlichen oder laufenden Zuwachse und von der Holzmasse eines Waldes. Stellen wir uns die Aufgabe, das Gesetz vom laufenden Zuwachse einer Anzahl von Stämmen zu finden. Man betrachte diesen Zuwachs als eine Function y seines Alters x und alle anderen darauf Einfluss nehmenden Ursachen, wie die Holzgattung, den Standort, das Klima, den Boden etc. als Constante. Dieses Problem ist unbestimmt, aber dennoch kann man a priori einige Criterien über die der Function y zu gebende Form aufstellen und ihr diese Unbestimmtheit nehmen. Die Function wird folgendermassen beschaffen sein müssen:

a) sie muss für einen bestimmten Werth von x einen einzigen Werth für y ergeben, da der Holzzuwachs in einem gewissen Alter bestimmt ist, deshalb kann y nur in der ersten Potenz vorkommen,

b) ist das Alter gleich Null, so muss auch y gleich Null sein, es dürfen daher keine constanten Grössen vorkommen, die nicht mit y multiplicirt wären,

c) diese Function muss wachsen für Werthe von x, die zwischen 0 und einem gewissen Alter liegen, dann aber, nachdem sie ein gewisses Maximum erreicht hat, abnehmen; damit nun eine Function solche Eigenthümlichkeiten aufweisen könne, muss sie Constante enthalten, die mit x multiplicirt sind und in Potenzen von x ansteigen.

Die Form der Function, die man verwenden kann, um die Verhältnisse zwischen dem Holzzuwachse und seinem Alter darzustellen, ist folgende:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots, \tag{1}$$

die Gleichung einer Parabel, in welcher $a, b, c, \ldots$ die zu bestimmenden Constanten sind. Es ist einleuchtend, dass, wenn wir letztere Grössen kennen würden, die Bestimmung des laufenden, einem beliebigen Alter entsprechenden Zuwachses sich auf die Substituirung dieses Alters für x reducirt und folglich auf das numerische Auflösen des zweiten Gliedes dieser Gleichung, einer Operation, die für die verschiedenen Altersstufen ausgeführt, uns das Gesetz von den progressiven Zuwächsen des Holzes geben muss.

Dieses Gesetz kann man auch graphisch darstellen, indem man als Abscissen die Alter und als Ordinaten die Zuwächse nimmt, und indem man durch Punkte, die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Curve darstellt. Nehmen wir an, es wären für die Coefficienten $a, b, c, \ldots$ numerische Werthe gegeben und im Alter von

25, 40, 55, 70, 85, 100 Jahren

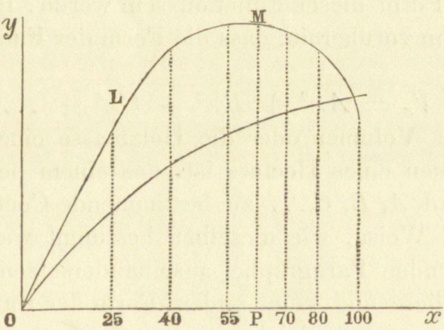
der laufend jährliche Zuwachs

10·20, 13·99, 14·86, 14·87, 13·32, 10·20 Fm. pro Hectar.

Für die Abscissen (Fig. 1) nehmen wir $1/2$ Millimeter jährlich und für die Ordinaten 1 Millimeter pro Cubikmeter an. Verbinden wir diese Punkte durch eine continuirliche Linie, so drückt dieselbe das gesuchte Gesetz des Zuwachses als Function des Alters aus.

Wollte man den, einem beliebigen andern Alter entsprechenden Zuwachs finden, z. B. jenen im 75. Jahre, so müsste man die dem 75. Punkte entsprechende Ordinate messen und fände so 14 Cubikmeter als Zuwachs.

Fig. 1.



Um nun die den verschiedenen Altern entsprechenden Zuwächse zur Bestimmung dieser Curve zu erhalten, ermittle man die Stammzahl pro Hectar Wald, wähle einen Modellbaum, bestimme dessen Zuwachs mittelst der Formel (e) des §. 15

oder nach andern in der forstlichen Taxation üblichen Methoden. Dieser so erhaltene Zuwachs bezieht sich auf den Modellbaum. Um nun den Zuwachs am Bestande pro Hectar zu erhalten, multiplicirt man ihn mit der Anzahl der Stämme, die auf dem Hectar stehen. Hat man diese Operation an einem und demselben Bestande unter gleichen Bedingungen und in den verschiedenen Altersstufen öfter wiederholt, so erhält man verschiedene Werthe von x und y, welche zur Construction der Curve der laufend jährlichen Zuwächse dieses Bestandes bei gewissen bestimmten Bedingungen dienen. Zieht man es jedoch vor, den analytischen Ausdruck dieses laufend jährlichen Zuwachses zu suchen, so muss man möglichst viele Daten auf verschieden alten Parzellen, aber wo möglich unter denselben Verhältnissen und Bestandesformen sammeln. Man erhält dadurch eine Reihe von Bedingungsgleichungen, vermittelst welchen man die Coefficienten a, b, c, ... bestimmt und wird man ebenso viele Versuche anstellen oder Erfahrungen sammeln müssen, als Coefficienten zu bestimmen sind.

Auf analoge Weise wird eine Curve construirt werden können, welche das Gesetz von den Holzmassen eines Waldes darstellt, oder aber einen analytischen Ausdruck, der die einem beliebigen Alter entsprechende Masse des Bestandes ergibt. Wählen wir eine analytische Darstellung, so könnte man fragen, welches die Form dieser Function sein werde? In diesem Falle sagen wir von vornherein, dass die Form der Function folgende sein soll:

$$V_x = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \ldots,$$

worin V_x das Volumen oder die Holzmasse einer Waldfläche, im Allgemeinen eines Hectars ist, das einem beliebigen Alter entspricht und A, B, C,... zu bestimmende Coefficienten sind. Die Art und Weise, wie dieselben bestimmt werden, werden wir im folgenden Paragraphe auseinandersetzen. Den Grund, warum wir diese und keine andere Form der Function wählen, wird aus dem §. 20 leicht hervorgehen, wo auch erklärt werden soll, wie man von dieser Function zur Bestimmung des laufend jährlichen und des durchschnittlichen Zuwachses und des normalen Vorrathes desselben Waldes übergeht.

Betrachten wir vorderhand den zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C,... einzuschlagenden Weg.

§. II. Berechnung der Massencoefficienten.

Da die Gleichungen zur Bestimmung der Gesetze des Holzzuwachses mehrere Coefficienten haben, so ist es nothwendig, dass man bei ihrer numerischen Bestimmung in einer gewissen Ordnung vorgehe. Beschränkt man sich bei der Bestimmung des Zusammenhanges zwischen der Holzmasse und dem entsprechenden Alter auf drei Beobachtungen, z. B. über Alter und Masse, so hat man drei Constante. Diese aber reichen nicht aus, wenn dieses Gesetz auf das ganze ökonomische Leben der Pflanze sich beziehen soll. Es müssen mehrere Versuche bei verschiedenem Alter gemacht werden und um die Auflösung einer Gleichung mit einer grösseren Anzahl von Unbekannten zu vermeiden, weil dies zu langen, überdies schwierigen und complicirten Rechnungen führen würde, kann man in folgender Weise vorgehen.

Es seien

$$V_a, \quad V_b, \quad V_c, \quad V_d, \quad V_e$$

die den Altern

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e$$

entsprechenden Holzmassen eines gegebenen Bestandes, dessen Verhältnisse, wie Standort, Bestockung etc. überall die gleichen wären. Man nehme, um analytisch das Gesetz vom Zuwachse der Massen darzustellen, zwei Functionen von der Form

$$V_x = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4.$$

Die Coefficienten der ersten berechne man mittelst der drei ersten Constanten, die der zweiten mit den letzten drei. Man erhält dann folgende Gruppen von Gleichungen:

$$(1) \quad V_a = Aa^2 + Ba^3 + Ca^4, \; V_b = Ab^2 + Bb^3 + Cb^4,$$
$$V_c = Ac^2 + Bc^3 + Cc^4,$$

$$(2) \quad V_c = Ac^2 + Bc^3 + Cc^4, \; V_d = Ad^2 + Bd^3 + Cd^4,$$
$$V_e = Ae^2 + Be^3 + Ce^4.$$

Aus der ersten Gleichung hat man

$$(3) \qquad A = \frac{V_a}{a^2} - Ba - Ca^2,$$

und in die zweite und dritte Gleichung derselben Gruppe substituirt, ergibt sich

$$\frac{V_a}{a^2} - \frac{V_b}{b^2} = B\,(a-b) + C\,(a^2-b^2),$$
$$\frac{V_a}{a^2} - \frac{V_c}{c^2} = B\,(a-c) + C\,(a^2-c^2).$$

Nennt man die ersten Glieder der Kürze wegen p und q, so erhält man

(4) $$\frac{p}{a-b} = B + C\,(a+b),$$
$$\frac{q}{a-c} = B + C\,(a+c),$$

woraus man, wenn wir noch

$$\frac{p}{a-b} = m, \quad \frac{q}{a-c} = n$$

setzen, erhält

$$m - n = C\,(b-c)$$

oder

$$C = \frac{m-n}{b-c}.$$

Nachdem man den Werth von C gefunden, substituirt man denselben in die erste der unter (4) enthaltenen Gleichungen und hat

$$B = m - C\,(a+b).$$

Hat man auch B numerisch bestimmt, so substituirt man seinen Werth in die Gleichung (3), um A zu finden.

Um die Berechnung dieser Coefficienten leicht zu gestalten, sucht man der Ordnung nach zuerst die Werthe von

$$\frac{V_a}{a^2}, \quad \frac{V_b}{b^2}, \quad \frac{V_c}{c^2},$$

dann jene von

$$p = \frac{V_a}{a^2} - \frac{V_b}{b^2}, \quad q = \frac{V_a}{a^2} - \frac{V_c}{c^2}$$

und

$$m = \frac{p}{a-b}, \quad n = \frac{q}{a-c},$$

hierauf jene von

$$C = \frac{m-n}{b-c}\quad B = m - C\,(a+b), \qquad A = \frac{V_a}{a^2} - Ba - Ca^2.$$

Ganz identische Resultate erhält man für die Coefficienten der zweiten Gruppe.

B e i s p i e l. Wenden wir diese uns bekannten Sätze auf folgende sich auf ein Hectar Fichtenwaldes unter den besten Wachsthumsverhältnissen zu Vallombrosa beziehende Daten an. Diese Daten sind den in den praktischen Uebungen der Forstzöglinge zu Vallombrosa angestellten Untersuchungen entnommen.

Alter	20	40	55	70	80	Jahre
Masse	88	311	520	745	890	Fm.

Für die ersten drei Daten hat man

$$\frac{V_a}{a^2} = \frac{80}{400} = 0\cdot 200\,000\,000, \quad \frac{V_b}{b^2} = \frac{311}{1600} = 0\cdot 194\,375\,000,$$

$$\frac{V_c}{c^2} = \frac{520}{3025} = 0\cdot 171\,900\,826,$$

$$p = 0\cdot 200\,000\,000 - 0\cdot 194\,375\,000 = 0\cdot 005\,625\,000,$$

$$q = 0\cdot 200\,000\,000 - 0\cdot 171\,900\,826 = 0\cdot 028\,099\,174,$$

$$m = \frac{0\cdot 005\,625\,000}{20 - 40} = -0\cdot 000\,281\,250,$$

$$n = \frac{0\cdot 026\,099\,174}{20 - 55} = -0\cdot 000\,802\,853,$$

$$C = \frac{-0\cdot 000\,281\,250 + 0\cdot 000\,802\,853}{40 - 55} = -0\cdot 000\,034\,272,$$

$$B = -0\cdot 000\,281\,250 + 0\cdot 000\,034\,772\,(40 + 20) =$$
$$= 0\cdot 001\,805\,070,$$

$$A = 0\cdot 200\,000\,000 - 0\cdot 001\,805\,070 . 20 + 0\cdot 000\,034\,272 . 20^2 =$$
$$= 0\cdot 177\,807\,400.$$

Für die zweite Gruppe:

$$\frac{V_a}{a^2} = \frac{520}{3025} = 0\cdot 171\,900\,826, \quad \frac{V_b}{b^2} = \frac{745}{4900} = 0\cdot 152\,040\,816,$$

$$\frac{V_c}{c^2} = \frac{890}{6400} = 0\cdot 139\,062\,300,$$

$$p = 0\cdot 171\,900\,826 - 0\cdot 152\,040\,816 = 019\,850\,010,$$

$$q = 0\cdot 171\,900\,826 - 0\cdot 139\,062\,300 = 9\cdot 032\,838\,326,$$

$$m = \frac{0\cdot 019\,850\,010}{55 - 70} = -0\cdot 001\,324\,001,$$

$$n = \frac{0\cdot 032\,838\,326}{55 - 80} = -0\cdot 001\,313\,533,$$

$$C = \frac{-0\cdot 001\,324\,001 + 0\cdot 001\,313\,533}{70 - 80} = 0\cdot 000\,001\,046,$$

$$B = 0\cdot001\,324\,001 - 0\cdot000\,001\,046\,(55 + 70) =$$
$$= -001\,454\,846,$$
$$A = 0\cdot171\,900\,826 + 0\cdot001\,454\,846 . 55 - 0\cdot000\,001\,046 . 55^2 =$$
$$= 0\cdot248\,754\,801.$$

Substituirt man die Werthe der gefundenen Coefficienten A, B, C der zwei Gruppen in die Hauptgleichung der Massen, so hat man für die Altersstufen von 0 bis 55 Jahren die Gleichung:

(1) $V_x = 0\cdot177\,807\,400 x^2 + 0\cdot001\,805\,070 x^3 - 0\cdot000\,034\,272 x^4$,

und für jene über 55 Jahre

(2) $V_x = 0\cdot248\,754\,801 x^2 - 0\cdot001\,454\,846 x^3 + 0\cdot000\,001\,046 x^4$.

Setzt man in diesen Gleichungen nach und nach für x die Werthe 10, 20, 30,... so erhält man die in folgender Tabelle gegebenen Werthe:

Alter	Masse
10 Jahre..........	19 Fm.
20 „	80 „
30 „	180 „
40 „	311 „
50 „	435 „
60 „	535 „
70 „	745 „
80 „	890 „
90 „	1023 „
100 „	1137 „

Eine andere Methode zur Berechnung der Massencoefficienten. Ausser der vorhergehenden kann man zur Berechnung der Massencoefficienten auch folgende Methode anwenden, welche den Gebrauch von Logarithmentafeln ermöglicht.

Substituiren wir in die Gleichung

$$C = \frac{m - n}{b - c}$$

die Werthe von m und n, so haben wir

$$C=\left\{\frac{\frac{V_a}{a^2}-\frac{V_b}{b^2}}{a-b}-\frac{\frac{V_a}{a^2}-\frac{V_c}{c^2}}{a-c}\right\}:(b-c)=\frac{1}{b-c}\left\{\frac{\frac{V_a}{a^2}-\frac{V_b}{b^2}}{a-b}-\frac{\frac{V_a}{a^2}-\frac{V_c}{c^2}}{a-c}\right\}=$$

$$=\frac{1}{b-c}\left\{\frac{V_a}{a^2}\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}\right)-\frac{V_b}{b^2(a-b)}+\frac{V_c}{c^2(a-c)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{b-c}\left\{\frac{V_a(b-c)}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{V_b}{b^2(a-b)}+\frac{V_c}{c^2(a-c)}\right\}$$

und endlich

$$\text{(1)}\qquad C=\frac{V_a}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{V_b}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{V_c}{c^2(c-a)(c-b)}.$$

Um den Werth von B zu erhalten, substituirt man in

$$B=m-C(a+b)$$

die Werthe von m und C, und erhält

$$B=\frac{1}{a-b}\left(\frac{V_a}{a^2}-\frac{V_b}{b^2}\right)-(a+b)\left\{\frac{V_a}{a^2(a-b)(a-c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{V_b}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{V_c}{c^2(c-a)(c-b)}\right\}.$$

Ordnet man die Gleichung in Bezug auf die Factoren V_a, V_b, V_c, so erhält man

$$\text{(2)}\qquad B=-\left\{\frac{V_a(b+c)}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{V_b(a+c)}{b^2(b-a)(b-c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{V_c(a+b)}{c^2(c-a)(c-b)}\right\}.$$

Substituirt man endlich die beiden Werthe von B und C in die Gleichung, welche A ergibt, so hat man

$$A=\frac{V_a}{a^2}+a\left\{\frac{V_a(b+c)}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{V_b(a+c)}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{V_c(a+b)}{c^2(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$-a^2\left\{\frac{V_a}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{V_b}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{V_c}{c^2(c-a)(c-b)}\right\},$$

woraus

$$A=\frac{V_a}{a^2}\left(1+\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}-\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\right)+$$

$$+\frac{V_b}{b^2}\left(\frac{a(a+c)}{(b-a)(b-c)}-\frac{a^2}{(b-a)(b-c)}\right)+$$

$$+\frac{V_c}{c^2}\left(\frac{a(a+b)}{(c-a)(c-b)}-\frac{a_2}{(c-a)(c-b)}\right),$$

und wenn wir die Grössen innerhalb der grossen Klammern reduciren.

$$(3)\ A = \frac{bcV_a}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{acV_b}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{abV_c}{c^2(c-a)(c-b)}.$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) haben gleiche Nenner; die in denselben enthaltenen Differenzen sind selbst im Kopfe berechenbar, da a, b, c immer ganze Zahlen sind. Betrachtet man, wie die drei Ausdrücke, welche die Werthe A, B, C ergeben, gebildet sind, so wird es klar, wie bei der logarithmischen Berechnung vorgegangen werden muss.

