



**Instytut Badań Systemowych
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

Piotr Suchomski

**SYNTEZA ALGORYTMÓW
ODPORNEGO STEROWANIA
W CZASIE DYSKRETNYM**



Piotr Suchomski

**SYNTEZA ALGORYTMÓW
ODPORNEGO STEROWANIA
W CZASIE DYSKRETNYM**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 38

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004

Piotr Suchomski

**SYNTEZA ALGORYTMÓW
ODPORNEGO STEROWANIA
W CZASIE DYSKRETNYM**

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Doc. dr hab. inż. Piotr Kulczyki (prof. PK)

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2004

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN

ul. Newelska 6 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw

tel. 837-68-22

email: biblioteka@ibspan.waw.pl

ISBN 83-85847-94-4

ISSN 0208-8029

Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Zakłada się, że poszukiwane rozwiązania (parametry algorytmów o założonej strukturze, nastawy regulatorów) uzyskuje się, stosując komputer w celu wykonania odpowiednich obliczeń wymaganych przez daną metodę syntezy. Jakość takich rozwiązań zależy od trzech podstawowych czynników:

- (1) właściwości realizowanej arytmetyki (numerycznej precyzji oraz zakresu reprezentowanych liczb),
- (2) uwarunkowania problemu syntezy (wrażliwości rozwiązania na zmiany wejściowych danych),
- (3) właściwości algorytmu użytego do rozwiązywania postawionego zadania (numerycznej stabilności metody pozyskiwania rozwiązań).

Wymaga podkreślenia, że w rzetelnej analizie cech danego konkretnego sposobu dochodzenia do pożądaných rozwiązań, nie można zaniedbać żadnego z wyżej wymienionych aspektów. Przykładowo, nawet numerycznie stabilna metoda obliczeniowa implementowana w 'silnej' arytmetyce może, w przypadku źle uwarunkowanego zadania, prowadzić do wyników nieakceptowalnych ze względu na zakładany cel sterowania.

Współcześnie obserwuje się intensywne dążenie do zapewnienia metodom syntezy algorytmów sterowania odpowiednio wysokiej numerycznej jakości. Zabieganie o wymieniony walor dostępnych narzędzi projektowania systemów automatycznego sterowania procesami jest głęboko uzasadnione rolą odgrywaną przez takie systemy we wszystkich dziedzinach techniki. Znaczenie jakie uzyskała omawiana tendencja rozwoju metod projektowania przejawia się w: (i) randze licznych publikacji poświęconych tej tematyce (Datta [78], Higham *et al.* [180], Mehrmann i Xu [288], Patel *et al.* [319], Petkov *et al.* [323], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], Varga [451]), (ii) powodzeniu

oraz żywotności inicjatyw służących promowaniu stosownego oprogramowania – zob. specjalizowane przyborki pakietu MATLAB, projekt NICONET oraz biblioteka SLICOT (Math Works [283], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], <http://www.win.tue.nl/niconet/niconet.html>; por. także biblioteka NETLIB, http://www.netlib.org/master_counts2.html, Eluroth *et al.* [103]).

W niniejszej pracy skupiono się na wybranych algorytmach odpornego sterowania w czasie dyskretnym, wywiedzionych głównie z metod przestrzeni \mathcal{H}_∞ . Akcentując potrzebę i znaczenie analizy błędów oraz uwarunkowania proponowanych metod syntezy algorytmów sterowania, wskazuje się na sposoby polepszania takiego uwarunkowania. W szczególności, dowodzi się, że cel ten w wielu przypadkach można osiągnąć przez zastosowanie modelowania sterowanych obiektów opartego na operatorze delta (δ).

Merytoryczną treść pracy ujęto w sześciu rozdziałach oraz dodatku.

Wstępny *rozdział 1.* dotyczy modeli z czasem dyskretnym w tym głównie modeli związanych z operatorem δ . Podano tu podstawowe definicje oraz pojęcia wykorzystywane w dalszych rozdziałach.

Rozdział 2. poświęcono problemom syntezy dyskretnych algorytmów sterowania, w których stosuje się metodę rozmieszczania (pozycjonowania) biegunów odpowiedniej funkcji przenoszenia układu zamkniętego. To klasyczne zadanie rozwiązuje się, rozważając niezbędne równania diofantyczne zdefiniowane dla operatora δ . Zbadano właściwości dwóch rodzin par takich równań, przyporządkowanych odpowiednio tylko minimalnofazowym oraz minimalnofazowym i nieminimalnofazowym nominalnym modelom sterowanych obiektów. Pokazano w jaki sposób, modyfikując znaną metodę Youli-Kučery, zapewnić danemu układowi odporną stabilność oraz odporną jakość przy założeniu typowych charakterystyk niepewności nominalnego modelu obiektu. Podano oszacowanie względnego błędu rozwiązania zadania rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń danych tego zadania. Rozważono trudności, które pojawiają się przy rozwiązywaniu równań diofantycznych sformułowanych dla nieminimalnych nominalnych modeli sterowanych obiektów. Przedstawiono także stosowne numerycznie stabilne algorytmy upraszczania takich modeli.

Rozdział 3. poświęcono algorytmom sterowania predykcyjnego w oparciu o prognozę sterowanego procesu uzyskiwaną na podstawie odpowiedniego modelu tego procesu. Podano analityczne formuły opisujące rodziny charakterystycznych wielomianów tak ukształtowanych optymalnych układów zamkniętych. Omówiono metody parametryzacji takich prototypowych wielomianów przy wykorzystaniu standardowych nastaw regulatorów predykcyj-

nych. Parametryzacja, o której mowa, służy dążeniu do zapewnienia projektowanym układom sterowania założonych cech – a więc wymaganego zapasu stabilności oraz pożądanego charakteru procesów przejściowych. Rozważania tego rozdziału, dotycząc przede wszystkim reguł sterowania w czasie dyskretnym, obejmują także analizę asymptotycznych cech układów zamkniętych odpowiadających predykcynemu sterowaniu na podstawie modeli w czasie ciągłym.

Tematem *rozdziału 4.* są właściwości równań Riccatiego oraz Lapunowa zdefiniowanych dla modeli związanych z operatorem δ . Sformułowano tu lematy dotyczące stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego, a także omówiono cechy uogólnionych macierzy Hamiltona skojarzonych z takimi równaniami. Rozważając wrażliwość dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa na zaburzenia elementów macierzowych pęków definiujących takie równania, pokazano, że przy dostatecznie małym okresie próbkowania rozwiązania równań przyporządkowanych standardowemu operatorowi przesunięcia charakteryzują się znacznie gorszym uwarunkowaniem, a więc i mniejszą odpornością na wpływ zaburzeń, w zestawieniu z odpowiednimi równaniami wywiedzionymi dla operatora δ . Pokazano też w jaki sposób, korzystając z rozwiązań pewnych pomocniczych równań Lapunowa, ocenić zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

W *rozdziale 5.* postawiono problem syntezy układu zamkniętego, w którym uogólniony obiekt dynamiczny jest reprezentowany przez swoje odpowiednio zdefiniowane modele w czasie dyskretnym, to znaczy standardową macierz rozproszenia oraz łańcuchowe macierze rozproszenia. W następnej kolejności wprowadzono cechę tak zwanej J -bezstratności operatora opisującego dany obiekt, co stanowi podstawę definicji stosownych J -bezstratnych faktoryzacji wymienionych modeli. Badano właściwości J -bezstratnych stabilizujących koniugatorów, a także dokonano pewnego uogólnienia definicji łańcuchowych macierzy rozproszenia.

Rozdział 6., ostatni i najobszerniejszy rozdział pracy, poświęcono problemom syntezy dyskretnych układów sterowania oraz estymacji optymalnych ze względu na normę \mathcal{H}_∞ . Rozważano standardowe zadania formułowane dla różnych modeli (macierzy) rozproszenia danego uogólnionego obiektu, koncentrując się przede wszystkim na zadaniach dotyczących łańcuchowych macierzy rozproszenia. Podstawę rozwiązania omawianych zadań stanowią odpowiednie J -bezstratne faktoryzacje tych macierzy. Liczne twierdzenia sformułowane w tym rozdziale odnoszą się do problemu istnienia oraz właściwości rozwiązań dwóch 'sprzężonych' dyskretnych równań Riccatiego podanych w postaci stosownej dla operatora δ . W przypadku, w którym model

obiektu nie ma zer należących do brzegu obszaru wyznaczonego definicją stabilności liniowych systemów modelowanych za pomocą operatora δ . poszukiwane są stabilizujące rozwiązania odpowiednich równań Riccatiego. Gdy model obiektu ma takie zera, interesują nas także rozwiązania niestabilizujące stosownych równań Riccatiego. W omawianym rozdziale dokonano także analizy podstawowych strukturalnych cech tak uzyskiwanych optymalnych regulatorów oraz estymatorów. Wskazano wreszcie na pewien typ osobliwych problemów, które – pomimo stosowania reguł modelowania odwołującego się do operatora δ – mogą charakteryzować się złym numerycznym uwarunkowaniem.

W *dodatku A* zebrano podstawowe informacje dotyczące uwarunkowania, oceny względnych błędów, numerycznej stabilności, a także wstecznych błędów rozwiązań nieosobliwych zadań liniowych oraz nieosobliwych liniowych zadań najmnijszych kwadratów. *Dodatek B* zawiera spis oznaczeń.

Wszystkie istotne wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają analityczne ugruntowanie. Prezentacja materiału zasadza się na układzie *twierdzeń, lematów* oraz *uwag*, czyli podziale odwzorowującym merytoryczną wagkość odpowiednich sformułowań. Integralną część pracy stanowią numeryczne *przykłady*, ilustrujące uprzednie teoretyczne wywody. Nie wszystkie twierdzenia oraz lematy są wszakże dowodzone z jednakową szczegółowością. W każdym przypadku podano jednak źródło danej tezy, co umożliwia Czytelnikowi śledzenie wkładu autora niniejszej pracy w rozwój referowanej tematyki.

W pracy umieszczono szereg nowych i nigdzie nie publikowanych elementów. Dotyczy to przede wszystkim: algorytmu wyznaczania minimalnego modelu sterowanego obiektu, zagadnień numerycznego uwarunkowania zadania rozmieszczania biegunów, własności oraz syntezy J -bezstratnych stabilizujących koniugatorów oraz własności rozszerzonych modeli obiektów opisanych łańcuchowymi macierzami rozproszenia.

Rozdział 2

Rozmieszczanie biegunów

Niniejszy rozdział dotyczy syntezy układów sterowania obiektami (procesami) czasu ciągłego za pomocą dyskretnych algorytmów, w których wykorzystuje się odpowiednio zmodyfikowaną metodę rozmieszczania biegunów (*pole placement*; Clarke [64], Ioannou i Sun [192], Kuo [251], Landau *et al.* [257], Lelić i Zarrop [271], Middleton i Goodwin [294], Narandra i Anaswamy [298], Ogata [309], Wellstead i Zarrop [466]). Metodę tę stosuje się do funkcji przenoszenia zdefiniowanych dla operatora δ . Pokazano, że klasyczne zadanie rozmieszczania biegunów nominalnej funkcji przenoszenia zamkniętego układu sterowania (kształtowanie zer charakterystycznego wielomianu tego układu) sprowadzić można do dogodnego liniowego problemu rozwiązywania sprzężonych równań diofantycznych. Rozważono właściwości dwóch rodzin par takich równań dostosowanych do minimalnofazowych oraz nieminimalnofazowych nominalnych modeli sterowanych obiektów (Suchomski [405]).

