O wykładzie teorji ułamków łańcuchowych.

Ścisła teorja ułamków łańcuchowych o postaci

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}$$

(a_1, a_2, a_3 .... a_n, ... liczby całkowite dodatnie; a_1 może być $=0$)

zmierzająca do wyjaśnienia właściwego znaczenia tego algorytmu, winna zawierać dowód czterech twierdzeń następujących:

1) Każdy ułamek zwyczajny czyli inaczej: każda liczba wymierna daje się rozwinąć, i to w jeden tylko sposób *) na ułamek łańcuchowy skończony omawianego typu.

2) Odwrotnie: Każdy ułamek łańcuchowy skończony stanowi rozwinięcie pewnej określonej liczby wymiernej.

3) Każda liczba niewymierna daje się rozwinąć w pewien jedyny, określony sposób na ułamek łańcuchowy nieskończony.

4) Każdy ułamek łańcuchowy nieskończony stanowi rozwinięcie pewnej określonej liczby niewymiernej.

Pierwsze 3 twierdzenia bywają dostatecznie uzasadniane w podręcznikach elementarnych (np. w M. Feldbluma „Algiebrze elementarnej" str. 473 — 478); ostatnie rozpada się w istocie rzeczy na dwa twierdzenia następujące:

a) Przybliżenia ułamka łańcuchowego nieskończonego zdążają do pewnej granicy skończonej;

b) Liczba, otrzymana jako granica ciągu przybliżeń daje istotnie, jako

---

*) O ile uwzględniamy zastrzeżenie, że ostatni iloraz cząstkowy a_n ma być >1, nie zaś $=1$.

swe rozwinięcie, dany ułamek łańcuchowy (a więc jest niewymierna, bo inaczej, na zasadzie tw. 1-go, dałaby rozwinięcie skończone).

Twierdzenie 4 a) bywa zwykle uzasadniane zapomocą czysto analitycznych sposobów badania własności przybliżeń. Sposoby te same przez się nie pozwalają na łatwe objęcie całości rozpatrywanych stosunków. Popełnia się przytym niekiedy nieścisłości; M. Feldblum np. na str. 483 swego podręcznika traktuje część rozwinięcia

$$a_{k+1}+\cfrac{1}{a_{k+2}+\cfrac{1}{a_{k+3}+\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}$$

jako liczbę skończoną b, większą od 1 przedtym, nim zostało dowiedzione, że przybliżenia ułamka łańcuchowego nieskończonego zdążają do pewnej granicy, a zarazem pomija zagadnienie, czy liczba b ma stanowić ową granicę, czy też liczbę, której rozwinięcie bezpośrednie stanowi

$$a_{k+1}+\cfrac{1}{a_{k+2}+\cfrac{1}{a_{k+3}+\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}$$

Zdaje mi się, że ze względu na zrozumiałość i żywość wykładu, badanie analityczne (następujące po udowodnieniu wzoru

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}\,a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}\,a_n+Q_{n-2}}\Big)$$

należy koniecznie poprzedzić, a po części nawet zastąpić stwierdzeniem eksperymentalnym, poglądowym zapomocą odpowiedniego wykresu, ilustrującego ciąg przybliżeń w sposób podany w № 10-ym „Wektora" w artykule: „O klasyfikacji ciągów liczbowych". Uczniowie, biorąc numery kolejnych przybliżeń za odcięte, a wielkości ich (np. w skali dziesięćkroć większej) za rzędne, otrzymają na papierze milimetrowym, wykres ilustrujący zmienność przybliżeń ułamka ciągłego nieskończonego (0, 1, 1, 1, 1 ....) lub innego, podobnież mało zbieżnego $\Big[\frac{P_1}{Q_1}=R_1=0$; $\frac{P_2}{Q_2}=R_2=1$; $R_3=0{,}5$; $R_4=0{,}666\ldots$; $R_5=0{,}6$; $R_6=0{,}625$; $R_7=0{,}615$; $R_8=0{,}619\ldots\Big]$.

Odpowiednia interpretacja wykresu pozwala stwierdzić: zmniejszanie się przybliżeń parzystych, wzrastanie nieparzystych, zmniejszanie się wartości bezwzględnej różnicy, zbliżanie się do pewnej wartości granicznej i t. d. Tam, gdzie wykres przestaje być środkiem dość giętkim, można się posiłkować wyłącznie rachunkiem, można też odpowiednio zwiększyć skalę.