§. 12. Interpolationsverfahren bei ungleich weit von einander abstehenden Altersstufen. Die Formel von Lagrange.

In den meisten Fällen wird es nicht gelingen, gleich weit von einander abstehende Altersstufen im Walde zu finden, um durch Versuche eine Zuwachs-Tabelle vermittelst der Formel von Newton herzustellen. In einem solchen Falle wird uns ein Mittel willkommen sein, mittelst welchen man die Interpolation anstellen und die den Zeiträumen von fünf Jahren entsprechenden Zuwächse oder Massen bestimmen kann. Man kann sich hier der graphischen oder analytischen Methode, die wir in den zwei vorhergehenden Paragraphen erläutert haben, oder aber einer der nachstehend beschriebenen Methoden bedienen. Es sei Vx die dem Alter x entsprechende Masse, und nehmen wir an, diese lasse sich durch eine Function folgender Form ausdrücken:

$$(1)\qquad \frac{V_x}{x^2} = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)(x-b) + \\ + A_3(x-a)(x-b)(x-c) + \dots$$

worin $a, b, c\dots$ specielle Werthe von x und deren entsprechende Massen V_a, V_b, $V_c\dots$ bekannt sind. Diese Function hat die Eigenschaft, eine Masse gleich Null zu geben, wenn das Alter gleich Null gesetzt wird und auch den andern im §. 10 erörterten Bedingungen zu entsprechen. Es erübrigt daher nur noch die Bestimmung der Coefficienten A_0, A_1, A_2,... und zwar in der Weise, dass man für

$$x = a,\ b,\ c,\ \ldots$$

die Werthe

$$\frac{V_x}{x^2} = \frac{V_a}{a^2},\ \frac{V_b}{b^2},\ \frac{V_c}{c^2},\ldots$$

erhält.

Da die Gleichung (1) diesen Bedingungen genügen muss, so liefert sie auch folgende Gleichungen, die zur Bestimmung der Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ dienen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{V_a}{a^2} &= A_0 \\ \frac{V_b}{b^2} &= A_0 + A_1\,(b-a) \\ \frac{V_c}{c_2} &= A_0 + A_1\,(c-a) + A_2\,(c-a)\,(c-b) \\ \frac{V_d}{d^2} &= A_0 + A_1(d-a) + A_2(d-a)(d-b) + A_3(d-a)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

. . . .

Substituirt man den Werth von A_0 aus der ersten dieser Gleichungen in die zweite, so erhält man

$$\frac{V_b}{b^2} = \frac{V_a}{a^2} + A_1\,(b-a),$$

woraus

$$(3)\qquad A_1 = \frac{V_a}{a^2\,(a-b)} + \frac{V_b}{b^2\,(b-a)}.$$

Substituiren wir nun diesen Werth von A_1 in die dritte Gleichung, so bekommen wir

$$\frac{V_c}{c^2} = \frac{V_a}{a^2}\left\{\frac{V_a}{a^2(a-b)} + \frac{V_b}{b^2\,(b-a)}\right\}\cdot(c-a) + A_2\,(c-a)\,(c-b),$$

woraus

$$A_2 = \frac{V_c}{c^2\,(c-a)\,(c-b)} - \frac{V_a}{a^2\,(c-a)\,(c-b)} - \frac{V_a}{a^2(a-b)(c-b)} -$$

$$- \frac{V_b}{b^2\,(b-a)\,(c-b)} = \frac{V_a}{a^2\,(a-b)}\left\{\frac{-1}{c-a} - \frac{1}{a-b}\right\} +$$

$$+ \frac{V_b}{b^2\,(b-a)\,(b-c)} + \frac{V_c}{c^2\,(c-a)\,(c-b)},$$

$$A_2 = \frac{V_a}{a^2(c-b)} \cdot \frac{b-c}{(c-a)(a-b)} + \frac{V_b}{b^2(b-a)(b-c)} +$$
$$+ \frac{V_c}{c^2(c-a)(c-b)}.$$

Und wenn wir endlich im Zähler $b - c$ und im Nenner $c - a$ das Vorzeichen ändern:

$$(4)\ A_2 = \frac{V_a}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{V_b}{b^2(b-a)(b-c)} + \frac{V_c}{c^2(c-a)(c-b)}.$$

Setzt man diese Substitution fort, so gelangt man schliesslich zum allgemeinen Ausdrucke:

$$(5)\ A_n = \frac{V_a}{a^2(a-b)(a-c)(a-d)\ldots} + \frac{V_b}{b^2(b-a)(b-c)(b-d)\ldots} +$$
$$+ \frac{V_c}{c^2(c-a)(c-b)(c-d)\ldots} + \ldots$$

welcher das Bildungsgesetz der Coefficienten der Gleichung (1) darstellt.

Die Gleichung (1) ist viel allgemeiner als die Formel von Newton und ist auch die Berechnung bequemer, als wie mit den im §. 12 entwickelten Formeln. Wir ziehen sie sogar der Formel von Lagrange vor, welche wir im folgenden entwickeln und auf die Function der Holzmassen anwenden werden.

Die Formel von Lagrange. Das Problem der Interpolation einer rationalen und ganzen Function ist gänzlich bestimmt, daher die verschiedenen Methoden immer zu demselben Resultat führen müssen. In der Formel von Lagrange sind alle diese Methoden implicite enthalten. Ohne die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ der Gleichung

$$V_x = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \ldots$$

zu kennen, kann ein Ausdruck gefunden werden, der die einem beliebigen Alter entsprechende Holzmasse $a, b, c, \ldots$ als Function der Alter, so wie auch deren bekanntes Holzvolumen $V_a, V_b, V_c, \ldots$ gibt.

In den meisten Fällen braucht man auf der rechten Seite der Gleichung nur drei Glieder. Daher haben wir um Vieles einfacher

$$(6)\qquad V_x = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4,$$

und wenn wir durch x^2 dividiren

$$\frac{V_x}{x^2} = A + Bx + Cx^2, \tag{7}$$

welche Gleichung für die Werthe von

$$x = a,\ x = b,\ x = c$$

Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{V_a}{a^2} &= A + Ba + Ca^2, \\ \frac{V_b}{b^2} &= A + Bb + Cb^2, \\ \frac{V_c}{c^2} &= A + Bc + Cc^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Nehmen wir anstatt der Gleichung (2) eine neue

$$\frac{V_x}{x^2} = \frac{V_a}{a^2} X_a + \frac{V_b}{b^2} X_b + \frac{V_c}{c^2} X_c, \tag{9}$$

worin X_a, X_b, X_c Functionen von x sind, welche der Bedingung unterworfen sind, dass für

$$\begin{array}{ll} x = a & X_a = 1,\ X_b = X_c = 0, \\ x = b & X_b = 1,\ X_a = X_c = 0, \\ x = c & X_c = 1,\ X_a = X_b = 0, \end{array}$$

wird; denn nur in diesem Falle wird die Gleichung (9) der Gleichung (7) identisch sein. Wir wollen nur die drei Functionen X_a, X_b, X_c bestimmen, welche dann den aufgestellten Bedingungen entsprechen werden, wenn sie die Form

$$\begin{aligned} X_a &= P\,(x - b)\,(x - c), \\ X_b &= Q\,(x - a)\,(x - c), \\ X_c &= R\,(x - a)\,(x - b) \end{aligned}$$

haben und für $x = a$, $x = b$, $x = c$

$$\begin{aligned} 1 &= P\,(a - b)\,(a - c), \\ 1 &= Q\,(b - a)\,(b - c), \\ 1 &= R\,(c - a)\,(c - b), \end{aligned}$$

ergeben, woraus

$$P = \frac{1}{(a-b)\,(a-c)},\ Q = \frac{1}{(b-a)\,(b-c)},\ R = \frac{1}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Man hat sonach

$$X_a = \frac{(x-b)\,(x-c)}{(a-b)\,(a-c)}, \quad X_b = \frac{(x-a)\,(x-c)}{(b-a)\,(b-c)},$$

$$X_c = \frac{(x-a)\,(x-b)}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (9) und multiplicirt die ganze Gleichung mit x^2, so hat man

$$(10)\quad V_x = \frac{(x-b)\,(x-c)\,x^2}{(a-b)\,(a-c)\,a^2}\,V_a + \frac{(x-a)\,(x-c)\,x^2}{(b-a)\,(b-c)\,b^2}\,V_b + \\ + \frac{(x-a)\,(x-b)\,x^2}{(c-a)\,(c-b)\,c^2}\,V_c$$

als die gesuchte Formel.

Man kann diese Formel (10) auch auf jene Fälle ausdehnen, wo mehr als drei Massen und entsprechende Altersstufen bekannt sind. Ist es möglich, die Versuche in bestimmten Altern, wie z. B. im 20. 40. 60. 80. oder 30. 50. 70. und 90. Jahre anzustellen und die entsprechenden Massen zu bestimmen, dann sind die Coefficienten von V_a, V_b, V_c, V_d für die verschiedenen Werthe, die x annehmen kann, bekannt und die Gleichung (10) nimmt folgende Form an:

$$V_x = A' V_a + B' V_b + C' V_c + D' V_d.$$

Gibt man x die successiven Werthe 5, 10, 15, 20, . . ., so haben die Coefficienten im ersten Falle die in der Tabelle A, im zweiten Falle die in der Tabelle B ersichtlichen Werthe.

Beispiel. Es wird die dem 80. Jahre entsprechende Masse gesucht, wenn man

für das	30.,	50.,	70.,	90. Jahr
die Massen	50	108	170	250 Fm.

gefunden hat.

Die Tafel B gibt im 80. Jahre für die Coefficienten von V_{30}, V_{50}, V_{70}, V_{90} die Werthe

$$A' = 0{\cdot}4444, \qquad B' = -\,0{\cdot}8000,$$
$$C' = 1{\cdot}2245, \qquad D' = 0{\cdot}2471,$$

welche mit den Massen 50, 108, 170, 250 ergeben:

$$V_{80} = 0{\cdot}4444\,.\,50 - 0{\cdot}8000\,.\,108 + 1{\cdot}2245\,.\,170 + 0{\cdot}2471\,.\,250 = \\ = 22{\cdot}22 - 86{\cdot}00 + 218{\cdot}16 + 61{\cdot}77 = 215{\cdot}75 \text{ Fm.}$$

Tabelle für die Interpolation der Holzmassen, wenn die Holzmassen und das entsprechende Alter gegeben sind.

A 20, 40, 60, 80 Jahre *B* 30, 50, 70, 90 Jahre

Alter	*A'*	*B'*	*C'*	*D'*	Alter	*A'*	*B'*	*C'*	*D'*
10	0,5469	−0,1375	0,0360	−0,0048	10	0,4444	−0,2440	0,0816	−0,1236
15	0,8205	−0,1289	0,0952	−0,0123	15	0,7510	−0,3480	0,1139	−0,0167
20	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	20	0,9722	−0,3500	0,1071	−0,0154
25	0,9399	0,2349	−0,0447	0,0053	25	0,0579	−0,2285	0,6478	0,0090
30	0,7031	0,5273	−0,0781	0,0088	30	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
35	0,3589	0,8078	−0,0718	0,0104	35	0,8188	0,2948	−0,0644	0,0059
40	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	40	0,5555	0,6000	−0,1020	0,0123
45	−0,2768	1,0382	0,1538	−0,0123	45	0,2637	0,8543	−0,0872	0,0097
50	−0,3906	0,8789	0,3906	−0,0243	50	0,0000	1,0000	0,0000	−0,0000
55	−0,2954	0,5170	0,6893	−0,0256	55	−0,1838	0,9926	0,1688	−0,0146
60	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	60	−0,2500	0,8100	0,4145	−0,0278
65	0,4136	−0,5179	1,2379	0,0774	65	−0,1824	0,4121	0,7073	0,0285
70	0,6562	−0,9570	1,2763	0,2392	70	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
75	0,6278	−0,9064	0,9573	0,5287	75	0,2441	−0,4746	1,2107	0,0814
80	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	80	0,4444	−0,8000	1,2245	0,2471
85	−2,5854	2,2540	−1,8344	1,7195	85	0,4367	−4,7451	0,8872	0,5368
90	−6,3281	6,6445	−4,9219	2,7685	90	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

§. 13. Methoden zur aproximativen Bestimmung der Massen und der den Altersstufen entsprechenden Zuwächse.

Man habe im Alter von

20 40 55 70 80 Jahren

die Massen von

80 311 520 740 890 Fm.

Die jährlichen Zuwächse werden

von 0 bis zu 20 Jahren $\frac{V_{20} - V_0}{20} = \frac{80 - 0}{20} = 4\cdot 00,$

„ 20 „ „ 40 „ $\frac{V_{40} - V_{20}}{20} = \frac{311-80}{20} = 11\cdot 55,$

„ 40 „ „ 55 „ $\frac{V_{55} - V_{40}}{15} = \frac{520-311}{15} = 13\cdot 86,$

von 55 bis zu 70 Jahren $\frac{V_{70} - V_{55}}{15} = \frac{745-520}{15} = 15 \cdot 00$,

„ 70 „ „ 80 „ $\frac{V_{80} - V_{70}}{10} = \frac{890-745}{10} = 14 \cdot 50$

betragen und die den verschiedenen Decennien entsprechenden Massen:

$V_{10} = 10.4 \cdot 00 = 40$, $V_{60} = V_{55} + 5.15 = 595$,
$V_{20} = 20.4 \cdot 00 = 80$, $V_{70} = V_{55} + 15.15 = 745$,
$V_{30} = V_{20} + 10.11 \cdot 55 = 195$, $V_{80} = V_{70} + 10.14 \cdot 50 = 890$,
$V_{40} = V_{20} + 20.11 \cdot 55 = 311$, $V_{90} = V_{80} + 10.14 \cdot 00 = 1035$,
$V_{50} = V_{40} + 10.13 \cdot 86 = 450$, $V_{100} = V_{80} + 20.14 \cdot 00 = 1180$.

Diese Resultate stimmen nicht, besonders jene nach dem 80. Jahre, überein mit denen des §. 11, weil man hier annimmt, dass der Zuwachs vom 70. zum 80. Jahre noch immer zunimmt, während bekannt ist, dass er, nach begonnener Abnahme abzunehmen fortfährt; überdies setzt man voraus, dass der laufend jährliche Zuwachs in einer Periode sich immer gleich bleibt, was aber, wie die Erfahrung lehrt, nicht der Fall ist.

Um den laufend jährlichen Zuwachs zu finden, genügt es, wenn man den Zuwachs einer Periode durch die Anzahl der die Periode bildenden Jahre dividirt, weshalb

$$i_{10} = \frac{V_{10} - V_0}{10} = \frac{40 - 0}{10} = 4 \cdot 00$$

$$i_{20} = \frac{V_{20} - V_{10}}{10} = \frac{80 - 40}{10} = 4 \cdot 00$$

$$i_{30} = \frac{V_{30} - V_{20}}{10} = \frac{195 - 80}{10} = 11 \cdot 50$$

$$i_{40} = \frac{V_{40} - V_{30}}{10} = \frac{311 - 195}{10} = 11 \cdot 60$$

$$i_{50} = \frac{V_{50} - V_{40}}{10} = \frac{450 - 311}{10} = 13 \cdot 90$$

$$i_{60} = \frac{V_{60} - V_{50}}{10} = \frac{595 - 450}{10} = 14 \cdot 50$$

$$i_{70} = \frac{V_{70} - V_{60}}{10} = \frac{745 - 595}{10} = 15 \cdot 00$$

$$i_{80} = \frac{V_{80} - V_{70}}{10} = \frac{890 - 745}{10} = 14 \cdot 50$$

$$i_{90} = \frac{V_{90} - V_{80}}{10} = \frac{1035 - 890}{10} = 14 \cdot 50$$

$$i_{100} = \frac{V_{100} - V_{90}}{10} = \frac{1180 - 1035}{10} = 14 \cdot 50$$

Ausser dieser Methode, welche man auch Methode „der Differenzen“ zu nennen pflegt, benützt man noch eine andere analoge, bei welcher man vom mittleren Zuwachs Gebrauch macht und welche etwas genauere Resultate liefert, als die vorhergehende Methode. Es seien v_1 und v_2 die den zwei verschiedenen Altersstufen x_1 und x_2 entsprechenden Massen. Man suche die durchschnittlichen Zuwächse $\frac{v_1}{x_1}$, $\frac{v_2}{x_2}$ und ihre Differenz, welche durch die Anzahl der Jahre der Periode dividirt, den durchschnittlichen in ihr statthabenden Zuwachs geben:

$$\frac{\frac{v_2}{x_2} - \frac{v_1}{x_1}}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

Ist der dem Alter x_1 entsprechende durchschnittliche Zuwachs bekannt, so findet man die Zuwächse der Jahre $x + 1$, $x + 2$, $x + 3, \ldots$ indem man diesem einmal, zweimal, dreimal, den durch die Gleichung (1) gefundenen durchschnittlichen Zuwachs hinzufügt. Man kommt endlich vom gemeinjährigen Zuwachs zu den Massen, indem man denselben mit dem Alter, in welchem er statt hatte, multiplicirt.