W podstawowym algorytmie wykorzystuje się regulator o standardowej obserwatorowej strukturze (Gawthrop [126], Middleton i Goodwin [294]). Pokazano w jaki sposób, rozbudowując tę strukturę o odpowiednio dobrane człony dynamiczne, czyli tak zwane korektory Youli–Kučery (Q -parametry), można zapewnić zamkniętemu układowi odporną stabilność oraz odporne zachowanie się (jakość) dla typowych charakterystyk niepewności nominalnych modeli sterowanych obiektów. Podano analityczne formuły wyznaczania parametrów takich korektorów o możliwie niskim rzędzie dla zadania odpornej stabilności oraz odpornego zachowania się układu zamkniętego. Rozważono zarówno prostszy przypadek stabilnych, jak i bardziej złożony przypadek niestabilnych nominalnych modeli sterowanych obiektów. Formuły te stosuje się także w algorytmach sterowania predykcyjnego omawianych w *rozdziale 3*.

Podkreślenia wymaga, że celem tego rozdziału nie jest proponowanie 'nowej' metody rozmieszczania biegunów. Znane są bowiem ogólne rozwiązania (w odpowiedniej dziedzinie Bezout) równań diofantycznych sformułowanych dla danego pierścienia (na przykład wielomianów lub wymiernych funkcji), a także stosowne parametryzacje zbiorów wszystkich stabilizujących regulatorów dla obiektów opisanych modelami należącymi do tego pierścienia (Fuhrmann [121], Kaczorek [205], Kučera [248]-[250], Vidyasagar [452], Youla *et al.* [480, 481]; zob. także Vidyasagar *et al.* [453]). W dalszych rozważaniach skupiono się przede wszystkim na problemach towarzyszących syntezie odpornych układów sterowania, w których odpowiedni analitycznie wyznaczany korektor (Q -parametr) jest filtrem o założonym niskim rzędzie.

W rozdziale tym wiele uwagi poświęcono numerycznym aspektom omawianych algorytmów sterowania. Podano oszacowanie względnego błędu rozwiązania zadania rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń danych tego zadania. Wskazano także na trudności towarzyszące rozwiązywaniu niektórych równań diofantycznych sformułowanych dla nie-minimalnych nominalnych modeli sterowanych obiektów, a więc modeli, w których odpowiednie wielomiany tworzące taki model mają wspólne czynniki. W ostatnich latach, gdy okazało się, że klasyczny algorytm Euklidesa wyznaczania największego wspólnego dzielnika (*greatest common divisor, GCD*) dwóch wielomianów (Brown [44], Schönhage [354]) jest niewystarczający w przypadku wielomianów o zaburzonych współczynnikach oraz wtedy, gdy stosowne obliczenia wykonywane są numerycznie (niesymbolicznie) ze skończoną precyzją, a stopień takiego wspólnego dzielnika nie jest znany, obserwujemy swoisty renesans zainteresowania tym znanym problemem; przy czym dotyczy to zarówno literatury matematycznej (Beckermann i Labahn [25], Emiris *et al.* [106, 107], Pan [315], Noda i Sasaki [304]), jak i technicznej (Chin i Corless [61], Karcaniias i Mitrouli [212]). W niniejszym rozdziale przedstawiono numeryczną metodę oceny stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów dyskretnego modelu danego obiektu, wywiedzioną z właściwości wcześniej omówionych diofantycznych równań.

Teoretyczne rozważania zilustrowano licznymi numerycznymi przykładami, dotyczącymi zarówno uwarunkowania metody rozmieszczania biegunów, jaki i cech odpornych układów sterowania uzyskanych dzięki zastosowaniu tej metody.

2.1 Podstawowa struktura układu sterowania

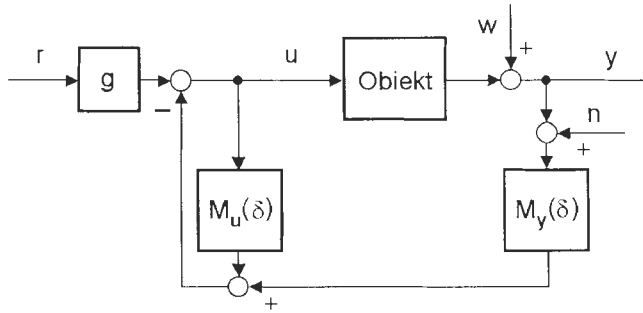
Założmy, że tor sterowania $P_{yu} : U \rightarrow Y$ danego skalarnego obiektu (*SISO*) można opisać nominalnym modelem wejściowo-wyjściowym

$$A(\delta)y(t) = B(\delta)u(t) \quad (2.1)$$

gdzie u jest sygnałem wejściowym (sterowaniem), y oznacza sygnał wyjściowy (odpowiedź obiektu), zaś $A(\delta) = \sum_{i=0}^{N_A} a_i \delta^i$ oraz $B(\delta) = \sum_{i=0}^{N_B} b_i \delta^i$ są wielomianami dyskretnego operatora δ . Przyjmujemy na początku, że model ten jest modelem minimalnym – co oznacza, iż para $(A(\delta), B(\delta))$ jest parą wielomianów względnie pierwszych ($A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ nie mają wspólnych czynników). Niech $N_A \geq 2$. Ponadto zakładamy większy od zera względny rząd rozważanego modelu, $d = N_A - N_B > 0$. Bez straty ogólności przyjmujemy także, że $A(\delta)$ jest wielomianem monicznym, $a_{N_A} = 1$.

Obiekt (2.1) można opisać, stosując odpowiedni wymierny model operatorowy (funkcję przenoszenia) w postaci ilorazu $\bar{P}_{yu}(\zeta) = B(\zeta)/A(\zeta)$ wielomianów zespolonej zmiennej $\zeta \in \mathbb{C}$. Obiekt ten jest obiektem stabilnym, jeżeli wszystkie zera wielomianu $A(\zeta)$ należą do \mathcal{D}_Δ (w takim przypadku mówimy też, że funkcja $\bar{P}_{yu}(\zeta)$ oraz wielomian $A(\zeta)$ są stabilne). W dalszej części tego rozdziału przy opisie toru $P_{yu} : U \rightarrow Y$ (oraz odpowiednio przy opisie sygnałowych relacji w innych torach rozważanego układu sterowania) będziemy także stosowali dogodną notacyjną konwencję $B(\delta)/A(\delta)$.

Niech $C(\delta) = \sum_{i=0}^{N_C} c_i \delta^i$, gdzie $N_C = N_A - 1$, będzie dowolnym stabilnym wielomianem. Schemat podstawowej konfiguracji rozważanego układu sterowania, realizującego koncepcję liniowego sprzężenia od stanu w oparciu o odpowiednie dane dostarczane przez obserwator stanu, pokazano na rys. 2.1 (Suchomski [405]). W schemacie tym zauważamy dwa tory sprzężenia zwrotnego, w których $C(\delta)$ pełni rolę wielomianu obserwatorowego: tor filtracji sygnału sterowania u modelowany funkcją $M_u(\delta) = L_u(\delta)/C(\delta)$ oraz tor filtracji sygnału pomiarowego y opisany funkcją $M_y(\delta) = L_y(\delta)/C(\delta)$. Ponadto wyróżniamy tor kształtowania wielkości odniesienia (skalowanie współczynnikiem g wielkości zadającej r) oraz dwa sygnałowe tory zakłóceniami: sygnał w modeluje obiektywne zakłócenia sprowadzone do wyjścia sterowanego obiektu, zaś sygnał n modeluje wpływ szumów pomiarowych. Wielomiany $C(\delta)$, $L_u(\delta)$ oraz $L_y(\delta)$, a także wzmocnienie g , są swobodnymi parametrami projektu. Sterowanie podporządkowane jest zatem regule $u(t) = gr(t) - M_u(\delta)u(t) - M_y(\delta)y(t)$, której odpowiada wielomian charakterystyczny $T(\delta) = A(\delta) \cdot C(\delta) + A(\delta) \cdot L_u(\delta) + B(\delta) \cdot L_y(\delta)$.



Rys. 2.1. Podstawowa struktura systemu sterowania.

2.1.1 Pierwsza diofantyczna baza

Pierwszą bazę (rodzinę) diofantyczną uzyskujemy, rozwiązując dla kolejnych $i \geq 0$ następujące pary równań (Suchomski [405]):

$$\begin{cases} D1: & A(\delta) \cdot E_i(\delta) + F_i(\delta) = \delta^i \cdot C(\delta) \\ D2: & C(\delta) \cdot H_i(\delta) + G_i(\delta) = B(\delta) \cdot E_i(\delta) \\ D3: & A(\delta) \cdot H_i(\delta) + L_i(\delta) = \delta^i \cdot B(\delta) \\ D4: & A(\delta) \cdot G_i(\delta) + B(\delta) \cdot F_i(\delta) = C(\delta) \cdot L_i(\delta). \end{cases}$$

Współczynniki ilorazowych wielomianów tej bazy nazywane są parametrami Markowa odpowiednich funkcji wymiernych. Współczynniki ilorazowych wielomianów $E_i(\delta) = \sum_{j=0}^i e_{i-j} \delta^j$ można bowiem wyznaczyć na podstawie szeregu $C(\delta)/A(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \delta^{-i}$. Rozważając szereg $B(\delta)/A(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \delta^{-i}$, uzyskujemy współczynniki wielomianów $H_i(\delta) = \sum_{j=0}^{i-d} h_{i-j} \delta^j$, $i \geq d$, drugiego ciągu wielomianów ilorazowych pierwszej bazy diofantycznej. Resztowe wielomiany tej bazy zapisujemy jako: $F_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_A-1} f_{i,j} \delta^j$, $G_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_G} g_{i,j} \delta^j$ oraz $L_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_A-1} l_{i,j} \delta^j$.

Dla trójki wielomianów $(A(\delta), B(\delta), C(\delta))$, w której $A(\delta)$ jest wielomianem monicznym stopnia $\deg A(\delta) = N_A$, zaś $C(\delta)$ jest (stabilnym) wielomianem stopnia $\deg C(\delta) = N_A - 1$, zachodzi: $\deg F_i(\delta) \leq N_A - 1$, $\deg G_i(\delta) \leq N_A - 2$ oraz $\deg L_i(\delta) \leq N_A - 1$. Ponadto: $e_0 = 0$, $e_1 = c_{N_A-1}$, $h_0 = \dots = h_{d-1} = 0$, oraz $h_d = b_{N_B}$. Mamy zatem $H_d(\delta) = b_{N_B}$ oraz:

$$E_i(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ e_i + \delta \cdot E_{i-1}(\delta) & \text{dla } i \geq 1 \end{cases}$$

$$H_i(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i < d \\ h_i + \delta \cdot H_{i-1}(\delta) & \text{dla } i \geq d \end{cases}$$

a ponadto:

$$G_i(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ B(\delta) \cdot E_i(\delta) & \text{dla } 1 \leq i < d \\ B(\delta) \cdot E_d(\delta) - b_{N_B} C(\delta) & \text{dla } i = d \end{cases}$$

$$L_i(\delta) = \begin{cases} \delta^i \cdot B(\delta) & \text{dla } i < d \\ \delta^d \cdot B(\delta) - b_{N_B} A(\delta) & \text{dla } i = d. \end{cases}$$

W przypadku obiektu z całkowaniem $(\delta \cdot A(\delta), B(\delta), C(\delta))$, $d = N_A - N_B + 1$, gdzie $\deg A(\delta) = N_A$ oraz $\deg C(\delta) = N_A$, otrzymujemy wielomiany o następujących właściwościach: $E_1(\delta) = c_{N_A}$, $F_0(\delta) = C(\delta)$, $F_i(\delta) = \delta \cdot \tilde{F}_i(\delta)$, przy czym $\tilde{F}_1(\delta) = C(\delta) - c_{N_A} A(\delta)$ oraz $\deg F_i(\delta) \leq N_A$, $\deg G_i(\delta) \leq N_A - 1$.