Potym dopiero można przystąpić do ścisłego uzasadnienia twierdzeń

(stosujących się zarówno do ułamków łańcuchowych skończonych, jak do nieskończonych)

$$\text{I.}\quad P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n$$

$$\text{oraz II.}\quad R_n - R_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}$$

wraz z wnioskami: a) Każde przybliżenie parzyste jest większe od dwuch sąsiednich przybliżeń nieparzystych; b) Różnica $R_n - R_{n-1}$ maleje co do wartości bezwzględnej, gdy n wzrasta.

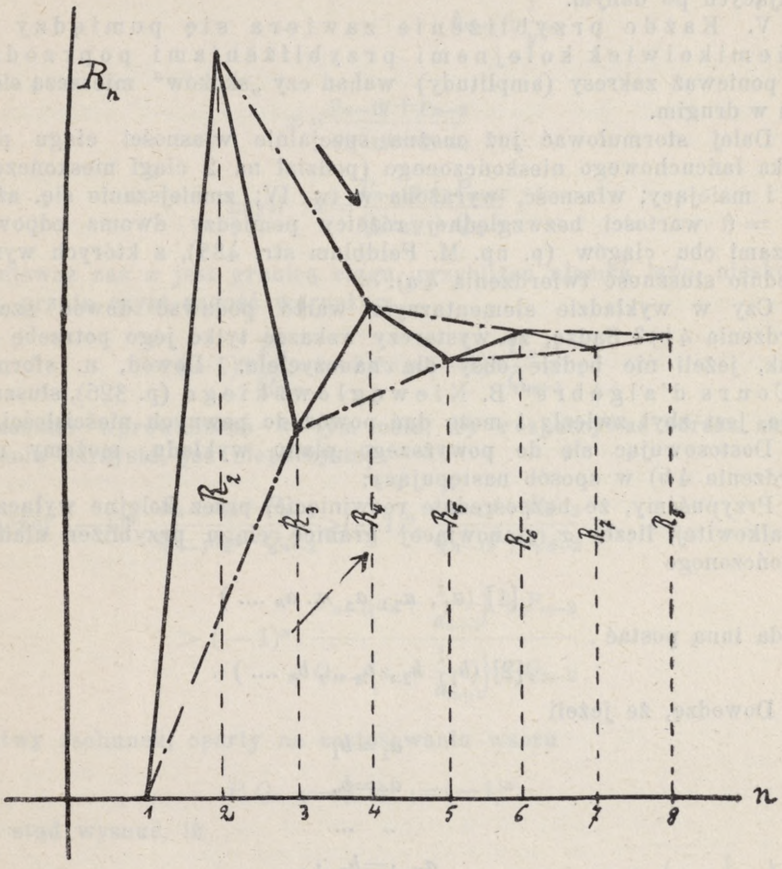

Fig. 1.

Zwracając się wciąż do rysunku, wykonanego przedtym lub innego, dowolnie uplastycznionego (zgodnie z twierdzeniami I i II), dowiedziemy dalej łatwo (dla ułamków łańc. skończonych lub nieskończonych):

III. P r z y b l i ż e n i a p a r z y s t e m a l e j ą, n i e p a r z y s t e w z r a s t a j ą, ponieważ np. różnica

$$R_{2n} - R_{2n-2} = (R_{2n} - R_{2n-1}) + (R_{2n-1} - R_{2n-2})$$

stanowi sumę dwuch liczb o znakach przeciwnych, z których ujemna ma większą wartość bezwzględną. Poglądowo: ponieważ żaden z kolejnych „skoków“ nie pokrywa poprzedniego wzrostu lub spadku.

IV. *Każde przybliżenie parzyste jest większe od każdego nieparzystego*, a to dlatego, że będąc większe od poprzedzającego je bezpośrednio przybliżenia nieparzystego, będzie większe (na zasadzie III), od wszystkich innych poprzedzających przybliżeń nieparzystych; będąc zaś większe od każdego z przybliżeń parzystych następujących, jest przez to większe od przybliżeń nieparzystych, sąsiednich względem nich, a więc następujących po danym.

V. *Każde przybliżenie zawiera się pomiędzy dwoma jakiemikolwiek kolejnemi przybliżeniami poprzedzającemi*, ponieważ zakresy (amplitudy) wahań czy „skoków“ mieszczą się kolejno jeden w drugim.