Wenden wir diese Methode auf den Zeitraum von 20 bis 40 Jahren des vorhergehenden Beispiels an, so finden wir

$$\frac{V_1}{x_1} = \frac{80}{20} = 4 \cdot 000, \quad \frac{V_2}{x_2} = \frac{311}{40} = 7 \cdot 775,$$

und daher für die Gleichung (1)

$$\frac{7 \cdot 775 - 4 \cdot 000}{40 - 20} = 0 \cdot 18875 \text{ Fm.}$$

und für die durchschnittlichen Zuwächse in den verschiedenen Zeiträumen von 5 Jahren:

von 20	bis 25	Jahren	$4 + 0 \cdot 18875 . 5 = 4 \cdot 944$	Fm.
„ 25	„ 30	„	$4 + 0 \cdot 18875 . 10 = 5 \cdot 887$	„
„ 30	„ 35	„	$4 + 0 \cdot 18875 . 15 = 6 \cdot 831$	„
„ 35	„ 40	„	$5 + 0 \cdot 18875 . 20 = 7 \cdot 775$	„

In analoger Weise geht man für jede andere Periode vor; die Massen werden dann in

25	Jahren	4·944.25	= 123·6,
30	„	5·887.30	= 176·6,
35	„	6·831.35	= 239.1,
40	„	7·775.40	= 311·0

betragen.

§. 14. Einreihung gleich weit abstehender Glieder in eine Reihe.

Bilden mehrere Werthe mit einem noch unbekannten Werthe eine Reihe von gleich weit abstehenden Gliedern, so kann das unbekannte Glied durch einfache Einreihung gefunden und die Reihe somit vervollständigt werden.

Erinnern wir uns zu diesem Behufe der Gleichung (6) des §. 4, welche die n^{te} Differenz einer Reihe von $n+1$ Gliedern gibt. Da diese letzte Differenz gleich Null sein muss, so hat man

$$(1)\quad y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \ldots - (-1)^n \frac{n}{1} y_1 + \\ + (-1)^n y_0 = 0.$$

Diese Gleichung ermöglicht, ein Glied einer Reihe zu bestimmen, falls die anderen bekannt sind. Nehmen wir z. B. an, dass man zwischen zwei Glieder ein drittes einreihen müsste, dann ist $n = 2$ und aus der Gleichung (1) wird

$$(2)\qquad y_2 - 2y_1 + y_0 = 0,$$

woraus

$$y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2},$$

das heisst, das arithmetische Mittel der zwei angenommenen Zahlen liefert die gesuchte Zahl.

Fehlt z. B. die fünfte oder besser die mittlere von fünf Zahlen, so hätte man

$$y_4 - 4y_3 - 6\,y_2 - 4y_1 + y_0 = 0,$$

woraus

$$(3)\qquad y_2 = \frac{4\,(y_1 + y_3) - (y_0 + y_4)}{6}.$$

Dehnt man diese Methode weiter aus, so kann man auch jenen Fall in Betracht ziehen, in welchem die Zahlen verschieden sind. Hat man z. B. die Zahlen y_0, y_3, y_4, und soll zwischen die ersten, zwei andere einreihen, so dass alle fünf Zahlen zusammen von einander gleich weit abstehen, d. h. eine arithmetische Progression bilden, so kann festgestellt werden, dass die dritten Differenzen, welche die ersten und letzten vier Zahlen liefern können, gleich Null sein müssen, weshalb man folgende zwei Gleichungen hat:

$$\Delta^3 y_0 = 0, \Delta^3 y_1 = 0$$

oder

(4)
$$y_3 - 3\, y_2 + 3\, y_1 - y_0 = 0,$$
$$y_4 - 3\, y_3 + 3\, y_2 - y_1 = 0,$$

welche dann nach y_1 und y_2 aufgelöst die Ausdrücke der Reihe, die man sucht, ergeben; daher

$$y_1 = \frac{y_0 + 2\, y_3 - y_4}{2},$$

(5)
$$y_2 = \frac{y_0 + 8\, y_3 - 3\, y_4}{6}.$$

Man kann die Frage, wie zwischen gegebene Zahlen andere, demselben Gesetze unterworfene eingereiht werden können, in folgender Weise lösen. Man erinnere sich der Newton'schen Formel (§. 8, Gleichung (2)) und nehme an, es soll der Zwischenraum zwischen zwei Gliedern einer gegebenen Reihe in m Theile von der Grösse h' getheilt werden. Wenn a das erste Glied einer Reihe ist, deren Glieder um ein constantes Intervall h von einander verschieden sind, so erhält man die übrigen Glieder der Reihe, wenn man a nach und nach den Werth h, $2h$, $3h\ldots$ anfügt. Wenn dann zwischen zwei Gliedern dieser Reihe andere demselben Gesetze unterworfene Glieder eingereiht werden sollen, so muss man das Intervall h in m Theile theilen, so dass $h = mh'$ oder $h' = \frac{h}{m}$ ist. Ueberdies wird man eine beliebige Zahl z erhalten, wenn man am ersten Gliede a die Grösse $n\,\frac{h}{m}$ hinzuaddirt, also:

$$z = a + n\,\frac{h}{m}.$$

Die Newton'sche Formel verwandelt sich durch die Substituirung des Werthes von z in folgende:

$$(6)\quad F\left(a+n\frac{h}{m}\right)=A_0+\frac{n}{m}\Delta A_0+\frac{n\,(n-m)}{1.2.m^2}\Delta A_0^{(2)}+$$
$$+\frac{n\,(n-m)\,(n-2m)}{1.2.3.m^3}\Delta^{(3)}A_0+\cdots$$

Anwendung I. Zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen soll ein drittes Glied eingereiht werden. Alle Differenzen der Gleichnng (6) mit Ausnahme der ersten sind gleich Null, und die Zahl der einzureihenden Ausdrücke $n=1$, jene der Intervalle $m=2$, daher

$$(7)\qquad F\left(a+\frac{h}{2}\right)=A_0+\tfrac{1}{2}\Delta A_0=\frac{A_0+A_1}{2},$$

d. h., das einzureihende Glied ist, wie wir übrigens bereits schon gesehen haben, gleich der halben Summe der gegebenen Glieder.

Muss man zwischen zwei gegebene Zahlen zwei andere einreihen, so hat man für die erste $n=1$ und $m=3$, und daher

$$(8)\qquad F\left(a+\frac{h}{3}\right)=A_0+\tfrac{1}{3}\Delta A_0=\tfrac{1}{3}\,(A_0+A_1);$$

für die zweite Zahl hat man $n=2$ und $m=3$, daher

$$(9)\qquad F\left(a+\frac{2h}{3}\right)=A_0+\tfrac{2}{3}\Delta A_0=\tfrac{1}{3}\,(2\,A_1+A_0).$$

Anwendung II. Es sind drei Zahlen gegeben und zwischen zwei derselben sollen drei denselben Gesetzen der Differenz unterworfene Grössen eingereiht werden. Die dritten Differenzen sind in diesem Falle gleich Null. Die Anzahl der Intervalle, die man bei dieser Operation zwischen dem ersten und zweiten gegebenen Gliede erhält, ist vier, d. h. $m=4$. Folglich findet man für die einzureihenden Zahlen mittelst der Gleichung (1), wenn man nach und nach $n=1, 2, 3, 4$ werden lässt, die Werthe:

für die erste $A_0+\frac{1}{4}\Delta A_0-\frac{3}{32}\Delta^{(2)}A_0$,
„ „ zweite $A_0+\frac{1}{2}\Delta A_0-\frac{1}{8}\Delta^{(2)}A_0$,
„ „ dritte $A_0+\frac{3}{4}\Delta A_0-\frac{3}{32}\Delta^{(2)}A_0$,
„ „ vierte $A_0+\Delta A_0$.

Setzt man für ΔA_0, $\Delta^{(2)} A_0$ deren Werthe, so erhält man:

$$
(10) \quad
\begin{array}{llll}
\text{für den} & \text{I.} & \text{Ausdruck} & \frac{1}{32}(21 A_0 + 14 A_1 - 3 A_2), \\
\text{„} \ \text{„} & \text{II.} & \text{„} & \frac{1}{8}(\ 3 A_0 + \ 6 A_1 - A_2), \\
\text{„} \ \text{„} & \text{III.} & \text{„} & \frac{1}{32}(\ 5 A_0 + 30 A_1 - 3 A_2), \\
\text{„} \ \text{„} & \text{IV.} & \text{„} & A_1.
\end{array}
$$

Auf analoge Weise wird man vorgehen, wenn man andere drei Ausdrücke zwischen der zweiten und der dritten der drei gegebenen Zahlen einreihen will. Nur setzt man dann $m = 4$ und n successive gleich 5, 6, 7 u. s. w.

Damit die Formel (6) anwendbar sei, müssen die Differenzen der gefundenen Zahlen constant sein, damit man eine bestimmte Anzahl von Ausdrücken oder wenigstens für ΔA_0, $\Delta^{(2)} A_0$, $\Delta^{(3)} A_0, \ldots$ abfallende Werthe habe. Ueberdies darf man die Werthe von n nicht über eine gewisse Grenze steigen lassen, da sonst die Convergenz aufhören würde.

Die Annahme, dass die zweiten Differenzen constant seien, führt zu sehr einfachen Formeln und es trifft diese Annahme in den meisten Fällen ein, wenn man passende Intervalle wählt. Diese Methode wird häufig in den technischen Wissenschaften angewendet und wir können sie auch beim Massenzuwachs eines Bestandes gebrauchen. Es gibt jedoch eine Methode der forstlichen Schätzung, in welcher man, wenn die zweiten Differenzen wenig regelmässig sind, dieselben constant macht, und darnach die durch Untersuchung gelieferten Zahlen etwas corrigirt, wobei man Sorge trägt, den beiden äussersten Werthen der Versuchsreihe ihren ursprünglichen Werth zu belassen. Wir müssen diese Methode aus mehreren Gründen verwerfen, und zwar:

a) weil die zweiten Differenzen des Zuwachses oder der Holzmassen nicht constant sein können, besonders dann nicht, wenn die Zuwächse in einem ihrem Maximum nahen Alter gemessen wurden, nach welchem ja der Zuwachs abnimmt. Ueberdies wissen wir, dass der Zuwachs, wenn er auch in kleinen Zwischenräumen gemessen wäre, eine Function der dritten Ordnung ist, und daher die dritten Differenzen constant sein müssen.

b) Weil man ohne ganz besondere Gründe am Werthe einer Beobachtung keine Modification vornehmen soll. Sind

Unregelmässigkeiten vorhanden, so ist hiedurch ein Beobachtungsfehler angedeutet und liegt ein solcher vor, so ist es besser, die ganze Beobachtung zu verwerfen, als Zuflucht zur zweideutigen Hilfe der zweiten constanten Differenzen zu nehmen.

Beispiel I. Es seien die Massen

190 218 302 Fm.

gegeben, welche den Altersstufen von

50 55 70 Jahren

entsprechen, und man soll die Massen bestimmen, welche den verschiedenen zwischen 50 und 70 Jahren gelegenen Zeiträumen von 5 Jahren entsprechen.

Nehmen wir an, den Massen y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 entsprächen jene der Alter von 50, 55, 60, 65, 70 Jahren. Greifen wir auf die Gleichungen (4) zurück, in welchen y_2 und y_3 unbekannt sind, so erhalten wir, indem wir dieselben auflösen:

$$y_2 = \frac{y_4 + 8y_1 - 3y_0}{6}, \quad y^3 = \frac{y_4 + 2y_1 - y_0}{2}.$$

Dieselben ergeben also

$$y_2 = \frac{302 + 1744 - 570}{6} = 249 \text{ Fm.},$$

$$y_3 = \frac{302 + 436 - 190}{2} = 274 \text{ Fm.}$$

Beispiel II. Es seien die durchschnittlichen Zuwächse

2·93 3·80 4·31 Fm.

gegeben, welche den Altern von

30 50 70 Jahren

entsprechen, und man soll die durchschnittlichen Zuwächse bestimmen, welche den zwischen 30 und 70 enthaltenen Zeiträumen von 5 Jahren angehören.

Setzen wir in der Formel (6) $m = 4$ und n successive gleich 1, 2, 3,... und substituiren wir für A_0, $\varDelta A_0$, $\varDelta^{(2)} A_0$ die bezüglichen Werthe

$$A_0 = 2{\cdot}93, \quad \varDelta A_0 = 0{\cdot}87, \quad \varDelta^{(2)} A_0 = -\,0{\cdot}36,$$

so haben wir für:

35 Jahre $2 \cdot 93 + \frac{1}{4}\, 0 \cdot 87 + \frac{3}{32} 0 \cdot 36 = 3 \cdot 180$ Fm.
40 „ $2 \cdot 93 + \frac{1}{2}\, 0 \cdot 87 + \frac{1}{8}\, 0 \cdot 36 = 3 \cdot 410$ „
45 „ $2 \cdot 93 + \frac{3}{4}\, 0 \cdot 87 + \frac{3}{32} 0 \cdot 36 = 2 \cdot 616$ „
50 „ $2 \cdot 93 + \frac{4}{4}\, 0 \cdot 87 = 3 \cdot 800$ Fm.
55 „ $2 \cdot 93 + \frac{5}{4}\, 0 \cdot 87 - \frac{5}{32} 0 \cdot 36 = 3 \cdot 961$ „
60 „ $2 \cdot 93 + \frac{6}{4}\, 0 \cdot 87 - \frac{12}{32} 0 \cdot 36 = 4 \cdot 100$ „
65 „ $2 \cdot 93 + \frac{7}{4}\, 0 \cdot 87 - \frac{21}{32} 0 \cdot 36 = 4 \cdot 216$ „
70 „ $2 \cdot 93 + \frac{8}{4}\, 0 \cdot 87 - \frac{32}{32} 0 \cdot 36 = 4 \cdot 310$ „

Beispiel III. Es seien die Massen

80, 311, 595, 890 Fm.

entsprechend den Altersstufen von

20, 40, 60, 80 Jahren

gegeben und zu bestimmen wären die den verschiedenen Decennien entsprechenden Massen.

Zwischen zwei aufeinander folgende Massen muss man eine andere einreihen, weshalb die Anzahl der gegebenen und der zu suchenden Ausdrücke zusammen sieben beträgt. Combinirt man die letzten sechs dieser Ausdrücke, dann die ersten sechs und endlich die ersten fünf, so hat man folgende Gleichungen:

$$y_6 - 5y_5 + 10y_4 - 10y_3 + 5y_2 - y_1 = 0,$$
$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0,$$
$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0.$$

Setzt man für y_0, y_2, y_4, y_6 ihre bezüglichen Werthe 80, 311, 595, 890, so verwandeln sich die Gleichungen in folgende:

$$(a)\quad 5y_5 + 10y_3 + y_1 - 8395 = 0,$$
$$(b)\quad y_5 + 10y_3 + 5y_1 - 6165 = 0,$$
$$(c)\quad y_3 + y_1 - 635 \cdot 25 = 0.$$

Wenn wir die Gleichung (c) nach y auflösen und diesen Werth in die Gleichungen (a) und (b) substituiren, so erhalten wir:

$$5y_5 + 9y_3 - 7759 \cdot 75 = 0,$$
$$y_5 + 5y_3 - 2988 \cdot 75 = 0,$$

woraus

$$y_3 = 449 \text{ Fm.}$$

Diesen Werth in (c) eingesetzt, ergibt

$$y_1 = 186 \cdot 25 \text{ Fm.},$$

und schliesslich aus der Gleichung (a)

$$y_5 = 743 \cdot 75 \text{ Fm.}$$

§. 15. Differenzen der Functionen mehrerer Variablen. Anwendung derselben zur Bestimmung des Zuwachses eines Stammes.