Rozważając trójkę $(\delta \cdot A(\delta), B(\delta), C(\delta))$, w której $\deg A(\delta) = N_A$ oraz $C(\delta) = A(\delta)$, uzyskujemy poniższe proste rozwiązania:

$$E_i(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ \delta^{i-1} & \text{dla } i \geq 1 \end{cases}$$

$$F_i(\delta) = \begin{cases} A(\delta) & \text{dla } i = 0 \\ 0 & \text{dla } i \geq 1 \end{cases}$$

oraz

$$G_i(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ \delta^{i-1} \cdot B(\delta) & \text{dla } 1 \leq i < d \\ \delta^{d-1} \cdot B(\delta) - b_{N_B} A(\delta) & \text{dla } i = d. \end{cases}$$

2.1.2 Druga diofantyczna baza

Drugą bazę diofantyczną uzyskujemy, rozwiązując dla kolejnych $i \geq 0$ następujące pary równań (Suchomski [405]):

$$\begin{cases} \bar{D}1 : A(\delta) \cdot \bar{E}_i(\delta) + B(\delta) \cdot \bar{F}_i(\delta) = \delta^i \cdot C(\delta) \\ \bar{D}2 : C(\delta) \cdot \bar{H}_i(\delta) + \bar{G}_i(\delta) = \bar{E}_i(\delta) \\ \bar{D}3 : A(\delta) \cdot \bar{H}_i(\delta) + \bar{L}_i(\delta) = \delta^i \\ \bar{D}4 : A(\delta) \cdot \bar{G}_i(\delta) + B(\delta) \cdot \bar{F}_i(\delta) = C(\delta) \cdot \bar{L}_i(\delta). \end{cases}$$

Wielomiany pierwszego ciągu ilorazowych wielomianów tej bazy mają postać $\bar{E}_i(\delta) = \sum_{j=0}^{\max\{N_B-1, i-1\}} \bar{e}_{i,j} \delta^j$. Współczynniki wielomianów drugiego ciągu wielomianów ilorazowych rozważanej bazy $\bar{H}_i(\delta) = \sum_{j=0}^{i-N_A} \bar{h}_{i-j} \delta^j$, $i \geq N_A$, można wyznaczyć w oparciu o potęgowy szereg $1/A(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{h}_i \delta^{-i}$. Resztove wielomiany tej bazy zapisujemy jako: $\bar{F}_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_A-1} \bar{f}_{i,j} \delta^j$, $\bar{G}_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_{\bar{G}}} \bar{g}_{i,j} \delta^j$ oraz $\bar{L}_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_A-1} \bar{l}_{i,j} \delta^j$, $i \geq 0$.

Dla trójki $(A(\delta), B(\delta), C(\delta))$ z monicznym wielomianem $A(\delta)$ stopnia $\deg A(\delta) = N_A$ oraz (stabilnym) wielomianem $C(\delta)$ stopnia $\deg C(\delta) = N_A - 1$ mamy: $\deg \bar{F}_i(\delta) \leq N_A - 1$, $\deg \bar{G}_i(\delta) \leq N_A - 2$ oraz $\deg \bar{L}_i(\delta) \leq N_A - 1$. Ponadto: $\bar{h}_0 = \dots = \bar{h}_{N_A-1} = 0$ oraz $\bar{h}_{N_A} = 1$. Na tej podstawie stwierdzamy, że:

$$\begin{aligned}\bar{G}_i(\delta) &= \begin{cases} \bar{E}_i(\delta) & \text{dla } i < N_A \\ \bar{E}_{N_A}(\delta) - C(\delta) & \text{dla } i = N_A \end{cases} \\ \bar{H}_i(\delta) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } i < N_A \\ 1 & \text{dla } i = N_A \end{cases} \\ \bar{L}_i(\delta) &= \begin{cases} \delta^i & \text{dla } i < N_A \\ \delta^{N_A} - A(\delta) & \text{dla } i = N_A. \end{cases}\end{aligned}$$

Przyjmując $(\delta \cdot A(\delta), B(\delta), C(\delta))$, gdzie $\deg A(\delta) = N_A$ oraz $C(\delta) = A(\delta)$, dla $i \leq N_A + 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\bar{F}_i(\delta) &= \begin{cases} \frac{A(\delta)}{b_0} & \text{dla } i = 0 \\ 0 & \text{dla } 1 \leq i \leq N_A + 1 \end{cases} \\ \bar{G}_i(\delta) &= \begin{cases} \left(1 - \frac{B(\delta)}{b_0}\right) \cdot \delta^{-1} & \text{dla } i = 0 \\ \delta^{i-1} & \text{dla } 1 \leq i \leq N_A \\ \delta^{N_A} - A(\delta) & \text{dla } i = N_A + 1. \end{cases}\end{aligned}$$

2.2 Rozwiązania numeryczne i modele nieminimalne

Należy wskazać na dwie podstawowe przyczyny ewentualnych numerycznych trudności przy rozwiązywaniu rozważanych równań diofantycznych. Pierwszą przyczyną jest nieminimalność modeli sterowanych obiektów, z którą mamy do czynienia w przypadku, gdy wielomiany $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ nie są wielomianami względnie pierwszymi. Efektywną metodą wyznaczania rozwiązań równań diofantycznych jest metoda rekursywna (Grimble [154], Jeżek [202], Kučera [249]), którą można stosować wtedy, gdy dane równanie (przykładowo równanie D1 pierwszej diofantycznej bazy) da się sprowadzić do równoważnego układu równań liniowych z macierzą trójkątną. Metody rekursywne mogą być także przydatne w przypadku modeli nieminimalnych. Podkreślenia wymaga jednak fakt, że 'bezpośrednie' wykorzystanie metod rekursywnych wiedzie teraz co prawda do dobrze uwarunkowanych problemów liniowych, ale uzyskane rozwiązania charakteryzują się nadmiarowymi (nieminimalnymi) stopniami. Rekursywne metody rozwiązywania równań diofantycznych nie mogą być stosowane wtedy, gdy macierz odpowiedniego li-

niowego problemu nie ma trójkątnej struktury (dotyczy to przykładowo równania $\bar{D}4$ drugiej diofantycznej bazy). W takim przypadku nieminimalność modelu czyni zadanie źle uwarunkowanym, co istotnie utrudnia znalezienie rozwiązania (uwaga ta odnosi się zwłaszcza do sytuacji, w której nie jest znany stopień największego wspólnego dzielnika wielomianów $A(\zeta)$ oraz $B(\zeta)$, czyli rząd uproszczenia nieminimalnego modelu).

Drugą przyczyną ewentualnych numerycznych trudności towarzyszących nie tylko rozwiązywaniu rozważanych równań diofantycznych, ale także dalszemu wykorzystaniu uzyskanych rozwiązań tych równań, są właściwości współczynników wielomianów ilorazowych (chodzi tu głównie o współczynniki wielomianów $H_i(\delta)$ oraz $\bar{H}_i(\delta)$, $i \geq 0$). Aby zilustrować ten problem, rozważmy prosty model pierwszego rzędu $B(\delta)/A(\delta) = b_0/(\delta - p)$, $p \in \mathbb{R}$. Parametry Markowa tego modelu mają postać: $h_0 = 0$ oraz $h_i = b_0 p^{i-1}$, $i \geq 1$. W przypadku w którym $|p| > 1$ wyrazy ciągu $\{h_i\}_0^\infty$ mają monotonicznie narastające absolutne wartości, czemu przy $p < -1$ towarzyszy przemienność znaku kolejnych wyrazów (szereg $\sum_{i=1}^\infty h_i \zeta^{-i}$ jest rozbieżny wewnątrz i zbieżny na zewnątrz koła $|\zeta| < \sigma$, gdzie $\sigma = \limsup \sqrt[i]{|h_i|} = \limsup |p| \sqrt[i]{|b_0/p|}$; Conway [70], Luecking i Rubel [279]). W przypadku modelu drugiego rzędu $B(\delta)/A(\delta) = (b_0 + b_1 \delta)/((\delta - p)(\delta - p^*))$ o dwóch zespolonych sprzężonych biegunach $p, p^* \in \mathbb{C}$, $\text{Im } p \neq 0$, mamy: $h_0 = 0$, $h_i = 2|\alpha| p^{i-1} \cdot \cos \varphi_i$, $i \geq 1$, $\alpha = (b_0 + b_1 p)/(p - p^*)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi_i = \arg \alpha + (i-1) \cdot \arg p$, $i \geq 1$. Konsekwentnie, dla $|p| > 1$ także występuje (w ogólności niemonotoniczny) wzrost absolutnych wartości elementów ciągu badanych parametrów Markowa. Analogiczne wnioski uzyskujemy dla modelu $1/A(\delta)$. Owa obserwowana nieograniczoność parametrów Markowa sprawia, że w praktycznych obliczeniach należałoby unikać wyznaczania tych współczynników dla 'dużych' wartości indeksu i , a zwłaszcza odwracania macierzy, których elementami są rozważane parametry Markowa. Pewną próbę przezwyciężenia niekorzystnie dużej wrażliwości metod syntezy układów sterowania predykcyjnego, wynikającej z analizowanych właściwości parametrów Markowa, podjęto w (Kowalczyk i Suchomski [237], Suchomski i Kowalczyk [413]).