Dalej sformułować już można specjalnie własności ciągu przybliżeń ułamka łańcuchowego nieskończonego (podział na 2 ciągi nieskończone: rosnący i malejący; własność, wyrażona w tw. IV; zmniejszanie się, aż do granicy $= 0$ wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy dwoma odpowiedniemi wyrazami obu ciągów (p. np. M. Feldblum str. 485), z których wynika bezpośrednio słuszność twierdzenia 4 a).

Czy w wykładzie elementarnym warto podawać dowód szczegółowy twierdzenia 4 b)? Sądzę, że wystarczy wskazać tylko jego potrzebę — dobrze jednak, jeżeli nie będzie obcy dla nauczyciela. Dowód, n. sformułowany w „*Cours d'algèbre*“ B. *Niewęgłowskiego* (p. 326), słuszny w zasadzie, jest zbyt zwięzły i może dać powód do pewnych nieścisłości.

Dostosowując się do powyższego planu wykładu, możemy uzasadnić twierdzenie 4 b) w sposób następujący:

Przypuśćmy, że bezpośrednie rozwinięcie, przez kolejne wyłączanie części całkowitej, liczby x, stanowiącej granicę ciągu przybliżeń ułamka łańc. nieskończonego

$$[1]\ (a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ a_n \ldots)$$

posiada inną postać

$$[2]\ (b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots\ b_n \ldots)\ .$$

Dowodzę, że jeżeli

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}\ ,$$

to mamy również

$$a_n = b_n\ .$$

Oznaczając przybliżenia ułamka łańcuchowego [1] przez R_n, ułamka zaś [2] przez r_n, mamy

$$r_1 = R_1\ ;\ r_1 = R_2\ ;\ \ldots\ r_{n-1} = R_{n-1}\ ;$$

$$p_1 = P_1\ ;\ p_2 = P_2\ ;\ \ldots\ p_{n-1} = P_{n-1}\ ;$$

$$q_1 = Q_1\ ;\ q_2 = Q_2\ ;\ \ldots\ q_{n-1} = Q_{n-1}\ ;$$

Liczbę uiewymierną, której rozwinięcie dałoby kolejno b_n oraz następne ilorazy cząstkowe ułamka łańc. [2], nazwiemy y.

Wtedy

$$x=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\ddots+\cfrac{1}{b_{n-1}+\cfrac{1}{y}}}},$$

a stąd

$$x=\frac{p_{n-1}y+p_{n-2}}{q_{n-1}y+q_{n-2}}$$

$$\text{czyli}\quad x=\frac{P_{n-1}y+P_{n-2}}{Q_{n-1}y+Q_{n-2}}\ .$$

Ponieważ zaś x jest granicą ciągu przybliżeń ułamka łańc. nieskończonego [1], przeto czyni zadość warunkom

$$(-1)^n\frac{P_n}{Q_n}>(-1)^n x>(-1)^n\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

[$(-1)^n$ zostało wprowadzone w tym celu, by rozpatrywać odrazu zarówno przybliżenia parzyste, jak nieparzyste].

$$\text{Inaczej}\quad (-1)^n\cdot\frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}}>(-1)^n\cdot\frac{P_{n-1}y+P_{n-2}}{Q_{n-1}y+Q_{n-2}}>$$

$$>(-1)^n\cdot\frac{P_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+Q_{n-2}}\ .$$

Łatwy rachunek, oparty na zastosowaniu wzoru

$$P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}=(-1)^n\ ,$$

pozwala stąd wysnuć, iż

$$(-1)^n(-1)^{n-1}\cdot a_n>(-1)^n(-1)^{n-1}\cdot y>(-1)^n(-1)^{n-1}\cdot\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Dzieląc przez $(-1)^{2n-1}=-1$, otrzymujemy

$$a_n<y<a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\ ,$$

a więc część całkowita $y=a_n$ czyli

$$b_n=a_n\ .$$

Ponieważ zaś $b_1=a_1$ (bo inaczej x nie zawierałoby się pomiędzy

$$a_1 \text{ i } a_1+\frac{1}{a_2}\Big),$$

$b_2=a_2$ (bo inaczej

$$x=a_1+\frac{1}{z}$$

nie zawierałoby się pomiędzy

$$a_1+\frac{1}{a_2} \text{ i } a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}\Bigg),$$

przeto twierdzenie jest dowiedzione dla wszelkiego n.—Twierdzenie 4 b) zostaje w ten sposób całkowicie uzasadnione.

T. Łazowski.