Auf dieselbe Art wie $f(x + \Delta x) - f(x)$ die Differenz einer Function mit einer Variablen ausdrückt, stellt man die Differenz einer Function mit mehreren untereinander unabhängigen Variablen folgendermassen dar:

$$(1) \quad \Delta f(x, y, z, \ldots s, t) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots s + \\ + \Delta s + t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots s, t).$$

Man kann auch nur einer der Variablen einen Zuwachs Δx geben, z. B. x, dann wird dessen Differenz sein:

$$f(x + \Delta x, y, z, \ldots s, t) - f(x, y, z, \ldots s, t),$$

was man kürzer $\Delta_x f(x)$ schreiben kann, und eine partielle Differenz von $f(x)$ nennt, um sie von der (1) zu unterscheiden, welche eine totale Differenz genannt wird. Da jedoch die partiellen Differenzen von den bis jetzt betrachteten nicht verschieden sind, so kann man die totalen Differenzen sowohl die der ersten Ordnung als auch die der höheren Ordnung vermittelst der partiellen Differenzen leicht entwickeln. Es sei u eine Function der beiden Variablen x und y. Um die totale Differenz zu finden, verwandelt man u in $u + \Delta_x u$ und erhält

$$f(x + \Delta x, y) = u + \Delta_x u.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt y, $y + \Delta y$, so erhält man:

$$f(x + \Delta x\, y + \Delta y) = u + \Delta_x u + \Delta_y (u + \Delta_x u) = \\ = u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y u,$$

und wiederholt man dieselbe Operation, indem man zuerst y in $y + \Delta y$, dann x in $x + \Delta x$ verwandelt, so gelangt man zu folgendem Resultate:

$$(2) \quad f(x + \Delta x, \; y + \Delta y) = u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta_x \Delta_y u.$$

Wenn man diese Gleichung mit der vorhergehenden, identischen vergleicht, so erhält man

$$\Delta_y \Delta_x u = \Delta_x \Delta_y u,$$

d. h. es ist gleichgiltig, in welcher Ordnung man die partiellen Differenzen einer Function zweier Variablen entwickelt.

Wenden wir dasselbe Raisonnement auf eine Function dreier Variablen an, so gelangt man zu folgendem Resultate:

$$(3)\quad \begin{aligned} f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y,\ z+\varDelta z) = u &+ \varDelta_x u + \varDelta_x \varDelta_y u + \\ &+ \varDelta_x \varDelta_y \varDelta_z u \\ & \varDelta_y u + \varDelta_x \varDelta_z u \\ & \varDelta_z u + \varDelta_y \varDelta_z u. \end{aligned}$$

Das Entwickelungsgesetz ist hieraus leicht zu ersehen: In der ersten Columne kommt u immer allein vor, in der zweiten die ersten Differenzen einer jeden Variablen, in der dritten alle in Bezug auf zwei Variable möglichen Differenzen, in der vierten die Differenzen dreier Variablen u. s. w.

Die Gleichung (1) kann, falls man $\varDelta$ als Factor annimmt, symbolisch auch so geschrieben werden:

$$f(x+\varDelta x,\quad y+\varDelta y) = u\,(1+\varDelta_x)\,(1+\varDelta_y),$$

und auf analoge Weise die Gleichung (3)

$$f(x+\varDelta x,\quad y+\varDelta y,\quad z+\varDelta z) = u\,(1+\varDelta_x)(1+\varDelta_y)(1+\varDelta_z),$$

und daher allgemein

$$(4)\quad \begin{aligned} f(x+\varDelta x,\ y+\varDelta y,\ z+\varDelta z \quad \ldots\ t+\varDelta t) &= \\ = u\,(1+\varDelta_x)\,(1+\varDelta_y)\,(1+\varDelta_z)\ldots(1+\varDelta_t). \end{aligned}$$

Auf ganz gleiche Weise kann man die Differenzen höherer Ordnung erhalten.

Anwendung. Wenden wir nunmehr die Differenzbestimmung einer Function mehrerer Variablen auf die Ermittlung des Zuwachses eines Stammes als Function des Stärke- und Höhenzuwachses an.

Man bezeichne mit V die Masse, welche einem gewissen Alter eines Modellstammes entspricht, mit d den Durchmesser an der Basis, mit h die Höhe und mit f die Formzahl, die wir wenigstens für die Dauer eines Jahres als constant annehmen. Es mögen h und d am Ende eines Jahres die Zuwächse $\varDelta d$ und $\varDelta h$ erhalten, weshalb V nach dieser Zeit $V+\varDelta V$ sein wird, indem $\varDelta V$ genau den laufend jährlichen Zuwachs eines Jahres angibt, d. h. die Massenzunahme zu Ende eines Jahres, welche wir mit J bezeichnen wollen. Wenden wir auf die Function

d und h von V, den von der Gleichung (2) ausgesprochenen Satz an, so haben wir

(*a*) $V(d+\Delta d,\ h+h\Delta) = V(d,\ h) + \Delta_d V + \Delta_h V + \Delta_d \Delta_h V$

Man braucht jetzt nur die hier angezeigten Differenzen der Function

(*b*) $$V = \frac{\pi}{4} f d^2 h$$

zu entwickeln, so findet man

(*c*) $\Delta_d V = \frac{\pi}{4} fh\,(2d\Delta d + (\Delta d)^2),\ \Delta_h V = \frac{\pi}{4} fd^2 \Delta_h.$

Lassen wir in der ersten Gleichung (*c*) das Quadrat von Δd, das an und für sich schon eine kleine Grösse ist, und die Differenz zweiter Ordnung $\Delta_d \Delta_h V$ in der Gleichung (*a*) unberücksichtigt und substituiren wir die neuen Werthe (*c*) in die Gleichung (*a*), so erhalten wir

$$V(d+\Delta d, h+\Delta h) - V(d, h) = \frac{\pi}{4} fh\,(2d\Delta d) + \frac{\pi}{4} fd^2 \Delta h,$$

woraus

$$V(d+\Delta d,\ h+\Delta h) - V(d,\ h) = \frac{\pi}{4} fd\,(2h\Delta d + d\Delta h).$$

Die linke Seite der Gleichung drückt den Holzzuwachs nach dem ersten Jahre aus, daher

(*d*) $$I = \frac{\pi}{4} fd\,(2h\Delta d + d\Delta h).$$

Um diese Formel anwenden zu können, müssen wir die Grössen Δh, Δd und f bestimmen; Δd bestimmt man durch das Zählen der Jahresringe an einem 5 Centimeter breiten Scheibenausschnitte eines gefällten Baumes. Ist die Anzahl der Jahresringe gleich n, so hat man

$$\Delta d = \frac{2\ 0{\cdot}05}{n} = \frac{0{\cdot}10}{n}.$$

Um Δh zu bestimmen, entnimmt man dem Baume ein Gipfelstück von der Länge l und zählt auf der Schnittfläche von Innen nach Aussen längs einem Radius die Jahresringe ab. Es sei nun m die gefundene Jahrringzahl; hieraus ergibt sich

$$\Delta h = \frac{l}{m}.$$

Die Bestimmung von f bietet gar keine Schwierigkeiten, denn ermittelt man den Cubikinhalt des Stammes, so hat man seine Masse V, welche in die Gleichung $\frac{\pi}{4} f d^2 h$ substituirt, gibt

$$f = \frac{4V}{\pi d^2 h}.$$

Die Gleichung (d) lässt den speciellen Fall $h = o$ zu und es wird

$$(e) \qquad I' = \frac{\pi}{2} f d h \Delta d.$$

Dies trifft bei alten Stämmen zu, an welchen man den Höhenzuwachs als o ansehen kann. Den Zuwachs der Masseneinheit J'' erhält man, wenn man den Zuwachs durch die ganze Masse dividirt, daher

$$(f) \qquad I'' = \frac{2\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h},$$

und für $h = o$

$$(g) \qquad I''' = \frac{2\Delta d}{d}.$$

Um eine numerische Anwendung von diesen Formeln zu machen, betrachten wir z. B. eine Tanne II. Classe (nach Pressler), für welche man im 80. Jahre folgende Daten gefunden:

$d = 0\cdot50^m$, $f = 0\cdot56^m$, $h = 27^m$, $\Delta d = 0\cdot08^m$, $\Delta h = 0\cdot10^m$, daher:

$$I = \frac{3\cdot14}{4} 0\cdot56 \; (54 \, . \, 0\cdot008 + 0\cdot50 \, . \, 0\cdot10) = 0\cdot1059 \text{ Fm.}$$

Man hat für das Volumen dieses Baumes $\frac{\pi d^2}{4} h = 2\cdot65$ Fm. und daher wird das Massenzuwachsprocent, welches gefunden wird, wenn man den Zuwachs durch die Masse des Baumes dividirt, betragen

$$\frac{I}{V} = \frac{0\cdot1059}{2\cdot65} = 0\cdot039 \text{ Fm.}$$

Zu demselben Resultate gelangt man mittelst der Tabelle der „Massenzuwachsprocente rückwärts" von Pressler[1]. Man hat, wenn $n = 10$

$$\frac{D}{D-d} = \frac{0\cdot 50}{0\cdot 08} = 6\cdot 25,$$

welcher Zahl in der Tabelle ein Zuwachsprocent von 40% in 10 Jahren entspricht und hiemit von 4% für das in Betracht gezogene Jahr ein Resultat, welches dem genauen mittelst der Formeln dieses Paragraphes erhaltenen Resultate sehr nahe kommt.

---

[1]) Elementi di tassazione ed assestamento forestale, dell' autore pag. 183 1ª edizione.

Zweiter Theil.

Die umgekehrte Rechnung von den Differenzen.

§. 16. Allgemeines.

In der Rechnung von den Differenzen zog man aus der Beschaffenheit einer Function einen Schluss auf ihre Variation oder ihre Differenz. Bei der entgegengesetzten Operation dagegen schliesst man von einer gegebenen Differenz auf die Function, welche sie geliefert hat. Wenn man z. B. die Function $f(x)$ suchen wollte, die der Gleichung

$$\Delta f(x) = (e^h - 1)\, e^x$$

ihren Ursprung gab, so würde man leicht errathen, dass diese Function $f(x) = e^x$ gewesen sei. So leicht wäre dies jedoch nur in einigen wenigen Fällen und es ist daher nothwendig, die zur Lösung dieser Frage nöthigen Regeln kennen zu lernen. Die Entwickelung dieser Gesetze ist es nun gerade, womit sich die umgekehrte Operation von den Differenzen, die Integralrechnung, beschäftigt.

Nehmen wir an, es bestünde zwischen einer gegebenen Function $f(x)$ und einer andern $\varphi(x)$ das Verhältniss

(1) $$\Delta f(x) = \varphi(x).$$

Unsere Aufgabe würde sich in diesem Falle auf die Aufsuchung der Function $f(x)$ beschränken. Die Ausführung dieser Operation in Bezug auf $\varphi(x)$ bezeichnet man mit dem Symbol Σ, weshalb

(2) $$\Sigma \Delta f(x) = f(x) = \Sigma \varphi(x).$$

Das Symbol Σ annullirt das Zeichen Δ, das heisst, das eine zeigt eine dem andern entgegengesetzte Operation an, weshalb man letztere Operation Integration nennt. Suchen wir nun die Bedeutung dieser neuen Operation zu ermitteln. Setzen wir in die Gleichung $f(x+h) - f(x) = \varphi(x)$ die Reihe der gleich weit abstehenden Glieder a, $a+h$, $a+2h, \ldots$ $a+(n-1)h$, so haben wir

$$
\begin{aligned}
& f(a+h) - f(a) = \varphi(a) \\
& f(a+2h) - f(a+h) = \varphi(a+h) \\
& f(a+3h) - f(a+2h) = \varphi(a+2h) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& f(a+nh) - f(a+(n-1)h) = \varphi(a+(n-1)h).
\end{aligned}
$$

Summiren wir alle diese Gleichungen, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
f(a+nh) - f(a) = \varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \\
+ \varphi(a+(n-1)h),
\end{aligned}
$$

und setzt man $a+nh = x$ und bringt man $f(a)$ auf die rechte Seite, so

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad f(x) = \varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \\
+ \varphi(x-h) + f(a),
\end{aligned}
$$

d. h. $f(x)$ ist eine Summe, oder besser die Summe aller jener Werthe, die $\varphi(x)$ annimmt, wenn man für x die Werthe a, $a+h$, $a+2h, \ldots x-h$ setzt. Da aber der Anfangswerth a dieser Reihe willkürlich und von x unabhängig ist, so vertritt die letzte Function $f(a)$ die Stelle einer willkürlichen Constanten, die man für die einzelnen Fälle besonders bestimmen muss. Fügen wir zur Function $f(x)$ eine willkürliche Constante C und entwickeln hierauf die Differenz, so erhält man noch die Grösse $\Delta f(x)$ als Differenz. Wenn man also von der Function $\Delta f(x)$ ausgehend, jene Function suchen will, von der diese ihren Ursprung nahm, so muss man eine Constante anfügen. Wollen wir daher die Function $f(x)$ vermittelst der Gleichung

$$(4) \qquad \Delta f(x) = e^x (e^h - 1)$$

bestimmen, so wird man schreiben müssen:

$$(5) \qquad f(x) = e^x + C,$$

worin C eine von x unabhängige Constante vorstellt, und da sowohl die Function e^x als auch $e^x + C$ der Gleichung (4) genügen, so ergibt im Allgemeinen die Gleichung

$$\Delta f(x) = \varphi(x),$$

wenn man sie integrirt:

(6) $$f(x) = \Sigma \varphi(x) + C.$$

Construirt man die durch Gleichung (6) ausgedrückten Curven, indem man jeder einzelnen der Constanten C willkürliche und steigende Werthe gibt, so erhält man ebenso viele Curven, die alle gleich weit von einander abstehen, so dass alle ihre Ordinaten um eine constante Grösse von einander verschieden sind, welche Grösse in der Gleichung (6) durch C ausgedrückt ist.

Geht man also von der Differenz einer Function aus, um die Function selbst zu finden, so ist die von derselben ausgedrückte Curve bestimmt, aber nicht auch deren Lage, und man muss die Constante C bestimmen, indem man die Gleichung der Bedingung unterwirft, dass z. B. die Curve durch einen gegebenen Punkt gehen müsse, d. h. dass die Function einen bestimmten Werth annehme für einen gegebenen Werth der unabhängigen Variablen.

Ist das gefundene Integral

(7) $$y = f(x) + C$$

und b, a zwei specielle Werthe, die dieser Gleichung genügen, so wird die Constante bestimmt sein durch

$$C = b - f(a).$$

Sonach wird aus der Gleichung (7)

$$y - b = f(x) - f(a).$$

Bestimmt man die Constante durch die Bedingung, dass die Curve den Anfangspunkt der Axen schneiden müsse, so braucht man nur im gefundenen Integrale (6) x und y gleich Null zu setzen und die Gleichung in Bezug auf C aufzulösen.

§. 17. Integrale endlicher Differenzen zusammengesetzter Functionen.

I. Integrale einer Summe. Es wären $\Delta F(x)$, $\Delta \varphi(x)$, $\Delta \psi(x), \ldots$ verschiedene Functionen der Differenzen von x. Drücken wir sie der Kürze halber durch u, v, $w, \ldots$ aus und nehmen wir sie als algebraische Summe, so dass

(1) $$\Delta F(x) \pm \Delta \varphi(x) \pm \Delta \psi(x) \pm \ldots = u \pm v, \ \pm w \pm \ldots$$

ist. Diese Gleichung kann man auch schreiben:

$$\Delta \{F(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots\} = u \pm v \pm w \pm \ldots$$

und wenn wir integriren:

(2) $$F(x) \mp \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots = \Sigma(u \pm v \pm w \pm \ldots).$$

Wenn man aber andererseits, da

$$\Delta F(x) = u \quad \text{und} \quad F(x) = \Sigma u,$$
$$\Delta \varphi(x) = v \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \Sigma v,$$
$$\Delta \psi(x) = w \quad \text{und} \quad \psi(x) = \Sigma w,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die zweiten Gleichungen algebraisch (mit den Zeichen $\pm$) summirt, so erhält man

$$F(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots = \Sigma u \pm \Sigma v \pm \Sigma w \pm \ldots$$

Combinirt man die Resultate der Gleichnng (2) mit den von dieser letzten gelieferten, so hat man

(3) $$\Sigma(u \pm c \pm w \pm \ldots) = \Sigma u \pm \Sigma v \pm \Sigma w \pm \ldots,$$

womit ausgedrückt wird, dass das Integral der algebraischen Summe mehrerer Functionen gleich ist der algebraischen Summe der Integrale der einzelnen Functionen.

II. Integrale des Productes einer Constanten mit einer Function. Es sei die Function

(4) $$\Delta k F(x) = k \Delta F(x) = ku$$

gegeben. Nach der Integration erhält man:

(5) $$k F(x) = \Sigma k u.$$

Andererseits erfährt man aus der Gleichung (4), dass

$$\Delta F(x) = u \quad \text{und daher} \quad F(x) = \Sigma u$$

oder

(6) $$k F(x) = k \Sigma u \quad \text{ist.}$$

Combinirt man diese Gleichung mit der Gleichung (5), so wird

$$\Sigma k u = k \Sigma u,$$

d. h. das Integral des Productes einer Constanten mit einer Function ist gleich der Constanten multiplicirt mit dem Integrale der Function.

Vereint man diesen Satz mit dem vorhergehenden, so ergibt sich, dass

(7) $$\Sigma(A + Bx + Cx^2 + \ldots) = A\Sigma 1 + B\Sigma x + C\Sigma x^2 + \ldots$$

Nehmen wir an, es sei die Function $y = a^x$ gegeben. Man weiss, dass ihre Differenz ausgedrückt ist durch

$$\Delta a^x = (a^h - 1)\, a^x,$$

was wir auch schreiben können:

$$\frac{\Delta a^x}{a^h - 1} = a^x$$

und wenn wir integriren

$$\frac{a^x}{a^h - 1} = \Sigma a^x + C,$$

wobei die Constante C auch gleich Null sein kann.