Dla danego wielomianu $P(x) = \sum_{j=0}^{N_P} p_j x^j$ definiujemy pomocniczą ma-

cierz $T_i^P \in \mathbb{R}^{(N_P+i) \times i}$, $i \geq 1$, o strukturze macierzy Toeplitza

$$T_i^P = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & p_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N_P} & p_{N_P-1} & \cdots & \cdots \\ 0 & p_{N_P} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{N_P} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy przykładowe diofantyczne równania $D1$ oraz $\bar{D}4$, którym odpowiadają układy równań liniowych o dwóch różnych postaciach macierzy współczynników. Równanie $D1$ zapisujemy w następującej formie:

$$\begin{bmatrix} I_{N_A} & T_i^A \\ 0_{i \times N_A} & T_i^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ \tilde{e}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_i \\ c \end{bmatrix}$$

$$c = [c_0 \ \cdots \ c_{N_A-1}]^T$$

$$\tilde{e}_i = [e_i \ \cdots \ e_1]^T$$

$$f_i = [f_{i,0} \ \cdots \ f_{i,N_A-1}]^T.$$

Macierz tego układu jest macierzą górną trójkątną o jednostkowej diagonalu (także dla nieminimalnej pary $(A(\delta), B(\delta))$), a zatem poszukiwane rozwiązanie uzyskujemy w numerycznie stabilny sposób, posługując się prostą rekursywną metodą: dla $i = 0$ mamy $E_0(\delta) = 0$ oraz $F_0(\delta) = C(\delta)$, dla $i = 1$ zachodzi $E_1(\delta) = c_{N_A-1}$ oraz $F_1(\delta) = \delta \cdot C(\delta) - c_{N_A-1}A(\delta)$, zaś dla $i \geq 2$ obowiązuje poniższa zależność, będąca podstawą dalszego rekursywnego postępowania:

$$\begin{bmatrix} I_{N_A} & a \\ 0_{(i-1) \times N_A} & 1 \\ & 0_{i-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_i \\ \uparrow c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i-1)} \\ \uparrow T_{i-1}^A \end{bmatrix} \tilde{e}_{i-1}$$

$$a = [a_0 \ \cdots \ a_{N_A-1}]^T$$

gdzie $\uparrow(\cdot)$ oznacza stosowną macierz lub wektor z usuniętym ostatnim wierszem lub współrzędną, odpowiednio. W przypadku równania $\bar{D}4$ możemy wyróżnić dwie sytuacje. W pierwszej z nich ($N_B = 0$) mamy $\bar{F}_0(\delta) = b_0^{-1}C(\delta)$, $\bar{G}_0(\delta) = 0$ oraz następujące układy liniowych równań z górnymi trójkątnymi macierzami:

$$\begin{bmatrix} b_0 I_{N_A} & T_i^A \\ 0_{i \times N_A} & T_i^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_i \\ c \end{bmatrix} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq N_A - 1$$

$$\begin{bmatrix} b_0 I_{N_A} & \\ 0_{(N_A-1) \times N_A} & T_{N_A-1}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix} = T_{N_A}^C \bar{l}_i \quad \text{dla } i \geq N_A$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i &= [\bar{f}_{i,0} \cdots \bar{f}_{i,N_A-1}]^T \\ \bar{g}_i &= \begin{cases} [\bar{g}_{i,0} \cdots \bar{g}_{i,i-1}]^T & \text{dla } 1 \leq i \leq N_A - 1 \\ [\bar{g}_{i,0} \cdots \bar{g}_{i,N_A-2}]^T & \text{dla } i \geq N_A \end{cases} \\ \bar{l}_i &= [\bar{l}_{i,0} \cdots \bar{l}_{i,N_A-1}]^T. \end{aligned}$$

Druga wyróżniona sytuacja ($N_B > 0$) dotyczy równań z macierzami Sylwestera:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_{N_A}^B & T_{N_B}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_i \\ c \\ 0_{N_B-i} \end{bmatrix} \quad \text{dla } 0 \leq i \leq N_B \\ \begin{bmatrix} T_{N_A}^B & \\ 0_{(i-N_B) \times N_A} & T_i^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_i \\ c \end{bmatrix} \quad \text{dla } N_B + 1 \leq i \leq N_A - 1 \\ \begin{bmatrix} T_{N_A}^B & \\ 0_{(d-1) \times N_A} & T_{N_A-1}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix} &= T_{N_A}^C \bar{l}_i \quad \text{dla } i \geq N_A. \end{aligned}$$

Wymiary wektorów \bar{g}_i o współrzędnych $\bar{g}_{i,j}$ wynoszą odpowiednio: N_B, i oraz $N_A - 1$. Gdy parę $(A(\delta), B(\delta))$ tworzą wielomiany, które nie są względnie pierwsze, stosowne macierze Sylwestera są macierzami osobliwymi.

Należy podkreślić, że zgodnie z założonym celem oraz przyjętą metodologią niniejszej pracy zajmujemy się tu tylko wrażliwością numerycznego zadania rozmieszczania biegunów. Tak zakreślony obszar badań nie obejmuje zatem klasycznego problemu oceny wpływu zaburzeń parametrów regulatora (w naszym przypadku byłyby to parametry filtrów $M_u(\delta)$ oraz $M_y(\delta)$) na położenie pierwiastków charakterystycznego równania układu zamkniętego (por. Higham *et al.* [180], Kautsky *et al.* [215], Mehrmann i Xu [286, 287]). Dyskusję wrażliwości widma $\lambda(A - BK)$ macierzy stanu układu sterowania, złożonego z obiektu opisanego parą macierzy (A, B) oraz regulatora K realizującego sprzężenie od stanu, na zaburzenia parametrów tego regulatora znajdziemy w (Cox i Moss [74], Higham *et al.* [180], Liu i Patton [277], Mehrmann i Xu [286, 287]). Problem nieminimalności modelu sterowanego obiektu przyjmuje w powyższym kontekście postać pytania o odległość nominalnej pary macierzy (A, B) od 'najbliższej' pary niesterowalnej (Boley i Lu [38], Elsner i He [104], Laub *et al.* [260], Liu i Patton [277], Wicks i DeCarlo [468]).

2.2.1 Równania diofantyczne dla modeli nieminimalnych

Podstawowe informacje o nieminimalnych modelach obiektów wykorzystywanych w syntezie zarówno klasycznych, jak i predykcyjnych oraz adaptacyjnych układów sterowania, a także o ograniczeniach, które wynikają z takiej nadparametryzacji opisu obiektu, znaleźć można w (Arent *et al.* [8], Halpern [162], Rossiter *et al.* [340], Söderström [366, 367], Söderström i Stoica [370], Stoica i Söderström [384], Unbehauen i Göhring [437]).

Niech $L = [l_0 \ \cdots \ l_{N_A-1}]^T \in \mathbb{R}^{N_A \times N_A}$, przy czym współrzędne wektorów $l_i = [l_{i,0} \ \cdots \ l_{i,N_A-1}]^T$ tworzących kolumny tej macierzy są współczynnikami odpowiednich wielomianów resztowych $L_i(\delta)$, $0 \leq i \leq N_A - 1$. Przyjmijmy ponadto pomocnicze oznaczenie $L_{i|} = [l_0 \ \cdots \ l_i]$, $0 \leq i \leq N_A - 1$. Mamy zatem $L = L_{N_A-1|}$.

Lemat 2.1 (o koniecznym i wystarczającym warunku minimalności modelu $B(\delta)/A(\delta)$; Suchomski). *Wielomiany $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy macierz L współczynników wielomianów resztowych jest macierzą nieosobliwą, $\text{rank } L = N_A$.*

Dowód. (\Rightarrow) Ponieważ d początkowych kolumn macierzy L_{N_A} utworzono z odpowiednio uporządkowanych współczynników wielomianu $B(\delta)$, zatem $d \leq \text{rank } L \leq N_A$. Rozważmy przeto tylko nietrywialny przypadek $d < N_A$. Gdyby macierz L była macierzą osobliwą, wówczas jednorodny układ równań liniowych $Lx = 0_{N_A}$ miałby pewne niezerowe rozwiązanie $x \in \mathbb{R}^{N_A}$. Niech $x = [\alpha_0 \ \cdots \ \alpha_{d-1} \ \beta_0 \ \cdots \ \beta_{N_B-1}]^T$. Co oznacza, że $B(\delta) \cdot \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \delta^i + \sum_{i=0}^{N_B-1} \beta_i L_{d-i}(\delta) = 0$. Biorąc pod uwagę równanie D1, otrzymujemy równość $A(\delta) \cdot W_B(\delta) = B(\delta) \cdot W_A(\delta)$, gdzie $W_A(\delta) = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \delta^i + \sum_{i=0}^{N_B-1} \beta_i \delta^{d+i}$ oraz $W_B(\delta) = \sum_{i=0}^{N_B-1} \beta_i H_{d+i}(\delta)$. Ponieważ $\deg W_A(\delta) \leq N_A - 1$, zatem wielomiany $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ muszą mieć wspólny dzielnik. (\Leftarrow) Załóżmy, że $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ mają wspólny dzielnik $\Lambda(\delta) = \lambda_0 + \delta$. Zachodzi zatem $A(\delta) = \tilde{A}(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$, $B(\delta) = \tilde{B}(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$, gdzie $\deg \tilde{A}(\delta) = N_A - 1$ oraz $\deg \tilde{B}(\delta) = N_B - 1$. Na podstawie równania D1 wnioskujemy, że $L_i(\delta) = \tilde{L}_i(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$, przy czym wielomian $\tilde{L}_i(\delta)$ stopnia $\deg \tilde{L}_i(\delta) = \deg L_i(\delta) - 1$ spełnia diofantyczne równanie o obniżonym rzędzie: $\tilde{A}(\delta) \cdot H_i(\delta) + \tilde{L}_i(\delta) = \delta^i \tilde{B}(\delta)$, $i \geq 0$. Mamy zatem $L = T_{N_A-1}^\Lambda \tilde{L}$, gdzie $\tilde{L} = [\tilde{l}_0 \ \cdots \ \tilde{l}_{N_A-1}] \in \mathbb{R}^{(N_A-1) \times N_A}$ jest macierzą, której kolumny $\tilde{l}_i = [\tilde{l}_{i,0} \ \cdots \ \tilde{l}_{i,N_A-2}]^T$ utworzono w oparciu o wielomiany $\tilde{L}_i(\delta)$, $0 \leq i \leq N_A - 1$. Musimy przeto przyjąć, że $\text{rank } L = \text{rank } \tilde{L} \leq N_A - 1$. \square

Rozumowanie przedstawione w dowodzie *lematu 2.1* można uczynić podstawą lematu odnoszącego się do cech macierzy L w przypadku niemimalnego modelu $(A(\delta), B(\delta))$. Niech zatem moniczny wielomian $\Lambda(\delta) = \sum_{i=0}^{N_\Lambda} \lambda_i \delta^i$, $\lambda_{N_\Lambda} = 1$, stopnia $\deg \Lambda(\delta) = N_\Lambda > 0$ będzie największym wspólnym dzielnikiem pary $(A(\delta), B(\delta))$. Para $(A'(\delta), B'(\delta))$, gdzie $A(\delta) = A'(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$ oraz $B(\delta) = B'(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$, jest przeto minimalnym nominalnym modelem tego obiektu.

Lemat 2.2 (o bazie podprzestrzeni $\text{Im } L$ w przypadku niemimalnego modelu $(A(\delta), B(\delta))$; Suchomski). *Macierz $L \in \mathbb{R}^{N_A \times N_A}$ odpowiadająca wielomianom $A(\delta)$, $\deg A(\delta) = N_A$, oraz $B(\delta)$, $\deg B(\delta) = N_B$, o największym wspólnym dzielniku $\Lambda(\delta)$, $\deg \Lambda(\delta) = N_\Lambda > 0$, ma rząd $\text{rank } L = N_A - N_\Lambda$, przy czym $\text{Im } L = \text{span}\{l_i\}_{i=0}^{N_A - N_\Lambda - 1} = \text{Im } L_{N_A - N_\Lambda - 1}$. \square*

W przypadku, w którym rząd uproszczenia N_Λ niemimalnego modelu $(A(\delta), B(\delta))$ jest znany, modelowi temu można w numerycznie stabilny sposób przyporządkować stosowny model minimalny $(A'(\delta), B'(\delta))$.

