O odwracaniu funkcji klasy pierwszej.

Jeżeli funkcja $f(x)$, jednoznacznie określona w pewnym przedziale (a, b), (gdzie $a<b$), jest w tymże przedziale granicą funkcji ciągłych, t. zn., jeżeli istnieje ciąg funkcji ciągłych w przedziale (a, b)

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \dots \tag{1}$$

taki, że

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x)=f(x) \qquad a\leqq x\leqq b \tag{2}$$

wówczas, według R. Baire'a, nazywamy $f(x)$ **funkcją klasy pierwszej**.

R. Baire udowodnił następujące twierdzenie:

Aby funkcja dana była klasy pierwszej w przedziale (a, b) — potrzeba i wystarcza, iżby funkcja ta była punktowo nieciągła na każdym zbiorze doskonałym, zawartym w (a, b).

Jako przypadki szczególne powyższego twierdzenia otrzymujemy dwa wnioski, z których w następstwie korzystać będziemy:

α) funkcja wszędzie nieciągła (t. zn. nieciągła w każdym punkcie uważanego przedziału) nie jest klasy pierwszej;

β) funkcja, której nieciągłości tworzą zbiór przeliczalny, jest klasy pierwszej.

Wiadomo, że jeżeli funkcja ciągła jest jednoznacznie odwracalna—t. zn., jeżeli każdą swoją wartość przyjmuje raz tylko, wówczas funkcja odwrotna jest również ciągła.

Analogiczne zagadnienie dla funkcji klasy pierwszej zostało postawione przez p. Sierpińskiego. Brzmi ono tak:

Funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) klasy pierwszej i przyjmuje wszystkie wartości pewnego przedziału (A, B), każdą raz tylko (końce A, B— trzeba włączyć). Funkcja odwrotna do $f(x)$ — oznaczymy ją przez $f_{-1}(x)$ — jest wtedy jednoznacznie określona w przedziale (A, B). Idzie o to, czy jest ona zawsze również klasy pierwszej.

Przykład poniżej podany wykaże, że tak nie jest.

Funkcję $f(x)$ określamy w przedziale $(0, 1)$ w następujący sposób

A) $$f(0)=1;\quad f(1)=0;$$

B) jeżeli x jest niewymierne, wówczas

$$f(x)=x$$

C) niech będzie

(3) $$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\ \ldots$$

ciąg wszystkich ułamków nieprzewiedlnych >0 i <1, dla których $p_n \neq 1$; kładziemy

(4) $$f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\frac{2p_nq_n-1}{2q_n^2}.$$

Zauważmy, że w tym wypadku jest

(5) $$\left|f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{2q_n^2}.$$

D) Uporządkujmy wreszcie w ciąg:

(6) $$r_1,\ r_2\ \ldots$$

wszystkie te liczby wymierne >0 i <1, które nie zostały przyporządkowane elementom ciągu (3). Ciąg (6) jest nieskończony i wszędziegęsty w przedziale $(0, 1)$, gdyż zawiera wszystkie ułamki nieprzywiedlne o nieparzystym mianowniku. Kładziemy teraz

(7) $$f\left(\frac{1}{m+1}\right)=r_m.$$

Jest rzeczą oczywistą, że umowy te określają funkcję $f(x)$ i jej odwrotność $f_{-1}(x)$ jednoznacznie w przedziale $(0, 1)$.

Udowodnimy teraz, że $f(x)$—jest, zaś $f_{-1}(x)$ — nie jest klasy pierwszej w uważanym przedziale.

Co do pierwszego punktu, to, biorąc pod uwagę wniosek β), wystarczy, jeżeli wykażemy, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punktach niewymiernych. Otóż w punkcie takim jest

(8) $$f(x)=x.$$

Niech teraz będzie ciąg

(9) $$x_1,\ x_2\ \ldots$$

i (10) $$\lim_{i=\infty} x_i=x.$$

Jeżeli liczby x_i są niewymierne, wówczas

(11) $$\lim_{i=\infty} f(x_i)=\lim x_i=x=f(x);$$

jeżeli wymierne, wówczas, począwszy od pewnego wskaźnika i_1, muszą one być kształtu $\frac{p_{m_i}}{q_{m_i}}$, gdzie $p_{m_i} \neq 1$; przytym jest napewno $\lim_{i=\infty} q_{m_i} = \infty$. Mamy tym sposobem

(12) $$f(x_i) = f\left(\frac{p_{m_i}}{q_{m_i}}\right) = \frac{2p_{m_i} q_{m_i} - 1}{2q_{m_i}^2} \qquad i \geqq i_1$$

(13) $$|f(x) - f(x_i)| \leqq |x - x_i| + \frac{1}{2q_{m_i}^2}$$

a więc (14) $$\lim_{i=\infty} f(x_i) = f(x) .$$

Ponieważ każdy ciąg można rozłożyć na dwa, z których jeden zawiera tylko liczby wymierne, drugi tylko niewymierne, więc z rozważań naszych wynika, że związek (10) zawsze pociąga za sobą (14), o ile x jest niewymierne. Punkt pierwszy jest tym sposobem udowodniony.

Przechodzimy do punktu drugiego. W myśl wniosku α) będziemy u celu, jeżeli wykażemy, iż $f_{-1}(x)$ jest funkcją nieciągłą w każdym punkcie przedziału (0, 1). Dla punktu $x = 1$ jest

(15) $$f_{-1}(1) = 0$$

a jeżeli (16) $$\lim x_n = 1$$

i x_n są niewymierne, wówczas

(17) $$f_{-1}(x_n) = x_n$$

(18) $$\lim_{n=\infty} f_{-1}(x_n) = 1 \neq f_{-1}(1) .$$

Punkt 1 jest więc punktem nieciągłości. Jeżeli zaś $x \neq 1$, wówczas

(19) $$f_{-1}(x) \neq 0 .$$

Z drugiej strony, można z ciągu (6), który jest wszędziegęsty, wybrać ciąg

(20) $$r_{m_1}, r_{m_2} \cdots$$

taki, że (21) $$\lim_{i=\infty} r_{m_i} = x .$$

Na mocy równania (17) jest

(22) $$f_{-1}(r_{m_i}) = \frac{1}{m_i + 1}$$

(23) $$\lim_{i=\infty} f_{-1}(r_{m_i}) = \lim_{i=\infty} \frac{1}{m_i + 1} = 0 \neq f_{-1}(x)$$

i tym sposobem funkcja $f_{-1}(x)$ jest nieciągła w punkcie x.

A więc $f_{-1}(x)$ nie jest klasy pierwszej. c. b. d. o.

Warszawa 4 grudnia 1913 r. *Stefan Mazurkiewicz.*