III. Integrale des Productes zweier Functionen. Es seien u und v zwei Functionen. Nehmen wir nun die Differenz des Productes $u \Sigma v$, so dass

$$\Delta (u \Sigma v) = uv + \Delta u \Sigma v + v \Delta u,$$

woraus

$$uv = \Delta (u \Sigma v) - \Delta u (v + \Sigma v),$$

und wenn man integrirt:

$$\Sigma uv = u \Sigma v - \Sigma \{\Delta u (v + \Sigma v)\}. \tag{8}$$

Hiebei bemerkt man, dass die Integration des Productes zweier Functionen auch vom Producte zweier anderer Functionen abhängen könne und die neu vorzunehmende Integration grössere Schwierigkeiten bieten könnte, als die der ursprünglichen Function.

Es sei z. B. die Function gegeben:

$$f(x) = xe^x.$$

Die Grösse u ist hier durch x, v durch e^x vertreten. Bilden wir die Grössen Δu und Σv, so erhalten wir

$$\Delta u = h, \quad \Sigma v = \frac{e^x}{e^h - 1},$$

und daher

$$\Sigma xe^x = x \frac{e^x}{e^h - 1} - \Sigma \left\{ h \left(e^x + \frac{e^x}{e^h - 1} \right) \right\},$$

woraus

$$\Sigma xe^x = \frac{xe^x}{e^h - 1} - \Sigma \frac{h e^h e^x}{e^h - 1} = \frac{xe^x}{e^h - 1} - \frac{h e^h e^x}{(e^h - 1)^2},$$

ein Ausdruck, der sich leicht beweisen lässt, indem man die Differenz entwickelt, und so wieder auf die Function xe^x zurückkommt.

Die Gleichung (8) kann auch noch zur Bestimmung eines Quotienten $\frac{u}{w}$ dienen. Man braucht nur $\frac{1}{w} = v$ zu setzen, so dass der Quotient unter der Form eines Productes erscheint.

§. 18. Integration der wichtigsten Functionen.

Die Integrale der endlichen Differenzen von Functionen, bei welchen man die angegebene mit dem Zeichen Σ angezeigte Operation ausführen kann, wird erhalten, indem man die Formeln von der Differenz umkehrt. Es sind ihrer nur wenige und die hauptsächlich wichtigsten sind folgende:

I. Für die Function

$$y = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(m-1)h)$$

haben wir als Differenz (§. 4, Beispiel III) gefunden:

$$\Delta y = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(m-2)h)\,mh.$$

Betrachten wir nun die Function

$$y = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-mh),$$

so wird man als ihre Differenz finden

$$\Delta y = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(m-1)h)(m+1)h,$$

woraus man, wenn man integrirt und für y dessen Werth einsetzt

$$\text{(1)} \qquad \Sigma x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(m-1)h) = \\ = \frac{x(x-h)(x-2h)\ldots(x-mh)}{(m+1)h} + C$$

erhält.

II. Analog finden wir, wenn die Function

$$y = (x-h)\,x\,(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)$$

gegeben ist

$$\Delta y = x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)(m+1)h,$$

und wenn wir dann integriren

$$\text{(2)} \qquad \Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h = \\ = \frac{(x-h)\,x\,(x+h)\,x+2h)\ldots(x+(m-1)h)}{(m+1)h} + C.$$

III. Wir fanden (§. 4, Beispiel IV)

$$\Delta y = \frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}.$$

Integrirt man und setzt für y dessen Werth, so erhält man

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} = \\ = -\frac{1}{mh}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)} + C,$$

oder wenn statt m, $m-1$ gesetzt wird:

$$(3)\qquad \Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)} =$$

$$= -\frac{1}{(m-1)h}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-2)h)} + C.$$

IV. Es sei eine rationale und ganze Function von x gegeben (pag. 15). Jeder Ausdruck besteht aus dem Producte einer Constanten mit einer gewissen Potenz von x, weshalb man nur eine Function von der Form x^m zu integriren braucht. Suchen wir die Differenz der Function x^{m+1}, so finden wir

$$\Delta x^{m+1} = (m+1)\,x^m h + \frac{(m+1)\,m}{1.2}\,x^{m-1}\,h^2 +$$

$$+ \frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1.2.3}\,x^{m-2}\,h^3 + \ldots.$$

Suchen wir nun x^m, so erhalten wir nach der Integration:

$$(4)\qquad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,h} =$$

$$= \left\{\frac{mh}{1.2}\,\Sigma x^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.2.3}\,h^2\,\Sigma x^{m-2} + \ldots\right\},$$

worin die Constante gleich Null ist, weil für $x = o$ alle Glieder gleich Null werden.

Man sieht, dass die Integration der Function x^m abhängt von jener der Function x^{m-1}, $x^{m-2}\ldots x$, x^0 und es ist daher immer möglich, das Integral von x^m zu finden, wenn man nur vorher jene von x^0, x, $x^2,\ldots$, bei successiver Einsetzung von $m = 0, 1, 2, 3\ldots$ gefunden hat. Es seien nun A_0, A_1, $A_2,\ldots$ Constante und

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

eine rationale und ganze Function von x, so ist das Integral dieser Function

$$\Sigma\,(A_0 + A_1\,x, A_2\,x^2 + \ldots) = A_0\,\Sigma 1 + A_1\,\Sigma x + A_2\,\Sigma x^2 + \ldots$$

Wie ersichtlich, kann man das allgemeine Glied durch Σx^m ausdrücken, daher führt man die Integration einer ganzen und rationalen Function auf die von Σx^m zurück.

V. Um eine Function von der Form $a^x f(x)$, worin $f(x)$ eine rationale und ganze Function von x bedeuten soll, zu integriren, erinnere man sich, dass

$$\Delta a^x = a^x(a^h - 1)$$

ist, woraus man, wenn integrirt wird

$$a^x = (a^h - 1)\,\Sigma a^x \text{ oder } \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C$$

erhält.

Nachdem wir dies festgestellt, wenden wir die Methode der theilweisen Integrirung (§. 17, Gleichung 8) auf die Function $a^x f(x)$ an, und setzen $f(x) = u$, $a^x = v$. Wir haben dann

$$\Sigma\, a^x f(x) = f(x)\frac{a^x}{a^h - 1} - \Sigma\left\{\Delta f(x)\left(a^x + \frac{a^x}{a^h - 1}\right)\right\} =$$

$$(5) \qquad = \frac{a^x f(x)}{a^h - 1} - \Sigma a^x \Delta f(x) =$$

$$= \frac{1}{a^h - 1}\left\{a^x f(x) - a^h\,\Sigma a^x \Delta f(x)\right\} + C.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Integral der Function $a^x f(x)$ abhängt von jenem der Function $a^x \Delta f(x)$ und dass dieses seinerseits von jener der Function $a^x \Delta^{(2)} f(x)$ abhängt u. s. w. So wie man aber, wie wir gesehen haben, das Integral einer rationalen und ganzen Function $f(x)$ immer finden kann, so ist auch die Integration der Function $a^x f(x)$ immer möglich, nur dass man die theilweise Integration so lange wird fortsetzen müssen, bis die Function $f(x)$ unter dem Zeichen der Integration verschwindet. Ist daher diese Function von der m^{ten} Ordnung, so wird man diese Operation $m + 1$ mal wiederholen müssen.

Integrirt man die Function $a^x \Delta f(x)$ nach der Methode der theilweisen Integration und setzt man $\Delta f(x) = u$, $a^x = v$, so ist:

$$\Sigma\, a^x \Delta f(x) = \Delta f(x)\frac{a^x}{a^h - 1} - \Sigma\,\frac{a^x}{a^h - 1}\,\Delta^{(2)} f(x) - \Sigma a^x \Delta^{(2)} f(x) =$$

$$= \Delta f(x)\,\frac{a^x}{a^h - 1} - a^{2h}\,\Sigma\, a^x \Delta^{(2)} f(x).$$

Integriren wir dann noch die Function $\Sigma a^x \Delta^{(2)} f(x)$, so finden wir

$$\Sigma a^x \Delta^{(2)} f(x) = \Delta^{(2)} f(x)\,\frac{a^x}{a^h - 1} - a^{3h}\,\Sigma a^x \Delta^{(3)} f(x) \text{ u. s. w.}$$

Durch wiederholte Substitutionen gelangt man endlich zu folgendem Werthe:

$$(6)\quad \Sigma a^x f(x) = \frac{a^x}{a^h-1}\left\{f(x) - \frac{a^h}{a^h-1}\Delta f(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^{2h}}{(a^h-1)^2}\Delta^{(2)} f(x) - \frac{a^{3h}}{(a^h-1)^3}\Delta^{(3)} f(x) + \dots\right\} + C.$$

und im speciellen Falle, wo $f(x) = x^m$ ist:

$$\Sigma a^x x^m = \frac{a^x}{a^h-1}\left\{x^m - \frac{a^h}{a^h-1}\Delta x^m + \frac{a^{2h}}{(a^h-1)^2}\Delta^{(2)} x^m - \dots\right\}.$$

Die Constante C ist gleich Null, da alle Werthe dieses Ausdruckes, wenn man $x = 0$ angenommen hat, gleich Null sind. Setzt man darin m nach und nach gleich 0, 1, 2, 3,..., so hat man

$$\Sigma a^x x^0 = \frac{a^x}{a^h-1},$$

$$\Sigma a^x x = \frac{a^x}{a^h-1}\left\{x - \frac{h a^h}{a^h-1}\right\},$$

$$\Sigma a^x x^2 = \frac{a^x}{a^h-1}\left\{x^2 - \frac{h a^h}{a^h-1}(2x+h) + \frac{2ha^2h}{(a^h-1)^2}\right\},$$

. . . .

VI. Es seien endlich die Functionen

$$f(x)\, sin\, a\, x, \quad f(x)\, cos\, a\, x$$

gegeben, worin $f(x)$ eine ganze und rationale Function von x bedeutet.

Man setze nun vorerst $f(x) = 1$ und entwickle die Differenz dieser beiden Functionen, so findet man (§. 2, Beispiel IV)

$$\Delta\, sin\, a\, x = 2\, sin\, \frac{a h}{2}\, cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta\, cos\, a\, x = -2\, sin\, \frac{a h}{2}\, sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Setzen wir nun in diesen Gleichungen $x - \frac{h}{2}$ anstatt x

$$\Delta sin\, a\left(x - \frac{h}{2}\right) = 2 sin\, \frac{a h}{2}\, cos\, a\, x,$$

$$\Delta cos\, a\left(x - \frac{h}{2}\right) = -2\, sin\frac{a h}{2}\, sin\, a\, x.$$

Diese Gleichungen in Bezug auf $\cos a\, x$ und $\sin a\, x$ aufgelöst und integrirt ergeben

$$\Sigma \cos a\, x = \frac{\sin a\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{a h}{2}} + C,$$

$$\Sigma \sin a\, x = \frac{2 \cos a\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{a h}{2}} + C.$$

Um die Integrale

$$\Sigma f(x) \cos a\, x, \quad \Sigma f(x) \sin a\, x$$

zu erhalten, wird man die Methode der theilweisen Integration anwenden oder die trigonometrische Function in einer Reihe entwickeln können.

§. 19. Summen-Ausdrücke einiger Reihen.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Rechnung von den Differenzen besteht in der Auffindung der Summe einer gewissen Anzahl von Gliedern einiger Reihen, deren Bildungsgesetz man kennt. Diese Reihen finden auch in der Forstwissenschaft häufige Anwendung und wir behandeln unter den wichtigsten folgende:

I. Reihe der natürlichen Zahlen. Man erinnere sich der Gleichung (4) des vorhergehenden Paragraphes.

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\, h} -$$

$$- \left\{ \frac{m h}{1.2} \Sigma x^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.2.3} h^2 \Sigma x^{m-2} + \ldots \right\}.$$

Setzt man in derselben nach und nach $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so findet man

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \frac{x}{h},\\
\Sigma x &= \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2},\\
\Sigma x^2 &= \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{xh}{2.3},\\
\Sigma x^3 &= \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2h}{2.2},\\
\Sigma x^4 &= \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3h}{3} - \frac{xh^3}{5.6},\\
\Sigma x^5 &= \frac{x^6}{6h} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4h}{2.6} - \frac{x^2h^3}{2.6},\\
\Sigma x^6 &= \frac{x^7}{7h} - \frac{x^6}{2} + \frac{x^5h}{2} - \frac{x^3h^3}{6} + \frac{xh^5}{6.7},\\
\Sigma x^7 &= \frac{x^8}{8h} - \frac{x^7}{2} + \frac{7x^6h}{2.6} - \frac{7x^4h^3}{2.3.4} + \frac{x^2h^5}{2.6},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Diese Formeln kann man natürlich auf die Summe der Reihen der zu einer beliebigen Potenz erhobenen natürlichen Zahlen anwenden. Man braucht nur $h = 1$ zu setzen, und da das Zeichen Σ sich bis auf den Ausdruck, der den Werth von $x - h$ oder $x - 1$ (§. 16, Gleichung (3)) annimmt, ausdehnt, so muss man jeder Reihe einen Endausdruck geben. Die neuen Summen, die man erhält, möge man mit S bezeichnen, so dass

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
S_1^n\, x &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n,\\
S_1^n\, x^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,\\
S_1^n\, x^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

wobei der obere und untere Index die Extreme der Reihen bezeichnen, d. h. das erste und letzte Glied oder 1 und n. Nachdem wir dies angenommen, verwandeln sich die Gleichungen (1) in folgende:

$$S_1^n x = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n+1),$$

$$S_1^n x^2 = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2.3} = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1),$$

$$S_1^n x^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2.2} = \frac{n^2}{4}(n+1)^2,$$

$$S_1^n x^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{3} + \frac{n}{5.6} =$$

(3)

$$= \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$S_1^n x^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{2.6} - \frac{n^2}{2.6},$$

$$S_1^n x^6 - \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{6.7},$$

$$S_1^n x^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{2.6} - \frac{7n^4}{2.3.4} + \frac{n^2}{2.6},$$

. . . .

In diesen verschiedenen Summen hebe man die höchste Potenz von n heraus:

$$S_1^n x = n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right),$$

$$S_1^n x^2 = n^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2.3.n^2}\right),$$

$$S_1^n x^3 = n^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2.2.n^2}\right),$$

$$S_1^n x^4 = n^5 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{5.6.n^3}\right),$$

. . . .

und wird weiters angenommen, dass die Anzahl der Ausdrücke unendlich werde, so nähern sich die Grössen in den Klammern, mit Ausnahme der ersten, der Nulle, so dass die Grenzen dieser verschiedenen Summen sein werden:

$$lim\, S_1^n x = \frac{n^2}{2},$$

$$lim\, S_1^n x^2 = \frac{n^3}{3},$$

$$lim\, S_1^n\, x^3 = \frac{n^4}{4},$$

$$lim\, S_1^n\, x^4 = \frac{n^5}{5},$$

. . . . .

Formeln, welche in der Forsttaxation ausserordentlich häufig angewendet werden.

II. Figurirte Zahlen. Man habe folgende Reihen

$$
(4) \qquad \begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots \\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots \\ 1,\ 4,\ 7, 10, 13, \ldots \\ \ldots\ldots \end{array}
$$

die mit den constanten Differenzen 1, 2, 3... fortschreiten. Nimmt man eine dieser Reihen, z. B. die erste, schreibt ihr erstes Glied an, dann die Summe der beiden ersten, der drei ersten, der vier ersten etc., so bildet sich die neue Reihe

(5) $$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$$

Wiederholt man denselben Vorgang bei dieser Reihe, so erhält man folgende

(6) $$1, 4, 10, 20, 35, \ldots$$

und aus dieser

(7) $$1, 5, 15, 35, 70, \ldots$$

Wenn man so weiter vorgeht, so erhält man neue Reihen, die man mit dem Namen der figurirten Zahlen zusammenfasst.

Die Endglieder der unter (4) verzeichneten Reihen sind:

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}, \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}, \quad \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}, \ldots$$

Wendet man die Gleichung (2) des vorhergehenden Paragraphes zur Aufsuchung (2) des Summenausdruckes dieser letzten Reihen an und setzt $h = 1$, so erhält man:

$$\Sigma x = \frac{(x-1)\,x}{2}$$

$$\Sigma \frac{x(x+1)}{1\,.\,2} = \frac{1}{1\,.\,2}\, \Sigma x(x+1) = \frac{(x-1)\,x\,(x+1)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$\Sigma \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3} \Sigma x(x+1)(x+2) =$$
$$= \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1.2.3.4},$$

. . . .

Um diese Summe bis auf das n^{te} Glied auszudehnen, muss man, wie bekannt (§. 16), das n^{te} Glied selbst hinzufügen. Wenn wir nun, wie vorher mit $S_1{}^n$ die neue Summe, die sich von 0 bis inclusive n ausdehnt, bezeichnen, so erhalten wir

$$S_1{}^n x = \frac{(n-1)n}{1.2} + n = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

(8)
$$S_1{}^n \frac{x(x+1)}{1.2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} + \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$
$$S_1{}^n \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

. . . .