Lemat 2.3 (o rekonstrukcji minimalnego modelu; Suchomski). *Niech będzie dany niemimalny model $(A(\delta), B(\delta))$, w którym moniczny wielomian $A(\delta)$, $\deg A(\delta) = N_A$, oraz wielomian $B(\delta)$, $\deg B(\delta) = N_B$, mają największy wspólny dzielnik stopnia $N_\Lambda > 0$. Parametry minimalnego modelu $(A'(\delta), B'(\delta))$, gdzie $A'(\delta) = \sum_{i=0}^{N_A - N_\Lambda} a'_i \delta^i$, $a'_{N_A - N_\Lambda} = 1$, oraz $B'(\delta) = \sum_{i=0}^{N_B - N_\Lambda} b'_i \delta^i$, $b'_{N_B - N_\Lambda} = b_{N_B}$, wyznacza się z równań:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_{N_A - N_\Lambda}^B & -T_{N_B - N_\Lambda}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= t_{ab}, \quad \text{dla } N_\Lambda < N_B \\ T_{N_A - N_\Lambda}^B a' &= \bar{t}_{ab}, \quad \text{dla } N_\Lambda = N_B \end{aligned}$$

w których:

$$\begin{aligned} a' &= \begin{bmatrix} a'_0 & \cdots & a'_{N_A - N_\Lambda - 1} \end{bmatrix}^T \\ b' &= \begin{bmatrix} b'_0 & \cdots & b'_{N_B - N_\Lambda - 1} \end{bmatrix}^T \\ t_{ab} &= - \begin{bmatrix} 0_{N_A - N_\Lambda} \\ b \end{bmatrix} + b_{N_B} \begin{bmatrix} 0_{N_B - N_\Lambda} \\ a \end{bmatrix}, \quad t_{ab} \in \mathbb{R}^{N_A + N_B - N_\Lambda} \\ \bar{t}_{ab} &= - \begin{bmatrix} 0_{N_A - N_\Lambda} \\ b \end{bmatrix} + b_{N_B} a, \quad \bar{t}_{ab} \in \mathbb{R}^{N_A} \\ b &= \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{N_B - 1} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Oszacowanie $l_\Lambda = [\lambda_0 \cdots \lambda_{N_\Lambda-1}]^T$ współczynników wielomianu $\Lambda(\delta)$ można uzyskać, rozwiązując odpowiednie zadanie najmniejszych kwadratów (por. Kowalczyk i Suchomski [243]). \square

Zakładając, że znany jest rząd uproszczenia N_Λ nieminimalnego modelu $(A(\delta), B(\delta))$, rozpatrzmy teraz problem numerycznie stabilnego wyznaczenia par wielomianów $(F'_i(\delta), G'_i(\delta))$ oraz $(\bar{F}'_i(\delta), \bar{G}'_i(\delta))$ o odpowiednio obniżonych stopniach: $\deg F'_i(\delta) \leq N_A - N_\Lambda - 1$, $\deg G'_i(\delta) \leq N_A - N_\Lambda - 2$, $\deg \bar{F}'_i(\delta) \leq N_A - N_\Lambda - 1$ oraz $\deg \bar{G}'_i(\delta) \leq N_A - N_\Lambda - 2$, $i \geq 1$. Rozwiązań będziemy poszukiwać w taki sposób, aby przez 'bezpośrednie' wykorzystanie parametrów nieminimalnego modelu $(A(\delta), B(\delta))$ – czyli bez obliczania minimalnego modelu $(A'(\delta), B'(\delta))$ – ograniczyć wpływ kumulacji numerycznych błędów. W poniższych rozważaniach przyjmujemy zatem, że $\deg C'(\delta) = N_A - N_\Lambda - 1$. W przypadku pierwszej diofantycznej bazy korzystamy z równań $D3$ oraz $D4$. Z równania $D3$ w rekursywny sposób wyznaczamy wielomiany $H_i(\delta)$ oraz $L_i(\delta)$, $i \geq 0$. Wielomiany $H_i(\delta) = H'_i(\delta)$ nie zależą od $\Lambda(\delta)$, zaś $L_i(\delta) = L'_i(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$, gdzie $\deg L'_i(\delta) \leq N_A - N_\Lambda - 1$. Z równania $D4$, zapisanego w postaci $A(\delta) \cdot G'_i(\delta) + B(\delta) \cdot F'_i(\delta) = C'(\delta) \cdot L_i(\delta)$, otrzymujemy układ liniowych równań

$$\begin{bmatrix} T_{N_A - N_\Lambda}^B & T_{N_A - N_\Lambda - 1}^A \\ 0_{(d-1) \times (N_A - N_\Lambda)} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_i \\ g'_i \end{bmatrix} = T_{N_A}^{C'} l_i$$

w którym:

$$\begin{aligned} f'_i &= [f'_{i,0} \cdots f'_{i,N_A - N_\Lambda - 1}]^T \\ g'_i &= [g'_{i,0} \cdots g'_{i,N_A - N_\Lambda - 2}]^T. \end{aligned}$$

Dla $i = 0$ mamy $F'_0(\delta) = C'(\delta)$ oraz $G'_0(\delta) = 0$. Macierz tego układu ma pełny kolumnowy rząd, zatem 'dokładne' rozwiązanie można uzyskać, stosując dowolny kwalifikowany algorytm najmniejszych kwadratów, np. algorytm Householdera ortogonalnego rozkładu QR (Björck [32], Businger i Golub [50], Golub i Van Loan [139]). Podejście oparte na parze równań $D1$ oraz $D2$ pierwszej diofantycznej bazy nie jest tak efektywne, jak metoda opisana wyżej. Okazuje się bowiem, że równania $D1$ oraz $D2$ można wprawdzie zapisać w postaci odpowiednich liniowych zadań najmniejszych kwadratów z niewiadomymi f'_i oraz g'_i , wymaga to jednak znajomości jawnej postaci dzielnika $\Lambda(\delta)$: $A(\delta) \cdot E'_i(\delta) + \Lambda(\delta) \cdot F'_i(\delta) = \delta^i \cdot C'(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$ oraz $C'(\delta) \cdot \Lambda(\delta) \cdot H_i(\delta) + \Lambda(\delta) \cdot G'_i(\delta) = B(\delta) \cdot E'_i(\delta)$. W obu wymienionych przypadkach nie występuje ograniczające żądanie, aby para $(C'(\delta), \Lambda(\delta))$ była parą względnie pierwszą.

Rozważając drugą diofantyczną bazę, mamy do czynienia z bardziej złożonym problemem. Oto, chcąc uchylić powyższe ograniczenie na wielomiany $C'(\delta)$ oraz $\Lambda(\delta)$, musielibyśmy uprzednio określić dzielnik $\Lambda(\delta)$. W takim przypadku, korzystając z równań $\bar{D}3$ oraz $\bar{D}4$ zapisanych jako: $A(\delta) \cdot \bar{H}'_i(\delta) + \Lambda(\delta) \cdot \bar{L}'_i(\delta) = \delta^i \cdot \Lambda(\delta)$ oraz $A(\delta) \cdot \bar{G}'_i(\delta) + B(\delta) \cdot \bar{F}'_i(\delta) = C'(\delta) \cdot \Lambda(\delta) \cdot \bar{L}'_i(\delta)$, wyznaczamy f'_i oraz g'_i , stosując odpowiednio: metodę rekursywną oraz metodę najmniejszych kwadratów. W przypadku pary $\bar{D}1$ oraz $\bar{D}2$ w pierwszej kolejności rozwiązujemy równanie $A(\delta) \cdot \bar{E}'_i(\delta) + B(\delta) \cdot \bar{F}'_i(\delta) - \delta^i \cdot C'(\delta) \cdot \Lambda_i(\delta) = 0$, w którym jako niewiadome występują nie tylko wielomiany $\bar{E}'_i(\delta)$ oraz $\bar{F}'_i(\delta)$, ale także moniczny wielomian $\Lambda_i(\delta) = \sum_{j=0}^{N_\Lambda} \lambda_{i,j} \delta^j$, $\lambda_{i,N_\Lambda} = 1$, będący pewnym oszacowaniem $\Lambda(\delta)$. Równanie to formułujemy w postaci:

$$\begin{bmatrix} T_{N_B - N_\Lambda}^A & T_{N_A - N_\Lambda}^B & \begin{matrix} 0_{i \times N_\Lambda} \\ -T_{N_\Lambda}^{C'} \\ 0_{(N_B - N_\Lambda - i + 1) \times N_\Lambda} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}'_i \\ f'_i \\ l_{\Lambda,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{i + N_\Lambda} \\ c' \\ 0_{N_B - N_\Lambda - i} \end{bmatrix}$$

dla $0 \leq i \leq N_B - N_\Lambda$

$$\begin{bmatrix} T_i^A & T_{N_A - N_\Lambda}^B & \begin{matrix} 0_{i \times N_\Lambda} \\ -T_{N_\Lambda}^{C'} \\ 0_{1 \times N_\Lambda} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}'_i \\ f'_i \\ l_{\Lambda,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{i + N_\Lambda} \\ c' \end{bmatrix}$$

dla $i > N_B - N_\Lambda$

gdzie:

$$\begin{aligned} c' &= [c'_0 \quad \cdots \quad c'_{N_A - N_\Lambda - 1}]^T \\ \bar{e}'_i &= \begin{cases} [\bar{e}'_{i,0} \quad \cdots \quad \bar{e}'_{i,N_B - N_\Lambda - 1}]^T & \text{dla } 0 \leq i \leq N_B - N_\Lambda \\ [\bar{e}'_{i,0} \quad \cdots \quad \bar{e}'_{i,i-1}]^T & \text{dla } i > N_B - N_\Lambda \end{cases} \\ \bar{f}'_i &= [\bar{f}'_{i,0} \quad \cdots \quad \bar{f}'_{i,N_A - N_\Lambda - 1}]^T \\ l_{\Lambda,i} &= [\lambda_{i,0} \quad \cdots \quad \lambda_{i,N_\Lambda - 1}]^T. \end{aligned}$$

Konieczny warunek nieosobliwości tego liniowego zadania ma postać żądania, aby para $(C'(\delta), \Lambda(\delta))$ była względnie pierwsza. Wektor \bar{g}'_i wyznaczamy, stosując rekursywną metodę rozwiązywania równania $C'(\delta) \cdot \bar{H}'_i(\delta) + \bar{G}'_i(\delta) = \bar{E}'_i(\delta)$.

2.2.2 Ocena rzędu uproszczenia nieminimalnego modelu

Z lematu 2.2 wynika, że rząd uproszczenia N_Λ nieminimalnego modelu opisanego parą $(A(\delta), B(\delta))$ można ocenić, analizując kolumnowy rząd kolejnych lewych podmacierzy macierzy L . W szczególności, wyznaczysz taki

minimalny indeks $d \leq i \leq N_A - 1$, dla którego $l_i \in \text{Im } L_{i-1}$, mamy ocenę rzędu uproszczenia $N_\Lambda = N_A - i$. Standardowa metoda wyznaczania stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów $(A(\delta), B(\delta))$ polega na badaniu defektu rzędu macierzy Sylwestera $[T_{N_B}^A \quad T_{N_A}^B] \in \mathbb{R}^{(N_A+N_B) \times (N_A+N_B)}$ (Cullen i Hall [76], Emiris *et al.* [106, 107], Fuhrmann [121], Kailath [206], Karcanias i Mitrouli [212], Pan [315]). Zaleta podejścia, w którym stosuje się macierz L , polega na tym, że macierz ta ma wymiary mniejsze, niż odpowiednia macierz Sylwestera. Należy jednak lojalnie podkreślić fakt, że elementami macierzy Sylwestera są współczynniki pary $(A(\delta), B(\delta))$ 'oryginalnych' wielomianów modelu obiektu, zaś w przypadku macierzy L mamy do czynienia z zaburzonymi współczynnikami odpowiednich wielomianów $L_i(\delta)$, uzyskanych w numerycznym (nieidealnym) postępowaniu. Podstawową grupę algorytmów oceny rzędu macierzy stanowią algorytmy wywiedzione z analizy wartości szczególnych (*singular value*; Datta [78], Meyer [290], Stewart [381]). Zasadnicza trudność takiego podejścia wiąże się z pytaniem o to, którą 'małą' wartość szczególną danej macierzy, uzyskaną przecież w toku obliczeń o skończonej precyzji, uznać za wartość 'zerową' (Demmel [84], Demmel *et al.* [85], Stewart [378, 380, 381], Stewart i Sun [383]). Podejścia pozwalające na uniknięcie konieczności badania wartości szczególnych 'pełnych' macierzy Sylwestera, oparte na analizie odpowiednich macierzy Hankela oraz macierzy Trudi, a także algorytmach wyprowadzonych z metody wymiernej aproksymacji Padé, omówiono w (Beckermann i Labahn [25], Pan [315]). Inną ważną grupę numerycznych algorytmów oceny rzędu danej macierzy tworzą algorytmy odwołujące się do tak zwanych rozkładów (faktoryzacji) ujawniających rząd (*rank-revealing decomposition*). Do grupy tej należą nowsze algorytmy, w których stosuje się rozkłady oznaczane jako $RRQR$, $ULLV$, ULV , URV oraz VSV (Benhammouda [26], Fierro *et al.* [113], Hansen i Yalamov [164], Stewart [379, 381]).

Rekursywny algorytm wskazujący, że $l_{N_A-N_\Lambda} \in \text{Im } L_{N_A-N_\Lambda-1}$, lub równoważnie $l_{N_A-N_\Lambda} \in \text{Ker } P_{N_A-N_\Lambda-1}$, gdzie $P_{N_A-N_\Lambda-1} = I_{N_A} - L_{N_A-N_\Lambda-1} L_{N_A-N_\Lambda-1}^+$, $P_{N_A-N_\Lambda-1} \in \mathbb{R}^{N_A \times N_A}$, oznacza macierz operatora rzutowania na ortogonalne dopełnienie $\text{Im } L_{N_A-N_\Lambda-1}^\perp$, przedstawiono w (Kowalczyk i Suchomski [243]). Algorytm ten, będący modyfikacją metody wyznaczania pseudoodwrotności Moore'a-Penrose'a macierzy o blokowej postaci (Boullion i Odell [40], Bunch i Nielsen [47], Stewart [381]), wykazał swoją skuteczność w przypadku syntezy układów uogólnionego sterowania predykcyjnego na podstawie nadparametryzowanych modeli obiektów z transportowym opóźnieniem (Kowalczyk i Suchomski [238, 239, 245]). Geometryczna interpretacja omawianego algorytmu zasadza się na spostrzeżeniu, że w kolejnych

krokach $i \geq 1$, rozważa się iloraz $\|P_{i-1}l_i\|_2/\|l_i\|_2 = \sin \alpha_i \leq \|P_{i-1}\|_2$ zależny od kąta $\alpha_i = \angle\{l_i, \text{Im } L_{i-1}\}$ między wektorem l_i a podprzestrzenią $\text{Im } L_{i-1}$.

Na podstawie równań $D1$, $D2$ oraz $D4$ pierwszej diofantycznej bazy otrzymujemy równość $H_i(\delta) \cdot F_i(\delta) + \delta^i \cdot G_i(\delta) = L_i(\delta) \cdot E_i(\delta)$, $i \geq 0$, w której w sposób jawny nie występują wielomiany $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ nieminimalnego modelu. Stąd wnioskujemy, że dla modelu minimalnego oraz wielomianów $H_i(\delta)$ i $L_i(\delta)$ uzyskanych na podstawie nieminimalnego modelu zachodzi

$$(H_i(\delta) \cdot F_i'(\delta) + \delta^i \cdot G_i'(\delta)) \cdot \Lambda(\delta) = L_i(\delta) \cdot E_i'(\delta), \quad i \geq 0. \quad (2.2)$$

Wielomiany $H_i(\delta)$ oraz $L_i(\delta)$ nie zależą od wielomianu $C(\delta)$ i mogą być łatwo wyznaczone z równania $D3$. W przypadku, w którym wielomiany $F_i'(\delta)$ oraz $G_i'(\delta)$ byłyby znane, równość (2.2) dla $i \geq 1$ można interpretować jako diofantyczne równanie, w którym rolę niewiadomej pełni wielomian $E_i'(\delta)$ stopnia $\deg E_i'(\delta) = i - 1$ oraz wielomian $\Lambda(\delta)$ stopnia $\deg \Lambda(\delta) = N_\Lambda$ (dla $i = 0$ mamy: $F_0'(\delta) = C'(\delta)$, $G_0'(\delta) = 0$ oraz $E_0'(\delta) = 0$, a ponadto $L_0(\delta) = B'(\delta) \cdot \Lambda(\delta)$).

Załóżmy teraz, że rząd uproszczenia N_Λ nieminimalnego modelu nie jest znany. Dogodny algorytm wyznaczania oszacowania tego rzędu otrzymamy, wybierając 'operacyjnie' najprostszą postać wielomianu $C(\delta) = 1$. W takim przypadku, dla $0 \leq i \leq N_A - 1$ zachodzi: $E_i(\delta) = 0$, $F_i(\delta) = \delta^i$ oraz $G_i(\delta) = -H_i(\delta)$, zaś przy $i = N_A$ mamy $E_{N_A} = 1$ oraz $F_{N_A}(\delta) = -\sum_{j=0}^{N_A-1} a_j \delta^j$. Przyjmując hipotezę, że moniczny wielomian $\Lambda^m(\delta)$ stopnia $\deg \Lambda^m(\delta) = m$, $1 \leq m \leq N_B$, jest największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$, głosimy tym samym, iż dla $i \geq N_A - m$:

$$\begin{aligned} A(\delta) \cdot G_i^m(\delta) + B(\delta) \cdot F_i^m(\delta) &= L_i(\delta) \\ S_i^m(\delta) \cdot \Lambda_i^m(\delta) &= L_i(\delta) \cdot E_i^m(\delta) \end{aligned}$$

gdzie moniczny wielomian $\Lambda_i^m(\delta) = \sum_{j=0}^m \lambda_{i,j}^m \delta^j$, $\lambda_{i,m}^m = 1$, oznacza i -te oszacowanie tego dzielnika, wielomian $S_i^m(\delta) = \sum_{j=0}^{N_B+i-m-1} s_{i,j}^m \delta^j$ dany jest wzorem

$$S_i^m(\delta) = H_i(\delta) \cdot F_i^m(\delta) + \delta^i \cdot G_i^m(\delta)$$

zaś $\deg E_i^m(\delta) \leq i - N_A + m$, $\deg F_i^m(\delta) \leq N_A - m - 1$ oraz $\deg G_i^m(\delta) \leq N_B - m - 1$, przy czym $G_i^{N_B}(\delta) = 0$. Zerowa wartość m oznacza zatem, że wielomiany $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ są względnie pierwsze. Zachodzi ponadto $E_{N_A-m}^m(\delta) = e_{N_A-m}^m$ oraz $E_i^m(\delta) = e_i^m + \delta \cdot E_{i-1}^m(\delta)$, $i > N_A - m$.

Podstawę proponowanego algorytmu oceny rzędu uproszczenia N_Λ stanowią wielomiany $\Lambda_i^m(\delta)$, $N_A - m \leq i \leq N_A - m + N_q - 1$, odpowiadające

kolejnym hipotetycznym rzędem uproszczenia m , gdzie $N_q > 1$ jest swobodnym parametrem algorytmu. Wielomianom tym przyporządkowujemy względny wskaźnik $J_{N_q}^m$ oraz bezwzględny $\bar{J}_{N_q}^m$, kładąc:

$$J_{N_q}^m(A, B) = \sum_{i=N_A-m}^{N_A-m+N_q-2} \frac{\|l_{\Lambda,i}^m - l_{\Lambda,i+1}^m\|_2}{\|l_{\Lambda,i}^m\|_2}$$

$$\bar{J}_{N_q}^m(A, B) = \max_{i,j \in \{N_A-m, \dots, N_A-m+N_q-2\}} \|l_{\Lambda,i}^m - l_{\Lambda,j}^m\|_2.$$

Obliczenia, w których istotną rolę odgrywają właściwości wielomianów $E_i^m(\delta)$, rozpoczynamy od najwyższej dopuszczalnej wartości $m = N_B$. Następnie, zmniejszając m , szukamy takiej wartości $m^* \geq 1$ tej pomocniczej zmiennej, dla której wybrany wskaźnik osiąga wartość zero. W efekcie $N_\Lambda = m^*$. Gdy taka wartość m nie istnieje, twierdzimy, że para $(A(\delta), B(\delta))$ jest względnie pierwsza.

Algorytm 2.1 (oceny rzędu uproszczenia modelu; Suchomski).

Hipoteza: $m = N_B$

$$\begin{bmatrix} T_{N_B}^{S_d^{N_B}} & -l_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\Lambda,d}^{N_B} \\ e_d^{N_B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0_{N_B} \\ s_d^{N_B} \end{bmatrix}$$

dla $i = d$

$$\begin{bmatrix} T_{N_B}^{S_i^{N_B}} & -l_i \\ 0_{i-d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\Lambda,i}^{N_B} \\ e_i^{N_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i-d)} \\ \uparrow T_{i-d}^{L_i} \end{bmatrix} \tilde{e}_{i-1}^{N_B} - \begin{bmatrix} 0_{N_B} \\ \uparrow s_i^{N_B} \end{bmatrix}$$

dla $i > d$.

Hipoteza: $1 \leq m \leq N_B - 1$

$$\begin{bmatrix} T_m^{S_{N_A-m}^m} & -l_{N_A-m} \\ 0_{N_B-m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\Lambda, N_A-m}^m \\ e_{N_A-m}^m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0_m \\ \uparrow s_{N_A-m}^m \end{bmatrix}$$

dla $i = N_A - m$

$$\begin{bmatrix} T_m^{S_i^m} & -l_i \\ 0_{i-d-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\Lambda,i}^m \\ e_i^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i+m-N_A)} \\ T_{i+m-N_A}^{L_i} \\ 0_{(N_B-m-1) \times (i+m-N_A)} \end{bmatrix} \tilde{e}_{i-1}^m - \begin{bmatrix} 0_m \\ \uparrow s_i^m \end{bmatrix}$$

dla $i > N_A - m$.