Das Bildungsgesetz ist klar und deutlich. Die Summe einer jeden dieser Reihe ist nämlich das allgemeine Glied der Reihe der unmittelbar höheren Ordnung, ein Verhältniss, das allgemein bekannt ist und als Definition der figurirten Zahlen selbst angesehen werden kann.

Die reciproken Reihen, welche als allgemeine Glieder die Ausdrücke

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1.2}{n(n+1)}, \quad \frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}, \ldots$$

haben, summirt man mit Hilfe der Formel (3) §. 18, mit Ausnahme der ersten, für welche die Formel nicht taugt, weil der eine Factor im Nenner wegfällt. Für die andern Reihen findet man dann

(9)
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1.2}{n(n+1)} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1},$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)},$$

. . . .

Setzt man $n = \infty$, so convergiren diese Reihen gegen die Grenze 2, $\frac{3}{2}, \ldots$

III. Geometrische Progressionen. Wir fanden früher, dass

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C.$$

Wenn wir nun diese Constante durch die Bedingung bestimmen, dass für $x = 0$ die Function den Werth 1 erhalte, so haben wir

$$C = \frac{-1}{a^h - 1}$$

und daher

$$\Sigma_0^n a^x = \frac{a^n}{a^h - 1} - \frac{1}{a^h - 1} = \frac{a^n - 1}{a^h - 1}.$$

Setzen wir $h = 1$, so repräsentirt dieses Integral die Summe von

$$a^0 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Will man dann in diese Reihe auch den Ausdruck a^n aufnehmen, so hat man

$$(10) \qquad S_0^n a^x = \frac{a^n - 1}{a - 1} + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Aus dieser Gleichung wird, wenn wir auch die Extreme der Reihe aufnehmen

$$(11) \qquad S_0^n a^x = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n.$$

Wenn endlich die Reihe mit a und nicht mit der Einheit anfangen würde, so hätte man

$$(12) \qquad S_1^n a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} - 1 = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n.$$

§. 20. Anwendung der Summen einiger Reihen.

Analytische Darstellung des Gesetzes von der Holzmasse eines Waldes. Im Vorhergehenden haben wir gefunden (§. 10), dass man gebräuchlicher Weise das Zuwachsgesetz eines Waldes durch eine Function von der Form

$$(1) \qquad y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$$

ausdrücken kann, und wie man die Coefficienten a, b, c bestimmen könne. Aber das Aufstellen dieses Gesetzes ist um vieles sicherer, wenn man die Holzmassen eines Hektars Wald, die einem gegebenen Alter des Bestandes entsprechen, bestimmt und ein dem in der Function (1) bestehenden ähnliches Verhältniss aufstellt und zwar zwischen den Massen und den bezüglichen Altersstufen, und dann aus diesem Verhältnisse auf den laufend jährlichen Zuwachs schliesst.

Man denke sich zu diesem Zwecke das Alter x, innerhalb dessen der Zuwachs y eines gegebenen Bestandes vor sich gegangen ist, in eine Anzahl von n Zeitintervallen, die wir als Einheiten annehmen wollen, getheilt.

Setzt man in der Gleichung (1) x nach und nach gleich $1, 2, 3, \ldots n$ Theilen dieser Intervalle, so erhält man den Zuwachs, der in jedem von ihnen stattgefunden, so dass, wenn $y_1, y_2, \ldots y_n$ die bezüglichen Zuwächse bedeuten, am Ende der verschiedenen Intervalle erhalten wird:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 &= a + b\,1^2 + c\,1^3 + \ldots \\ y_2 &= a2 + b2^2 + c2^3 + \ldots \\ y_3 &= a3 + b3^2 + c3^3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= an + bn^2 + cn^3 + \ldots \end{aligned}$$

Summirt man diese verschiedenen Zuwächse, die in den einzelnen Zeitintervallen stattgehabt haben, so hat man die Masse V_x, die in einem gegebenen Alter $n = x$ sich vorfindet, oder

$$\begin{aligned} V_x = a\,(1 + 2 + 3 + \ldots + x) + b\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + x^2) + \\ + c\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + x^3) + \ldots \end{aligned}$$

Wird die Anzahl $n = x$ der Intervalle unendlich gross und setzt man an Stelle der Grössen in den Klammern die Grenzwerthe, gegen welche sie convergiren, so erhält man

$$V_x = \frac{a}{2}\,x^2 + \frac{b}{3}\,x^3 + \frac{c}{4}\,x^4 + \ldots$$

und wenn man $A = \frac{a}{2}$, $B = \frac{b}{3}$, $C = \frac{c}{4}$ setzt,

$$(3) \qquad V_x = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \ldots,$$

welche Formel das Gesetz der Holzmassen eines Waldes für eine gegebene Holzart, für bestimmte Bodenverhältnisse, Klima, Lage etc. ausdrückt, welche Bedingungen, da sie constant sind, durch A, B, C dargestellt sind.

Von dieser Gleichung (3) kann man auf die Gleichung (1), welche den laufendjährlichen Zuwachs mit seinem entsprechenden Alter verbindet, zurückgehen. In der That, man braucht nur zu bedenken, dass die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Werthen der Gleichung (3) den jährlichen Zuwachs I vorstellt. Deshalb setzen wir in dieser Gleichung $x + 1$ anstatt x und subtrahiren dieselbe von der Gleichung (3). Beschränken wir uns auf die ersten drei Ausdrücke, so hat man

$$I = V_{x+1} - V_x = A\,(x + 1)^2 + B\,(x + 1)^3 + \\ + C\,(x + 1)^4 - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4.$$

Entwickeln und behalten wir dabei bei jeder Entwicklung nur die zwei ersten Ausdrücke bei, die ja die grössten und massgebendsten sind, so haben wir

$$I = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3.$$

Setzen wir darin statt A, B, C deren Werthe, so kommen wir vollständig auf die Gleichung (1) zurück.

Um die Coefficienten A, B, C zu bestimmen, wird man verschiedene Versuche anstellen, indem man die den verschiedenen Altersstufen entsprechenden Massen zu ermitteln sucht.

Die Aufgabe wird unbestimmt, bestimmt oder mehr als bestimmt sein, je nachdem die Anzahl der Beobachtungen kleiner, gleich oder grösser ist, als jene der Coefficienten, die man auf der rechten Seite der Gleichung (3) beibehalten will. Im letzteren Falle wird man zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C,... die Methode der kleinsten Quadrate oder aber andere Methoden der Interpolation anwenden können. Die hier auseinandergesetzte Methode zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem laufendjährlichen Zuwachs und dem ihm entsprechenden Alter führt zu sehr genauen Resultaten; denn begeht man auch einen kleinen Fehler bei der Bestimmung der Massen, so wird er in den folgenden Operationen nicht vergrössert.

D u r c h s c h n i t t s z u w a c h s. Den durchschnittlichen Zuwachs m findet man, indem man die einem gewissen Alter entsprechende Holzmasse durch das Alter (in Jahren ausgedrückt) dividirt. Daher

$$I_m = \frac{V_x}{x} \tag{4}$$

oder aber, wenn wir für V_x dessen Werth substituiren

$$I_m = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \tag{5}$$

Dieser Gleichung wird man jedoch in der Praxis immer die Gleichung (4) vorziehen.

Normalvorrath. Unter dem normalen Vorrathe versteht man jene Holzmenge, die ein Wald, dessen Alters- und Zuwachsverhältnisse normal sind, liefert. Man kann den normalen Vorrath auch dann erzielen, wenn nur eine dieser Grundbedingungen normal ist. Es braucht nur der Abgang, der sich bei einer Classe zeigt, durch den Ueberschuss der andern gedeckt zu sein. Dann erzielt man beim Fällen eine jährlich gleich grosse Masse. Im Allgemeinen muss man aber die finanzielle Umtriebszeit unberücksichtigt lassen, indem man bald früher, bald später die Fällung wird vornehmen müssen. Die Grösse dieses Vorrathes hängt ab:

a) von der Grösse des normalen Zuwachses, durch welchen der Vorrath gebildet wurde und durch welchen die Verminderung, die in Folge des Fällens eintritt, sich ersetzt, mit einem Worte alle Ursachen, die diesen modificiren können, wie die Ausdehnung des Waldes, die Bestandesform, der Boden, Wirthschaftsbetrieb etc.;

b) vom Turnus, denn hat dieser eine längere Dauer, so wird auch die Anzahl der jährlichen Abtriebe grösser, und obschon er ihre Ausdehnung vermindert, so erreicht das Holz doch ein höheres Alter, als bei einem kürzeren Turnus;

c) von der Zeit, in welcher man den Vorrath schätzt. Er ist am grössten nach dem herbstlichen Zuwachse vor der Fällung alter Stämme und am geringsten allsogleich nach diesem Schlage und bei Beginn des neuen Zuwachses im Frühjahre. Im Sommer hat er einen mittleren Werth, weil er den halben Zuwachs des laufenden Jahres besitzt.

Ist nun dies bekannt und wir bilden die Summe der Holzmassen, die den verschiedenen Altersstufen entsprechen, wie wir dies bei den Zuwächsen gethan haben, indem wir in der Gleichung (3) für x nach und nach 1, 2, 3,... gesetzt, so gelangen wir zu einer Gleichung, welche den normalen Vorrath, der dem Alter x entspricht und den wir durch PN_x bezeichnen, ausdrückt, nämlich:

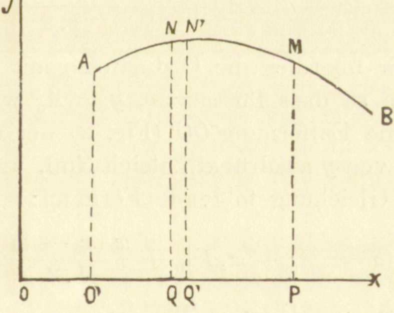
$$PN_x = \frac{A}{3} x^3 + \frac{B}{4} x^4 + \frac{C}{5} x^5 + \ldots \tag{6}$$

Auf ähnliche Weise, wie wir von den Massen auf den laufendjährlichen Zuwachs übergegangen sind, kann man von dieser Gleichung auf jene der Massen übergehen, so dass, wenn ein Gesetz des laufendjährlichen Zuwachses, der Massen, des Durchschnittszuwachses und des normalen Vorrathes bekannt ist, man alle andern finden kann.

§. 21. Formeln zur näherungsweisen Quadratur einer Fläche.

Das Problem der Bestimmung von durch Curven begrenzten Flächen war eines von denjenigen, welche die Integralrechnung in's Leben riefen. Die gebrauchten Symbole sind klare Andeutungen des zur Lösung des Problems nöthigen Vorgehens. Es sei AB (Fig. 2) eine auf rechtwinklige Axen bezogene Curve und $y = f(x)$ deren Gleichung. Trachten wir nun die zwischen einem Theile dieser Curve, den

Fig. 2.



äussersten Ordinaten und der x Axe enthaltene Fläche zu bestimmen. Als äusserste Ordinaten des Bogens nehme man $O'A$

und MP, und NQ und $N'Q'$ zwei beliebig weit abstehende Ordinaten von Δx. Nimmt man Δx als klein an, so kann man den Flächeninhalt des Trapezes $NQQ'N'$ als den eines Rechteckes ansehen, weshalb man den ganzen Flächeninhalt A der Figur $O'AMP$ ansehen kann als den Grenzwerth der Summe von so und so vielen diesem analogen Rechtecken, daher

$$A = \lim \Sigma y \Delta x, \tag{1}$$

wenn man das Zeichen Σ auf die entsprechenden Punkte auf den Abscissen der Bogenenden ausdehnt. Setzt man für y dessen durch x ausgedrückten Werth, so hat man

$$A = \lim \Sigma f(x) \Delta x, \tag{2}$$

was man in der Infinitesimalrechnung

$$A = \int f(x)\, dx \tag{3}$$

schreibt.

Wenn aber die Curve statt durch ihre Gleichung durch Punkte gegeben ist und $n + 1$ gleich weit abstehende Ordinaten derselben bekannt sind, deren Werthe $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ wären, so kann man einen näherungsweisen Ausdruck für die innerhalb dieser Curve liegende Fläche, ihre äussersten Ordinaten und die Axen von x finden.

Nehmen wir an, die constante Entfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten sei gleich der Einheit, dann ergibt uns die Newton'sche Formel als Gleichung der Curve

$$y = f(x) = A_0 + (x - a)\Delta A_0 + \frac{(x-a)(x-a-1)}{1.2}\Delta^{(2)}A_0 + \ldots$$

Lassen wir überdies die Ordinate A_0 mit der Axe von y zusammenfallen, so dass für $x = o$, $y = A_0$ wird, so ist der Werth a, der die Entfernung OO' (Fig. 2) der ersten Ordinate von den Axen von y ausdrückt, gleich Null, und es nimmt die vorhergehende Gleichung folgende Form an:

$$y = f(x) = A_0 + x\Delta A_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^{(2)}A_0 +$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^{(3)}A_0 + \ldots$$

oder

$$(4)\quad y = A_0 + x\Delta A_0 + \frac{\Delta^{(2)}A_0}{1.2}(x^2 - x) + \frac{\Delta^{(3)}A_0}{1.2.3}(x^3 - 3x^2 + 2) +$$

Wenn wir uns nun die Abscisse x in eine sehr grosse Anzahl Theile (n) zerlegt denken, von welchen wir jeden einzelnen der Einheit gleich setzen; wenn wir weiters in der Gleichung (4) x nach und nach gleich 1, 2, 3 ... n setzen, so erhalten wir die den n Punkten entsprechenden untereinander sehr nahen Ordinaten. Wenn wir jede derselben mit h, der Entfernung zwischen zwei auf einander folgenden Ordinaten multipliciren, so erhält man den Flächeninhalt der einzelnen Rechteckchen

$$h\left\{A_0 + \Delta A_0 + \frac{\Delta^{(2)}A_0}{1.2}(1^2 - 1) + \frac{\Delta^{(3)}A_0}{1.2.3}(1^3 - 3.1^2 + 2.1) + \ldots\right\}$$

$$h\left\{A_0 + 2\Delta A_0 + \frac{\Delta^{(2)}A_0}{1.2}(2^2 - 2) + \frac{\Delta^{(3)}A_0}{1.2.3}(2^3 - 3.2^2 + 2.2) + \ldots\right\}$$

. . . .

Summirt man die Flächeninhalte aller dieser Rechteckchen, so erhält man den Gesammtflächeninhalt der Figur

$$\begin{aligned} A = h\Big\{ & nA_0 + \Delta A_0(1 + 2 + \ldots) + \\ & + \frac{\Delta^{(2)}A_0}{1.2}\Big(1^2 + 2^2 + \ldots - (1 + 2 + \ldots)\Big) + \\ & + \frac{\Delta^{(3)}A_0}{1.2.3}\Big((1^3 + 2^3 + \ldots) - 3(1^2 + 2^2 + \ldots) + \\ & + 2(1 + 2 + \ldots)\Big) + \ldots\Big\}. \end{aligned}$$

Dieser Flächeninhalt wird sich um so mehr dem wahren nähern, je kleiner die Einheit ist, in welche man die Axe getheilt hat, d. h. je grösser n ist. Wenn man daher n möglichst gross macht und an Stelle der Reihensumme der natürlichen Zahlen, Quadrate, Cuben etc. die Grenzwerthe, zu welchen diese Summen hinstreben, setzt, so erhält man:

$$(5)\quad A = h\left\{nA_0 + \frac{n^2}{2}\varDelta A_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{\varDelta^{(2)}A_0}{1.2} + \right.$$
$$+\left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{\varDelta^{(3)}A_0}{1.2.3} +$$
$$\left. + \left(\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - 3n^2\right)\frac{\varDelta^{(4)}A_0}{1.2.3.4} + \ldots\right\}.$$

Sobald A_0, $\varDelta A_0$, $\varDelta^{(2)}A_0, \ldots$ bekannt sind, kann man näherungsweise den Flächeninhalt einer beliebigen Figur finden, wenn man die Differenzen einer gewissen Ordnung vernachlässigt. Betrachten wir einige Specialfälle dieser Gleichung. Setzen wir n nach und nach gleich 1, 2, 3,... und berücksichtigen wir, dass die den höheren, der zweiten, dritten etc. Ordnung entsprechenden Differenzen gleich Null sind, so hat man für

$$n = 1 \quad A' = \frac{h}{2}(2A_0 + \varDelta A_0),$$

$$n = 2 \quad A'' = \frac{h}{3}(6A_0 + 6\varDelta A_0 + \varDelta^{(2)}A_0),$$

$$n = 3 \quad A''' = \frac{3}{8}h(8A_0 + 12\varDelta A_0 + 6\varDelta^{(2)}A^0 + \varDelta^{(3)}A_0),$$

$$n = 4 \quad A'''' = \frac{4}{45}h(45A_0 + 90\varDelta A_0 + 75\varDelta^{(2)}A_0 + $$
$$+ 720\varDelta^{(3)}A_0 + 84\varDelta^{(4)}A_0),$$

$$n = 5 \quad A''''' = \frac{5}{12}h(12A_0 + 30\varDelta A_0 + 70\varDelta^{(2)}A_0 + 135\varDelta^{(3)}A_0 +$$
$$+ 6170\varDelta^{(4)}A_0 + 95\varDelta^{(5)}A_0),$$

. . . .