Obowiązują przy tym następujące oznaczenia:

$$\tilde{e}_i^m = [e_i^m \ \cdots \ e_{N_A-m}^m]^T \quad \text{dla } i \geq N_A - m$$

$$\begin{aligned} l_{\Lambda,i}^m &= [\lambda_{i,0}^m \cdots \lambda_{i,m-1}^m]^T \\ s_i^m &= [s_{i,0}^m \cdots s_{i,N_B+i-m-1}^m]^T . \end{aligned}$$

Współczynniki pary wielomianów $H_i(\delta)$ oraz $L_i(\delta)$, $i \geq d$, oblicza się rekursywną metodą w oparciu o układ równań z górną trójkątną macierzą o jednostkowej diagonalu:

$$\begin{bmatrix} I_{N_A} & \\ 0_{(i-d+1) \times N_A} & T_{i-d+1}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_i \\ \tilde{h}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_i \\ b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{h}_i = [h_i \cdots h_d] .$$

Współczynniki pary wielomianów $F_i^m(\delta) = \sum_{j=0}^{N_A-m-1} f_{i,j}^m \delta^j$ oraz $G_i^m(\delta) = \sum_{j=0}^{N_B-m-1} g_{i,j}^m \delta^j$, $i \geq N_A - m$, wyznacza się z równań:

$$\begin{bmatrix} T_{N_A-m}^B & T_{N_B-m}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i^m \\ g_i^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_i \\ 0_{N_B-m} \end{bmatrix} \quad \text{dla } m < N_B$$

$$T_d^B f_i^{N_B} = l_i \quad \text{dla } m = N_B$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_i^m &= [f_{i,0}^m \cdots f_{i,N_A-m-1}^m]^T \\ g_i^m &= [g_{i,0}^m \cdots g_{i,N_B-m-1}^m]^T \quad \text{dla } m < N_B . \quad \square \end{aligned}$$

Po ujawnieniu rzędu uproszczenia $N_\Lambda \geq 1$ modelu opisanego parą wielomianów $(A(\delta), B(\delta))$ możemy w oparciu o *lemat 2.3* wyznaczyć parametry odpowiedniego modelu minimalnego oraz największego wspólnego dzielnika tej pary. Zauważmy, że w efektywnych krokach poszukiwań, to znaczy dla $m \geq N_\Lambda$, odpowiednie zadania najmniejszych kwadratów są zawsze zadaniami nieosobliwymi, gdyż ich macierze mają pełne kolumnowe rzędy. Sformułowane kryterium (zerowanie się wskaźnika $J_{N_q}^m$ lub $\bar{J}_{N_q}^m$), pozwalające na uznanie, że rozważana para wielomianów ma największy wspólny dzielnik o niezerowym stopniu, odpowiada oczywiście idealizowanej sytuacji, w której znane są dokładne wartości współczynników tych wielomianów, zaś obliczenia przebiegają w taki sposób, że nie występuje utrata dokładności powodowana błędami zmiennoprzecinkowych działań.

2.2.3 Uwarunkowanie problemu rozmieszczania biegunów

Niektóre z wyżej rozważanych zadań mają postać liniowych równań z kwadratowymi macierzami współczynników. Wrażliwość rozwiązań takich równań

na zaburzenia wejściowych danych można scharakteryzować, stosując standardowe wskaźniki uwarunkowania (*dodatek A*). W podobny sposób, posługując się wskaźnikami właściwymi dla liniowych zadań najmniejszych kwadratów, możemy opisać uwarunkowanie odpowiednich fragmentów *algorytmu 2.1*.

Uwaga 2.1 (Suchomski). Na podstawie cech licznikowych wielomianów $B_q(q)$ dyskretnych modeli wyznaczonych dla operatora q (por. *rozdział 1.*) stwierdzamy, że przy dostatecznie małej wartości okresu próbkowania macierze Sylwestera z podmacierzami $T_i^{B_q}$, $i \geq 1$, będą źle wyskalowane. Co z kolei prowadzi do złego uwarunkowania odpowiednich liniowych zadań określonych dla modelu $B_q(q)/A_q(q)$. Dotyczy to na przykład równania $\bar{D}4$, algorytmu wyznaczania parametrów minimalnego modelu, a także postępowania służącego ocenie rzędu uproszczenia modelu nieminimalnego. W *przykładzie 2.3* pokazano, że rozważane układy równań liniowych odpowiadające modelom $B_q(q)/A_q(q)$ nawet po optymalnym wyskalowaniu charakteryzują się znacznie gorszym uwarunkowaniem w porównaniu ze stosownymi układami równań wyznaczonych dla modelu $B(\delta)/A(\delta)$. \square

Dane jest liniowe równanie $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest nieosobliwą macierzą, zaś $b \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$. Rozważmy ściśle strukturalizowalne zaburzenia elementów macierzy A takich równań, czyli sytuację, w której zaburzone macierze zachowuje swoją pierwotną strukturę (na przykład Sylwestera). Oznaczmy przez $p \in \mathbb{R}^{n_p}$, przy $n_p \leq n^2$, wektor parametrów opisujących elementy danej macierzy $A = A(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Załóżmy liniowość odwzorowania $A : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Addytywne strukturalizowalne zaburzenie $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ wektora p spełnia ograniczenie $|\tilde{p}| \leq \epsilon e$, gdzie $e \geq 0_{n_p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ jest zadanym wektorem, który reprezentuje dostępną wiedzę o tym zaburzeniu, zaś $\epsilon \in \mathbb{R}$. Ponadto przyjmujemy, że na addytywne strukturalizowalne zaburzenie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ wektora $b \in \mathbb{R}^n$ nałożone jest ograniczenie $|\tilde{b}| \leq f$, gdzie $f \geq 0_n \in \mathbb{R}^n$ (por. *dodatek A*). Dogodny sposób parametryzacji wstecznego błędu $\nu_{e,f}(y)$ danego rozwiązania $y \in \mathbb{R}^n$ rozważanego liniowego zadania z macierzą o ściśle strukturalizowalnym zaburzeniu oraz wektorem wyrazów wolnych podlegającym strukturalizowalnemu zaburzeniu, uzyskamy dla następującej reprezentacji owych zaburzeń: $\tilde{p} = D_e v_p$ oraz $\tilde{b} = D_f v_b$, gdzie $v_p \in \mathbb{R}^{n_p}$, $v_b \in \mathbb{R}^n$, $D_e = \text{diag}(e) \in D_{n_p}^{\geq}$ oraz $D_f = \text{diag}(f) \in D_n^{\geq}$, przy czym $D_n^{\geq} = \{\text{diag}\{d_i\}_{i=1}^n, d_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$. Błąd taki definiujemy jako

$$\nu_{e,f}(y) = \min \left\{ \left\| \begin{array}{c} v_p \\ v_b \end{array} \right\|_{\infty} : (A + \tilde{A})y = b + \tilde{b}, A + \tilde{A} = A(p + \tilde{p}), \tilde{p} = D_e v_p, \tilde{b} = D_f v_b \right\}.$$

Zaburzona macierz $A + \tilde{A}$ ma taką samą strukturę jak 'nominalna' macierz A , przy czym mówiąc o wielkości zaburzeń tej macierzy, mamy na myśli przede wszystkim odpowiednie charakterystyki wektora \tilde{p} . Niech \otimes oznacza iloczyn Kroneckera, zaś $\text{vec}(M)$ będzie wektorem uzyskanym przez zestawienie kolejnych kolumn danej macierzy M (Graham [149], Henderson i Scarle [171], Horn i Johnson [183]). Kładąc $r = b - Ay$, mamy $\tilde{A}y - \tilde{b} = r$. Na tej podstawie otrzymujemy reprezentację resztowego wektora $(I_n \otimes y^T) \text{vec}(\tilde{A}^T) - \tilde{b} = r$. Wektor $\text{vec}(\tilde{A}^T) \in \mathbb{R}^{n^2}$, można, zgodnie z przyjętym założeniem, przedstawić jako $\text{vec}(\tilde{A}^T) = M_p \tilde{p}$, gdzie $M_p \in \mathbb{R}^{n^2 \times n_p}$. Konsekwencją powyższego jest formuła $M_v v = r$, w której $M_v = [(I_n \otimes y^T) M_p D_c \quad -D_f] \in \mathbb{R}^{n \times (n_p + n)}$ oraz $v = [v_p^T \quad v_b^T]^T \in \mathbb{R}^{n_p + n}$. Optymalizacja oceny wstecznego błędu $\nu_{e,f}(y)$ sprowadza się do rozwiązania zadania minimalizacji normy z liniowym ograniczeniem

$$v^*(y) = \arg \min_{v \in \mathbb{R}^{n_p + n}} \|v\|_\infty \Big|_{M_v v = r(y)}.$$

Mamy bowiem $\nu_{e,f}(y) = \|v^*(y)\|_\infty$. Załóżmy, że macierz M_v ma pełny wierszowy rząd $\text{rank } M_v = n$. Na podstawie rozkładu tej macierzy według jej wartości szczególnych (*singular value decomposition, svd*; Datta [78], Meyer [290], Stewart [381]) $M_v = U_v [\Sigma_v \quad 0_{n \times n_p}] V_v^T$, gdzie $\Sigma_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest nieosobliwą diagonalną macierzą, zaś $U_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $V_v \in \mathbb{R}^{(n_p + n) \times (n_p + n)}$ są macierzami ortonormalnymi, uzyskujemy cząstkowy wektor $\tilde{z} = \Sigma_v^{-1} U_v^T r \in \mathbb{R}^n$. Zadanie polega zatem na wyznaczeniu takiego wektora $\underline{z} \in \mathbb{R}^{n_p}$, któremu przyporządkowany byłby wektor $v^* = V_v [\tilde{z}^T \quad \underline{z}^T]^T$ o minimalnej normie $\|v^*\|_\infty$. Opis numerycznych algorytmów optymalizacji ze względu na wektorową normę $\|\cdot\|_\infty$ znajdziemy w (Bartels *et al.* [21], Coleman i Li [67]). Niżej dajemy przybliżone analityczne rozwiązanie, polegające na poszukiwaniu wektora v o minimalnej kwadratowej normie. Ponieważ V_v jest macierzą ortonormalną, przeto optymalnym parametrem \underline{z} jest wektor zerowy $\underline{z} = 0_{n_p}$; zatem

$$\nu_{e,f}(y) \leq \left\| V_v \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ 0_{n_p} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \left\| V_v \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ 0_{n_p} \end{bmatrix} \right\|_2 = \|\tilde{z}\|_2.$$

Z ortonormalności U_v wynika łagodniejsze oszacowanie wstecznego błędu.

Lemat 2.4 (o wstecznym błędzie rozwiązania nicosobliwego liniowego zadania w przypadku ściśle strukturalizowalnych zaburzeń; Suchomski). *Niech $r = b - Ay$ będzie resztowym wektorem odpowiadającym danemu rozwiązaniu y nicosobliwego układu równań liniowych $Ax = b$, w którym $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $b \in \mathbb{R}^n$. Dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń macierzy tego układu oraz*

strukturalizowalnych zaburzeń wektora wyrazów wolnych $(A + \tilde{A})y = b + \tilde{b}$, gdzie $A + \tilde{A} = A(p + \tilde{p})$, $\tilde{p} = D_e v_p \in \mathbb{R}^{n_p}$, $D_e \in D_{n_p}^{\geq}$, $\tilde{b} = D_f v_b \in \mathbb{R}^n$ oraz $D_f \in D_n^{\geq}$, mamy

$$\nu_{e,f}(y) \leq \sigma_{\min}(M_r(y))^{-1} \|r(y)\|_2 \cdot \square$$

Wystarczającym, lecz nie koniecznym, warunkiem pełnego wierszowego rzędu macierzy M_v jest, aby wektor f nie miał zerowych współrzędnych. Co przy typowym założeniu $f = |b|$ nie zawsze zachodzi w przypadku układów równań liniowych, związanych z syntezą regulatorów metodą rozmieszczania biegunów.