Setzen wir dann an Stelle der Differenzen die entsprechenden Entwickelungsresultate

$$\varDelta A_0 = A_1 - A_0,\quad \varDelta^{(2)}A_0 = A_2 - 2A_1 + A_0,\quad \varDelta^{(3)}A_0 =$$
$$= A_3 - 3A_2 + 3A_1 - A_0,$$

so erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$A' = \frac{h}{2}(A_0 + A_1),$$

$$A'' = \frac{h}{3}(A_0 + 4A_1 + A_2),$$

$$(6)\quad A''' = \frac{3h}{8}(A_0 + 3A_1 + 3A_2 + A_3),$$

$$A'''' = \frac{h}{45}(14(A_0 + A_4) + 64(A_1 + A_3) + 24A_2),$$

$$A''''' = \frac{5h}{12}(5992A_0 - 22310A_1 + 35735A_2 - 25595A_3 + \\ + 5495A_4 + 95A_5),$$

. . . . " .

Anmerkung I. Setzt man in der Gleichung (5) $n = 6$ und berechnet nun die Coefficienten, so erhält man

$$(7)\quad A'''''' = h\Big\{6A_0 + 18\Delta A_0 + 27\Delta^{(2)}A_0 + 24\Delta^{(3)}A_0 + \\ + \frac{123}{10}\Delta^{(4)}A_0 + \frac{33}{10}\Delta^{(5)}A_0 + \frac{41}{140}\Delta^{(6)}A_0\Big\}$$

worin der Coefficient $\frac{41}{140}$ sich vom Bruch $\frac{3}{10}$ nur um $\frac{1}{140}$ unterscheidet und, da nach der Natur der Linien, die man in Betracht gezogen hat, die aufeinander folgenden Differenzen fortwährend kleiner werden, so wird, wenn man den Bruch $\frac{3}{10}$ anstatt $\frac{41}{140}$ nimmt, in der sechsten Differenz der in die Rechnung aufgenommene Fehler sehr gering und gegenüber den anderen Ausdrücken leicht zu vernachlässigen sein. Mit dieser Aenderung in der Gleichung (7) und wenn anstatt der Differenzen deren Werthe eingesetzt werden, erhält man folgenden einfachen und wichtigen Ausdruck:

$$(8)\quad A'''''' = \frac{3h}{10}\{A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + 5(A_1 + A_5) + 6A_3\},$$

worin h den constanten Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten bezeichnet. Diese Formel ist unter dem Namen die „Regel von Weddle" bekannt.

Anmerkung II. Man ermittle die durch eine Curve, durch eine Gerade und die auf diese Gerade senkrechten äussersten Ordinaten eingeschlossene Fläche. Man theile die Curve in eine Anzahl von n gleichen Segmenten, so dass die zu bestimmende Fläche in n kleine Rechtecke von gleicher Höhe getheilt werde. Betrachtet man nun das erste Paar dieser Rechtecke, deren Ordinaten A_0, A_1, A_2 sind, so findet man als Fläche

$$\frac{h}{3}(A_0 + 4A_1 + A_2)$$

und ebenso für die folgenden Paare von Rechtecken

$$\frac{h}{3}(A_2 + 4A_3 + A_4),$$

$$\frac{h}{3}(A_4 + 4A_5 + A_6),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{h}{3}(A_{n-2} + 4A_{n-1} + A_n).$$

Summirt man die Inhalte aller dieser Flächenpaare, so hat man im folgenden Ausdrucke den ganzen Flächeninhalt der Figur, den man sucht:

$$(9)\quad A = \frac{h}{3}\{A_0 + A_4 + 4(A_1 + A_3 + A_5 + \ldots) + + 2(A_2 + A_4 + A_6 + \ldots)\}$$

Diesen Ausdruck nennt man die Formel von Simpson, und sowohl diese als die Gleichung (8) gelten für die speciellen Fälle, in welchen eine oder beide äussersten Ordinaten gleich Null sind.

Die Anwendung dieser Formel zur Interpolation von Flächen ergibt genügend genaue Resultate, wenn man zwischen den Ordinaten genügend kleine Abstände annimmt.

§. 22. Berechnung des Cubikinhaltes „dendrometischer Urtypen".

Jeden Stamm oder Stumpf kann man sich allgemein entstanden denken durch Rotation einer Linie um eine andere Gerade, die man sich als Axe des durch diese Bewegung entstandenen Körpers denken kann. In der forstlichen Stereometrie hat man einige Typen aufgestellt, welche man „dendrometrische Urtypen" nennt und in welche jeder Stamm, wie gross auch seine Masse sein möge, inbegriffen ist. Zu diesen Urtypen gehören: der

Cylinder, das Rotationssemiellipsoid, das (apollonische) Paraboloid, der Kegel und das Neiloid, deren Volumen immer eine Function des Grundflächendurchmessers, der Höhe und einer Zahl, die von der Form des Stammes abhängt, ist. Diese letztere hängt wieder ab vom Alter, von der Ausdehnung der Krone, von der Stärke der Zweige und von vielen anderen Umständen, die bei der Taxation zu berücksichtigen sind.

Die Rechnung von den Differenzen ermöglicht es, elementare Regeln zur Bestimmung der Volume einiger Rotationskörper aufzustellen. Man wird vorerst einen allgemeinen Begriff für diese Bestimmung aufstellen und ihn dann auf die Berechnung des Cubikinhaltes der dendrometrischen Urtypen anwenden. Stellen wir uns eine beliebige ebene, in Bezug auf eine Gerade symmetrische Curve vor und lassen wir dieselbe um erstere rotiren, so wird sie einen Körper erzeugen, den man einen Rotationskörper nennt. Man denke sich weiters diesen Körper vermittelst senkrecht auf die Rotationsaxe gestellter Ebenen in eine Anzahl von Sectionen von gleicher Höhe zerlegt. Ihr Volumen findet man, wenn man sie als so viele Cylinder von verschiedenen Radien πy^2 und gleicher Höhe ansieht, und man wird eine um so grössere Annäherung an den richtigen Werth erreichen, je grösser man die Anzahl der Sectionen angenommen hat. Bezeichnet h die constante Höhe dieser Cylinder, so wird das Volumen oder die Masse V eines Körpers, dessen Erzeugungslinie $y = f(x)$ als Gleichung hat, ausgedrückt sein durch die Summe der Volumen $\pi y^2 h$, oder von

$$V = lim\, \pi \Sigma y^2 h, \tag{1}$$

oder

$$V = \pi \int y^2 dx; \tag{2}$$

ein Integral, das bis auf die Grenzen des Körpers sich erstrecken muss.

Nimmt man den Ausgangspunkt der Axen im Centrum oder im Scheitel der Curve an und lässt die x Axe mit der Symmetrieaxe zusammenfallen, so ist die Constante, welche das Integrale (1), (2) vervollständigen müsste, gleich Null.

Unter diesen Bedingungen finden wir das Volumen des Rotations-Semiellipsoids, des Paraboloids von Apollonius und des Neiloids.

Das Rotations-Semiellipsoid. Das Rotationsellipsoid oder das zweiaxige Ellipsoid kann man sich durch die Rotation einer Ellipse um eine ihrer Axen entstanden denken. Wir werden nur jenen Theil desselben in Betracht ziehen, welcher durch die Rotation einer halben Ellipse um ihre halbe grössere Axe entstanden ist. Die Gleichung der Ellipse lautet:

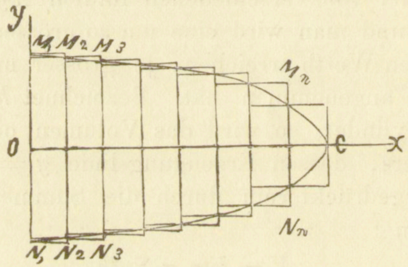
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

worin a und b ihre halben Axen sind. Hebt man y^2 heraus und multiplicirt man mit π, so ist:

$$\pi y^2 = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2), \tag{2}$$

womit der Flächeninhalt der Basis einer beliebigen Section (Fig. 3) des Rotations-Semiellipsoides ausgedrückt ist, welches wir uns als mit seiner Axe OC vertical vorstellen können.

Fig. 3.



Denken wir uns diesen Körper durch unter einander parallele auf der Axe OC senkrecht stehende Ebenen in n kleine Sectionen getheilt und bezeichnen wir vom Punkte O ausgehend die der Grundfläche entsprechenden Radien mit $y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$, so dass

$$y_1 = M_1N_1, \quad y_2 = M_2N_2, \ldots y_n = M_nN_n;$$

h sei die constante Höhe einer jeden Section. Die Flächeninhalte der Grundflächen dieser Sectionen, die man ganz gut als Cylinder ansehen kann, werden also sein:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \pi y_1^2 &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - 0), \\ \pi y_2^2 &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - h^2), \\ \pi y_3^2 &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (2h)^2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \pi y_n^2 &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (n-1)^2 h^2). \end{aligned}$$

Stellen wir uns noch die diesen Sectionen umschriebenen Cylinder vor, so erhalten wir ihre Volume, indem wir die Grundfläche mit der gemeinschaftlichen Länge h multipliciren. Man hat also

$$(4)\qquad \begin{aligned} \pi y_1^2 h &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - o)\, h, \\ \pi y_2^2 h &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - h^2)\, h, \\ \pi y_3^2 h &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (2h)^2)\, h, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \pi y_n^2 h &= \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (n-1)^2 h^2)\, h. \end{aligned}$$

Summirt man diese Gleichungen, so stellt die linke Seite der Summe das ganze Volumen des Semiellipsoids vor. Diesselbe wird sich um so mehr dem gesuchten Volumen des Körpers nähern, je grösser n sein wird. Wir haben also

$$(5)\qquad V = \pi \frac{b^2}{a^2} h \left\{ n a^2 - h^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2) \right\}.$$

An Stelle der Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen setze man den Grenzwerth, dem sich diese Summe nähert, so wird:

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} h \left(n a^2 - h^2 \frac{n^3}{3} \right)$$

oder

$$(6)\qquad V = \pi b^2 n h - \pi \frac{b^2 n^3 h^3}{a^2 \, . \, 3}.$$

6*

Berücksichtigen wir, dass a die Höhe des Körpers vorstellt, welche wir mit H bezeichnen werden, dann b den Radius R der Grundfläche, ist überdies $H = nh$, da h die Höhe eines jeden dieser kleinen Cylinder und n deren Anzahl bezeichnet, so wird die Gleichung (6)

$$V = \pi R^2 H - \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

oder

(7) $$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

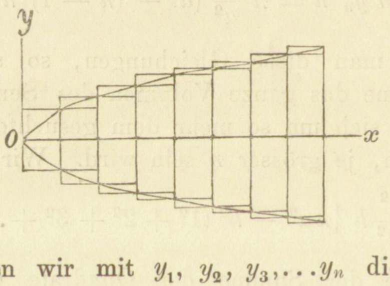
Wenn wir aber anstatt diese kleinen Cylinder dem Semiellipsoid umzuschreiben, dieselben einschreiben, so gelangt man durch dasselbe Vorgehen auch noch zu dem in der Gleichung (7) enthaltenen Resultate.

Das Paraboloid von Apollonius. Dasselbe kann man sich entstanden denken durch Rotation der Parabel

(1) $$y^2 = 2px$$

um die Axe der x (Fig. 4). Denken wir uns dasselbe durch auf die Axen desselben senkrechte Ebenen in so viele unter einander parallele Stücke, von constanter Höhe h getheilt.

Fig. 4.



Bezeichnen wir mit $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die Radien ihrer Grundflächen, mit n ihre Anzahl, so ergibt die Gleichung (1)

(2) $$\begin{aligned} y_1^2 &= 2p \,.\, h, \\ y_2^2 &= 2p \,.\, 2h, \\ y_3^2 &= 2p \,.\, 3h, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n^2 &= 2p \,.\, nh. \end{aligned}$$

Multiplicirt man mit πh beide Seiten dieser Gleichungen, so erhält man die Volumen der einzelnen kleinen Cylinder, die dem in Betrachtung gezogenen Körper umschrieben sind. Ihre Summe ergibt dann das ganze Volumen des Körpers, das sich um so mehr dem Volumen des wirklichen Paraboloids nähert, je grösser die Anzahl der kleinen Cylinder ist. Wir erhalten

(3) $$V = 2p\,(1 + 2 + 3 + \ldots n)\,\pi h^2.$$

Nun ist aber die Summe der Reihe der ersten n natürlichen Zahlen $\frac{1}{2} n\,(n+1)$ und deren Grenzwerth $\frac{n^2}{2}$, weshalb das Volumen des Körpers:

$$V = \tfrac{1}{2}\,2p\pi h^2 n^2,$$
$$V = \tfrac{1}{2}\,2pnh\,.\,\pi nh.$$

Weil $nh = H$ ist und für die letzte der unter (2) angeführten Gleichungen $2pnh = y_n^2$, so hat man

$$V = \tfrac{1}{2}\pi y_n^2 H.$$

Aber y_n drückt den Radius der Grundfläche des Körpers aus, daher

(4) $$V = \tfrac{1}{2}\pi R^2 H,$$

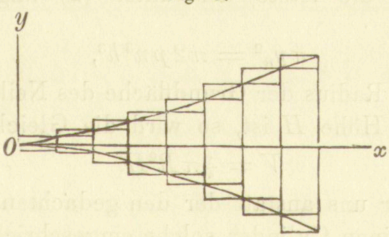
oder, wenn man D den Durchmesser, B den Flächeninhalt der Grundfläche nennt

(5) $$V = \tfrac{1}{8}\pi D^2 H,$$

(6) $$V = \tfrac{1}{2} BH.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch hier, wenn man anstatt umzuschreiben in die Sectionen Cylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe einschreibt; denn anstatt die Summe der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen zu er-

Fig. 5.



halten, erhält man jene der ersten $n - 1$ Zahlen, die, wenn man n unendlich anwachsen lässt, denselben Grenzwerth, d. i. $\frac{1}{2}n^2$ hat.

Das Neiloid. Die Erzeugungslinie des Neiloids (Fig. 5) ist die semicubische Parabel (Evolute der Parabel) von der Gleichung

(1) $$y^2 = 2px^3.$$

Zerlegen wir diesen Körper in eine Anzahl n von Sectionen und denken wir uns die Cylindermäntel dem Körper umschrieben und von constanter Höhe h. Bezeichnen wir ferner mit $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die Radien der Grundflächen dieser Sectionen, so ergibt die vorhergehende Gleichung mit π multiplicirt

(2) $$\begin{aligned} \pi y_1^2 &= \pi 2ph^3, \\ \pi y_2^2 &= \pi 2p(2h)^3, \\ \pi y_3^2 &= \pi 2p(3h)^3, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \pi y_n^2 &= \pi \,.\, 2p\,(nh)^3, \end{aligned}$$

welche Gleichungen die Flächeninhalte der Cylindergrundfläche ausdrücken. Multiplicirt man dann jede dieser Gleichungen mit h, summirt und hebt h^4 heraus, so hat man für das Volumen des Neiloids

$$V = \pi 2ph^4 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3).$$

Die Summe der Cuben der n ersten natürlichen Zahlen ist

$$\tfrac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

oder

$$\tfrac{1}{4} n^4 (1 + \tfrac{1}{2})^2,$$

welcher Ausdruck, wenn n unendlich wird, den Grenzwerth $\frac{1}{4} n^4$ hat, daher

(3) $$V = \tfrac{1}{4} \pi 2pn^4h^4 = \tfrac{1}{4} \pi 2pn^3h^3 \,.\, nh.$$

Aber für die letzte der unter (2) angeführten Gleichungen ist

$$\pi y_n^2 = \pi 2pn^3h^3,$$

und da y_n den Radius der Grundfläche des Neiloids ausdrückt, und nh dessen Höhe H ist, so wird die Gleichung (3)

(4) $$V = \tfrac{1}{4} \pi R^2 H.$$

Stellen wir uns anstatt der den gedachten Sectionen umschriebenen kleinen Cylinder solche eingeschrieben vor, so vermindert sich deren Anzahl auf $n - 1$ und wenn nun n unendlich anwächst, so nähert sich ihre Summe noch immer dem Werthe $\frac{1}{4} n^4$ und man gelangt wieder zum Ausdruck (4), den man auch, wenn D den Durchmesser und B den Flächeninhalt bezeichnet, so schreiben kann

(5) $$V = \frac{1}{16}\pi D^2 H$$

oder

(6) $$V = \frac{1}{4} BH.$$

§. 23. Berechnung des Cubikinhaltes unregelmässiger Stämme.

Kann man die Form eines Stammes einer der betrachteten typischen Formen zu Grunde legen, so bietet die Berechnung seiner Masse gar keine Schwierigkeit dar. Den Cubikinhalt entgipfelter Stämme berechnet man, indem man sie als abgestutzte Formen der erwähnten typischen Formen betrachtet. Statt aber so viele verschiedene Formen anzuwenden, als es Typen gibt, kann man eine einzige Form für alle diese Fälle verwenden und zwar die zweite Gleichung der unter (6) §. 21 enthaltenen. Man wird in diesem Falle den Buchstaben A_0, A_1, A_2 den Werth von Flächeninhalten beilegen, welche den an der Basis, in der Mitte und an der Spitze des Stammes gemessenen Durchmessern entsprechen.

Dieselbe Formel ergibt für den Fall, wo der Durchmesser an der Spitze gleich Null ist

$$V = \frac{H}{6}(A_0 + 4A_1),$$

wobei (H) die ganze Höhe des Baumes bedeutet, oder

$$V = \frac{h}{3}(A_0 + 4A_1),$$

worin h die Höhe eines Abschnittes bedeutet.

Was das Paraboloid von Apollonius anbelangt, dann den Kegel und das Neiloid, die ja die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Formen sind, so liefert die erwähnte Formel (6) für dieselben ein vollständiges, mit jenem aus den im vorhergehenden Paragraphe aufgestellten Formeln übereinstimmendes Resultat. Dagegen führt sie einen kleinen Fehler ein bei der Berechnung des cubischen Paraboloids. Manche Stämme entsprechen keiner der im Vorhergehenden betrachteten Formen. Es sind dies zweifach gebogene Stämme, dicke Aeste etc., die eine eigene Berechnungsart verlangen. Es können hier verschiedene Methoden angewendet werden, die bald mehr, bald weniger genaue Resultate liefern. Die Anwendung der Formeln (6) des §. 21 geben jedoch, wenn man mehr als drei Durchmessermessungen anstellt, Resultate, die so genau sind, als man nur immer wünschen kann. Man braucht auch in diesem Falle den Werthen A', A'', A'''... einfach die Bedeutung von Volumen und den Buchstaben A_0, A_1, A_2, ... die von Flächeninhalten zu geben, welche den in verschieden, aber gleich weit abstehenden Punkten gemessenen Durchmessern entsprechen. Denkt man sich den Stamm in fünf Sectionen getheilt, so wird man auf analoge Weise die Formel von Weddle (8), (§. 21) anwenden können oder bei einer beliebigen, aber geraden Anzahl von Sectionen jene von Simpson (9), (§. 21).

Sowohl die eine als die andere lassen den speciellen Fall zu, in welchem der Flächeninhalt der ersten oder letzten Abschnitte gleich Null ist, oder wenigstens als gleich Null angesehen werden kann.

Anhang.

Ueber einige Anwendungen der Theorie der kleinsten Quadrate in der Forstwissenschaft.

Allgemeine Kenntnisse. Eines der Haupterfordernisse zur Instandhaltung eines Forstes ist die Kenntniss des Gesetzes vom Holzwachsthume, nicht nur, um damit den periodischen oder jährlichen Schlag in Einklang zu bringen, sondern auch um die günstigsten Bedingungen für das Fortkommen einer gegebenen Holzart zu studiren, und um den Baum mit andern auf einem gegebenen Boden vergleichen zu können. Dieser Anhang bezweckt nicht eine Theorie aufzustellen, er soll vielmehr einige nützliche Anweisungen zur Taxation geben, weil bei dieser Fälle vorkommen können, in welchen die Anwendung der folgenden Resultate die Genauigkeit der Schätzung erheblich erhöhen kann. Die gebräuchlichsten Methoden der Interpolation sind die von Newton und Lagrange. Aber da die Formel von Newton nur dann anwendbar ist, wenn die verschiedenen Werthe der unabhängigen Variablen von einander gleich weit abstehend sind, so kann sie sich auch selten und zwar nur in Fragen des Holzzuwachses nützlich erweisen, da die erwähnte Bedingung selten erfüllt werden kann. Die Formel von Lagrange lässt sich besser verwenden, sie gilt für alle beliebigen Werthe der unabhängigen Variablen, wenn diese nach abnehmenden Potenzen geordnet sind. Aber auch der Gebrauch dieser Formel ist begrenzt. Sie wird zu complicirt, wenn die Zahl der gemachten

Beobachtungen gross ist. Die Methode jedoch, die wir jetzt auseinandersetzen werden, lässt nicht nur jede beliebige Anzahl von Beobachtungen bei der Darstellung eines gegebenen Gesetzes zu, sondern sie gibt uns auch das Mittel an die Hand, die Fehler, die bei einer solchen Bestimmung allenfalls unterlaufen, schätzen zu können. Es könnte uns der Einwurf gemacht werden, dass so viele Rechnungen und Formeln, die manchmal lang und schwer anzuwenden sind, überhaupt überflüssig wären. Dem ist aber nicht so; denn gesetzt auch, wir könnten die Formeln, die wir gefunden haben, in der Praxis nicht so verwirklichen, wie sie die Rechnung ergab, so wäre das doch kein Grund zu ihrer gänzlichen Verwerfung. Im Gegentheil entnehmen wir den Formeln sogar manche wichtige Winke zur vortheilhaften Anstellung der Untersuchungen und der Versuche, damit wir die wichtigsten Daten auswählen und die weniger wichtigen, wenn es Noth thut, vernachlässigen können. Es wäre gerade so, als wenn man die in der rationellen Mechanik gefundenen Formeln verwerfen oder für unnütz erklären wollte, weil sie immer erst durch einen Sicherheitscoefficienten corrigirt werden müssen.

In der Theorie, mit der wir uns jetzt befassen, kommen nur die kleinen Fehler in Betracht, von denen man *a priori* nicht bestimmen kann, ob sie positiv oder negativ sind. Deshalb wird die algebraische Summe dieser Fehler bei einer grossen Reihe von Beobachtungen zur Nulle neigen und der Werth einer Beobachtung wird sich umsomehr dem arithmetischen Mittel nähern, je grösser die Anzahl der Versuche sein wird. Da es sich jedoch um Fehler handelt, die man auch bei der grössten Sorgfalt nicht vermeiden kann, so ist es nothwendig, dass man eine grössere Anzahl von Versuchen anstellt, als streng genommen nothwendig wären. Will man daher bei der Messung einer Grösse eine grosse Genauigkeit erzielen, so wählt man nicht nur die brauchbarsten Instrumente, sondern man wiederholt auch öfter dieselbe Messung. So empfiehlt es sich bei der Bestimmung der Holzmasse einer Probefläche vermittelst der Modellstämme sehr, die Messung des Cubikinhaltes auf möglichst viele Bäume auszudehnen, bei der Bestimmung des mittleren Alters das Alter mehrerer Bäume zu ermitteln etc. Da wir das Vorzeichen der Beobachtungsfehler nicht kennen, so zieht man statt der einfachen Fehler, deren Quadrate in Betracht, die immer positiv sind. Man setzt dann die Bedingung, dass ihre Summe sehr klein sein müsse, woher der Name der „kleinsten Quadrate“ für die von uns jetzt in Betrachtung gezogene Theorie stammt. Setzen wir den Fall, wir müssten nur eine Unbekannte O bestimmen. Nehmen wir an, man habe n Versuche angestellt, deren gefundene Werthe $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n$ sind. Die bei jede rdieser Beobachtungen begangenen Fehler sind ausgedrückt durch

$$O - o_1, \quad O - o_2, \quad O - o_3, \ldots O - o_n,$$

welche summirt, da n sehr gross ist, sich wegen ihrem Vorzeichen aufheben müssen, d. h. es muss

$$(O - o_1) + (O - o_2) + (O - o_3) + \ldots (O - o_n) = 0$$

sein, woraus

$$O = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots o_n}{n},$$

d. h. das arithmetische Mittel ist der wahre Werth von O, wenn n sehr gross ist.

Nehmen wir nun an, die Anzahl der Versuche sei eine begrenzte und es seien

$$(O - o_1)^2, \quad (O - o_2)^2, \quad (O - o_3)^2, \ldots (O - o_n)^2$$

die Quadrate der Beobachtungsfehler. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt uns in solchen Fällen diese Summe so klein als möglieh zu machen. Dieser Bedingung wird man gerecht, wenn man ihr erstes in Bezug auf O genommenes Derivat gleich Null setzt. Man erhält

$$(O - o_1) + (O - o_2) + (O - o_3) + \ldots + (O - o_n) = 0,$$

woraus

$$O = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n}{n}.$$

Hat man daher auf einer Probefläche 10 Modellbäume ausgewählt, so ermittelt man zur Bestimmung der Holzmasse den Cubikinhalt eines jeden von ihnen und wird das Product des mittleren Volumens der Modellstämme als Totalausdruck der auf der betrachteten Fläche stehenden Bäume ansehen.

Bestimmung des Gesetzes von der Masse als Function des Alters. Nehmen wir an, wir hätten mehrere Grössen zu bestimmen. Das Problem kann unbestimmt, bestimmt oder mehr als bestimmt sein, je nachdem die Anzahl der Unbekannten grösser, gleich oder kleiner ist, als die Anzahl der Bedingungsgleichungen. Der vorliegende Fall ist einer von denjenigen, in welchen die Beobachtungen zur Bestimmung der Unbekannten auf unendlich viele Arten combinirt werden können. Die vortheilhafteste aller dieser Combinationen ist jene, welche die Summe der Quadrate der Fehler so klein als möglich werden lässt.

Nehmen wir das gewöhnliche Gesetz von den Massen

(1) $$V_x = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \ldots,$$

worin V_x die Masse als Flächeneinheit des Hektars, dem Alter x entsprechend ist und A, B, C,... zu bestimmende Coefficienten sind.

Es seien V_a, V_b, V_c,... die den n Altern a, b, c,... entsprechenden n Massen. Beschränken wir uns in der Bestimmung der Coefficienten auf die ersten zwei, so erhalten wir folgende Gleichungen

(2) $$\begin{aligned} \frac{V_a}{a^2} &= A + Ba, \\ \frac{V_b}{b^2} &= A + Bb, \\ \frac{V_c}{c^2} &= A + Cc, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

die auf verschiedene Art combinirt werden können.

Die vortheilhafteste dieser Combinationen bleibt jene, welche die Quadrate der Fehler möglichst klein werden lässt. Es seien d_1, d_2, d_3,... die Differenzen zwischen den von der Beobachtung gegebenen Werthen und jenen, die man durch die Gleichung (1) erhalten würde, wenn die wahren Werthe von A und B bekannt wären. Berechnen wir die Summe der Quadrate der Fehler

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \left(A + Ba - \frac{V_a}{a^2}\right)^2, \\ d_2^2 &= \left(A + Bb + \frac{V_b}{b^2}\right)^2, \\ d_3^2 &= \left(A + Bc + \frac{V_c}{c^2}\right)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und setzen wir die Derivate in Bezug auf A und B gleich Null, so erhalten wir:

$$\left(A+Ba-\frac{V_a}{a^2}\right)+\left(A+Bb-\frac{V_b}{b^2}\right)+\left(A+Bc-\frac{V_c}{c^2}\right)+\ldots=0,$$

$$\left(A+Ba-\frac{V_a}{a^2}\right)a+\left(A+Bb-\frac{V_b}{b^2}\right)b+\left(A+Bc-\frac{V_c}{c^2}\right)c+\ldots=0.$$

Diese zwei Gleichungen haben nur zwei Unbekannte A und B. Fassen wir die Factoren von A und B zusammen und schreiben wir der Kürze wegen

$$\Sigma x = a+b+c+\ldots,$$

$$\Sigma x^2 = a^2+b^2+c^2+\ldots,$$

$$\Sigma\frac{V}{x} = \frac{V_a}{a}+\frac{V_b}{b}+\frac{V_c}{c}+\ldots,$$

$$\Sigma\frac{V}{x^2} = \frac{V_a}{a^2}+\frac{V_b}{b^2}+\frac{V_c}{c^2}+\ldots$$

Die zwei vorhergehenden Gleichungen verwandeln sich dann in folgende:

$$nA+B\Sigma v-\Sigma\frac{V}{x^2}=0,$$

$$A\Sigma x+B\Sigma x^2-\Sigma\frac{V}{x}=0,$$

welche aufgelöst geben:

(3) $$A=\frac{\Sigma\frac{V}{x^2}\Sigma x^2-\Sigma x\Sigma\frac{V}{x}}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2},$$

(4) $$B=\frac{n\Sigma\frac{V}{x}-\Sigma x\Sigma\frac{V}{x^2}}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}.$$

Zwei Coefficienten genügen im Allgemeinen zur Darstellung des Gesetzes von den Holzmassen als Function des Alters und nur die Bildung der Coefficienten Σx, Σx^2, $\Sigma\frac{V}{x}$, $\Sigma\frac{V}{x^2}$ ist eine schwierigere.

Beispiel. Man fand im Alter von

20	40	60	80	Jahren
83	297	591	913	Fm.

Holzmasse pro Hektar und man will das Gesetz dieser Massen als Function des Alters ermitteln.

Wir geben zu diesem Zwecke die Berechnungen der Coefficienten in der nachstehenden Tabelle:

x	V	x^2	$\frac{V}{x^2}$	$\frac{V}{x}$
20	83	400	0·207 500 000	4·150 000
40	297	1600	0·185 625 000	7·425 000
60	591	3600	0·164 161 616	9·850 000
80	913	6400	0·142 656 250	11·412 500
200		12000	0·699 942 866	32·837 500

Bilden wir die Coefficienten

$$\Sigma \frac{V}{x^2} \Sigma x^2 = 8399 \cdot 314394, \quad \Sigma x \Sigma \frac{V}{x} = 6567 \cdot 500\,000,$$

$$n \Sigma x^2 = 48000, \quad (\Sigma x)^2 = 40000,$$

$$n \Sigma \frac{V}{x} = 131 \cdot 350\,000, \quad \Sigma x \Sigma \frac{V}{x^2} = 139 \cdot 988\,573,$$

und substituiren wir dieselben in die Werthe von A und B, so wird:

$$A = \frac{1831 \cdot 814}{8000} = 0 \cdot 2289787,$$

$$B = -\frac{8 \cdot 638573}{8000} = 0 \cdot 0010798.$$

Das gesuchte Gesetz ist hiermit annähernd ausgedrückt durch

(5) $$V = 0 \cdot 2289787 x^2 - 0 \cdot 0010798 x^3.$$

Der mittlere Fehler. Substituiren wir in die Gleichung für x die Alter a, b, c, so erhalten wir im Allgemeinen solche Massen, die von jenen verschieden sind, die wir zur Bestimmung der Coefficienten A und B in die Gleichung (2), (3) eingeführt haben und die durch Versuche ermittelt worden sind. Nun muss man, da n in grösserer Anzahl vorhanden ist, als es Unbekannte m gibt, die Gleichungen, wenn Widersprüche vorhanden sind, auf $n - m$ Gleichungen vertheilen. Bezeichnen wir mit Σd^2 die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen zwei beobachteten und durch die Gleichung (5) berechneten Werthen, mit E den mittleren Fehler, so hat man

$$E^2 (n - m) = \Sigma d^2,$$

woraus

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n - m}}. \tag{6}$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir den Fehler berechnen, der sich bei Anwendung der Gleichung (5) ergeben kann. Die folgende kleine Tabelle gibt die Fehler d bei verschiedenen Altern an:

Alter	Massen		Fehler	
	durch Rechnung	beobachtet	einfach	zum Quadrat erhoben
20	82·84	83	— 0·16	0·0256
40	297·25	297	+ 0·25	0·0625
60	591·08	591	+ 0·08	0·0064
80	912·59	913	— 0·40	0·2002
			$\Sigma d^2 = 0·2947$	

Substituirt man in die letzte Gleichung für Σd^2 dessen Werth, so erhält man

$$E = \pm \sqrt{\frac{0·2947}{4 - 2}} = \pm 0·217.$$

Von der Gleichung (5) leitet man in Bezug auf x folgende ab:

$$\frac{dV}{dx} = 0·457957\,x - 0·003239\,x^2, \tag{6}$$

welche Gleichung den laufend jährlichen, dem Alter x entsprechenden Zuwachs $I = \frac{dV}{dx}$ darstellt. Dividirt man dann die Gleichung (5) durch x, so erhält man den Durchschnittszuwachs:

$$I_m = \frac{V}{x} = 0{\cdot}2289787\,x - 0{\cdot}0010798\,x^2. \tag{7}$$

Integrirt man endlich dieselbe Gleichung, so erhält man den normalen Ertrag, der einem Turnus von x entspricht, oder was dasselbe ist, die Gesammtholzmasse

$$PN_x = \int_0^x V dx = 0{\cdot}1144893 x^3 - 0{\cdot}0005399\,x^4. \tag{8}$$

Man ersieht hieraus leicht, dass der mittlere Fehler, den man sowohl bei Anwendung der Gleichungen (6) und (7) anlässlich der Bestimmung des laufendjährlichen Zuwachses, als auch des Durchschnittszuwachses begeht, proportional mit x abnimmt, während er im selben Verhältnisse beim Normalvorrath zunimmt. Deshalb soll in der Praxis vorerst das Gesetz der Masse bestimmt werden, nicht weil die dabei zur Anwendung kommenden Methoden genauere Resultate liefern, sondern weil, wenn man aus diesem Gesetze die Gesetze des laufendjährlichen Zuwachses ableitet, die dabei begangenen Fehler geringer werden.

Picciolı

Anfangsgründe der endlichen Differenzen