Rozważmy teraz zaburzony układ równań $(A + \tilde{A})(x + \tilde{x}) = b + \tilde{b}$, w którym $A + \tilde{A} = A(p + \tilde{p})$, $|\tilde{p}| \leq \epsilon e$ oraz $|\tilde{b}| \leq \epsilon f$. Jak łatwo zauważyć, $\tilde{x} \approx -A^{-1}\tilde{A}x + A^{-1}\tilde{b}$ z dokładnością do wielkości $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Ponieważ $\tilde{A}x = (I_n \otimes x^T)M_p\tilde{p}$, zatem $|A^{-1}\tilde{A}x| \leq \epsilon|A^{-1}(I_n \otimes x^T)M_p|e$. Dla drugiego wyrazu tego przybliżenia $|A^{-1}\tilde{b}| \leq \epsilon|A^{-1}|f$. Stąd

$$\frac{\|\tilde{x}\|_{\infty}}{\epsilon\|x\|_{\infty}} \leq \frac{\| |A^{-1}(I_n \otimes x^T)M_p|e + |A^{-1}|f \|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

W badanym przypadku wektor p parametrów tworzymy z elementów macierzy A , zatem $\|\tilde{p}\|_{\infty} = \mathcal{O}(\epsilon)$ implikuje $\|\tilde{A}\|_{\infty} = \mathcal{O}(\epsilon)$. Ponadto można mówić o równoważności $|\tilde{p}| \leq \epsilon e \Leftrightarrow |\tilde{A}| \leq \epsilon E$ dla pewnej macierzy $E \geq 0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Na tej podstawie otrzymujemy poniższy lemat.

Lemat 2.5 (o oszacowaniu względnego błędu rozwiązania nieosobliwego zadania liniowego dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń; Suchomski). *Zakłada się, że $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ oraz $(A + \tilde{A})y = b + \tilde{b}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$, przy czym: A jest macierzą nieosobliwą, $A + \tilde{A} = A(p + \tilde{p})$, $\tilde{p} = D_e v_p \in \mathbb{R}^{n_p}$, $D_e \in D_{n_p}^{\geq}$, $\tilde{b} = D_f v_b \in \mathbb{R}^n$ oraz $D_f \in D_n^{\geq}$. Względny błąd danego rozwiązania y można oszacować jako*

$$\frac{\|x - y\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \kappa_{p,f}^{\infty}(A, x) \nu_{e,f}(y) + \mathcal{O}(\nu_{e,f}(y)^2)$$

gdzie następująco zdefiniowany wskaźnik uwarunkowania

$$\kappa_{e,f}^{\infty}(A, x) =$$

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\|\tilde{x}\|_{\infty}}{\epsilon\|x\|_{\infty}} : (A + \tilde{A})(x + \tilde{x}) = b + \tilde{b}, A + \tilde{A} = A(p + \tilde{p}), |\tilde{p}| \leq \epsilon e, |\tilde{b}| \leq \epsilon f \right\}$$

opisany jest wzorem

$$\kappa_{\epsilon, f}^{\infty}(A, x) = \frac{\| |A|^{-1}(I_n \otimes x^T)M_p |e + |A|^{-1}|f \|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}. \quad \square$$

Szczegółowa postać macierzy D_e , D_f , M_p oraz M_n zależy od sformułowania danego liniowego zadania. W numerycznym przykładzie 2.3 pokażemy w jaki sposób wyznaczać te macierze dla typowego problemu rozmieszczania biegunów, wiodącego do liniowego zadania z macierzą Sylwestera.

Uwaga 2.2 (Suchomski). Zdefiniujmy wskaźnik uwarunkowania zadania najmniejszych kwadratów $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \neq 0_m \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$

$$\kappa_2(A, b) = \kappa_2(A) + \kappa_2(A)(\kappa_2(A) + 1) \frac{\|r\|_2}{2\|A\|_2\|x\|_2}, \quad r = b - Ax.$$

Zachodzi $\|x - y\|_2 / \|x\|_2 \leq 2\epsilon\kappa_2(A, b) / (1 - \epsilon\kappa_2(A))$, gdzie $y \in \mathbb{R}^n$ jest pewnym (zaburzonym) rozwiązaniem tego zadania (por. *lemat D.5*). Najprostszy sposób oceny wartości wskaźnika $\kappa_2(A, b)$, przy nieznanym x , wynika z nierówności $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2$ i prowadzi do formuły

$$\kappa_2(A, b) \leq \kappa_2(A) + \frac{\kappa_2(A)(\kappa_2(A) + 1)}{2} \tan \varphi, \quad \varphi = \angle \{b, \text{Im } A\}.$$

Rozważmy pomocniczą równość

$$\frac{\|r\|_2}{\|A\|_2\|x\|_2} \kappa_2^2(A) = \frac{\|Ax\|_2 \tan \varphi}{\|A\|_2\|x\|_2} \kappa_2^2(A) = \frac{\kappa_2^2(A)}{\frac{\|A\|_2\|x\|_2}{\|Ax\|_2}} \tan \varphi \quad (2.3)$$

w której występuje 'niepokojący' czynnik $\kappa_2(A)^2$ odpowiedzialny za potencjalne pogorszenie uwarunkowania danego zadania najmniejszych kwadratów. Niektórzy autorzy (Higham [177], Golub i Van Loan [139]) mówią wprost o takim niebezpieczeństwie, głosząc, że dla 'małych' wartości normy $\|r\|_2$ wrażliwość zadania najmniejszych kwadratów na zaburzenia wejściowych danych jest 'rzędu' $\kappa_2(A)$ oraz, że wrażliwość ta zawsze wzrasta ($\propto \kappa_2(A)^2$), gdy występuje 'silna' niezgodność (niedopasowanie) danych ($b \notin \text{Im } A$). Ponieważ iloraz $\|A\|_2\|x\|_2 / \|Ax\|_2$ może przyjmować wartości między 1 a $\kappa_2(A)$, zatem wyrażenie (2.3) nie musi zawsze wykazywać zmienności typu $\propto \kappa_2(A)^2$. Z kolei, gdy $\|Ax\|_2 \approx \|A\|_2\|x\|_2$, wtedy

$$\kappa_2(A, b) \approx \kappa_2(A) + \frac{\kappa_2(A)(\kappa_2(A) + 1)}{2} \tan \varphi$$

co oznacza, że w takim przypadku można mówić o pewnej groźbie pogorszenia uwarunkowania badanego zadania, pojawiającej się, gdy zarówno $\kappa_2(A)$, jak i $\tan \varphi$, będą dostatecznie duże ($\tan \varphi \gg 1/\kappa_2(A)$). Zastanówmy się, czy groźba ta jest 'naprawdę' realna. Na podstawie rozkładu *svd* macierzy A uzyskujemy równość $v_i^T x = u_i^T b / \sigma_i$, w której v_i oraz u_i oznaczają odpowiednio prawy oraz lewy wektor szczególny przyporządkowany wartości szczególnej σ_i tej macierzy, $i \in \{1, \dots, n\}$. Mamy zatem

$$\|Ax\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 v_1^T x \\ \vdots \\ \sigma_n v_n^T x \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} u_1^T b \\ \vdots \\ u_n^T b \end{bmatrix} \right\|_2.$$

Przybliżona równość $\|Ax\|_2 \approx \|A\|_2 \|x\|_2$ zachodzi wtedy, gdy rzuty wektora x na kierunki wyznaczone przez wektory bazy podprzestrzeni $\text{Ker } A^\perp = \text{span} \{v_i\}_{i=1}^n$ będą miały największe długości dla tych kierunków, które są przyporządkowane największym wartościom szczególnym macierzy A . Zauważmy przy tym, że odpowiednia podprzestrzeń rozpięta na takich prawych wektorach szczególnych będzie tym 'rozleglejsza', im wartości szczególne macierzy A będą mniej zróżnicowane (gdy $\sigma_1 = \dots = \sigma_n$, wtedy $\|Ax\|_2 = \|A\|_2 \|x\|_2$). Zatem, lapidarnie mówiąc, dominującej roli $\kappa_2(A)^2$ w kształtowaniu oceny uwarunkowania rozważanego zadania możemy się spodziewać tylko dla dostatecznie małych wartości wskaźnika $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$. Co jednak oznacza, że stosowne pogorszenie uwarunkowania tego zadania nie będzie zbyt duże. Z drugiej strony, oczekując spełnienia przybliżonej równości $\|Ax\|_2 \approx \|A\|_2 \|x\|_2$, musimy przyjąć, że rzut wektora b na podprzestrzeń rozpiętą na lewych wektorach szczególnych macierzy A lokuje się głównie w podprzestrzeni wyznaczonej przez te lewe wektory szczególne, które są przyporządkowane największym wartościom szczególnym owej macierzy. Ponieważ wymienione lewe wektory szczególne należą do bazy podprzestrzeni $\text{Im } A = \text{span} \{u_i\}_{i=1}^n$, zatem w takim przypadku $\tan \varphi$ musi przyjmować małą wartość – co potwierdza poprzedni wniosek o 'niegroźnym' udziale czynnika $\kappa_2(A)^2$ w kształtowaniu wskaźnika $\kappa_2(A, b)$. Do podobnych wniosków dochodzi się w pracy (Grcar [150]) na podstawie probabilistycznej interpretacji opisanej sytuacji (por. także Van der Sluis [442]). \square

Uwaga 2.3 (Suchomski). W ogólnym przypadku ocena wrażliwości liniowego zadania najmniejszych kwadratów może w istotnym stopniu zależeć nie tylko od macierzy tego zadania, ale także od wektora wyrazów wolnych, co jest sytuacją odmienną w stosunku do nieosobliwego zadania

liniowego. Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów może być źle uwarunkowane nawet wtedy, gdy wartość wskaźnika $\kappa_2(A, b)$ nie jest w decydującym stopniu determinowana przez $\kappa_2(A)^2$. Analizując postać wskaźnika $\kappa_2(A, b)$ należy zatem 'łącznie' brać pod uwagę dwie wymienione przyczyny ewentualnej dużej wrażliwości danego zadania najmniejszych kwadratów: źle uwarunkowanie macierzy A (duża wartość $\kappa_2(A)$) oraz niedopasowanie wektora b (duża wartość $\tan \varphi$). Zauważmy ponadto, że $\|Ax\|_2$ przyjmuje 'małą' wartość, gdy wektor x jest ortogonalny do tych prawych wektorów szczególnych macierzy A , które są przyporządkowane największym wartościom szczególnym, co także oznacza, iż wektor b jest ortogonalny do odpowiednich lewych wektorów szczególnych tej macierzy, a tym samym, że występuje niedopasowanie $b \notin \text{Im } A$. Omawiane niedopasowanie może mieć miejsce w *algorytmie 2.1* wyznaczania rzędu uproszczenia nieminimalnego modelu dla $m > N_A$. Następujący wskaźnik $\underline{\kappa}_2(A, b) = \kappa_2(A, b)/\kappa_2(A) \leq 1 + ((\kappa_2(A) + 1) \tan \varphi)/2$ pokazuje wpływ niezgodności pary (A, b) na pogorszenie uwarunkowania danego zadania najmniejszych kwadratów. W praktycznych obliczeniach możemy mówić tylko o pewnej ocenie $\tan \varphi \approx \|(I_m - \underline{U}\underline{U}^T)b\|_2/\|\underline{U}^T b\|_2$, w której kolumny macierzy $\underline{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ utworzono z kolejnych początkowych lewych wektorów szczególnych macierzy A . \square

Uwaga 2.4 (Suchomski). Niech u_ε oznacza precyzję zmiennoprzecinkowej arytmetyki (zob. *dodatek A*). Załóżmy, że w *algorytmie 2.1* liniowe zadanie wyznaczania współczynników wielomianów $H_i(\delta)$ oraz $L_i(\delta)$, a także liniowe zadania najmniejszych kwadratów wyznaczania współczynników wielomianów $F_i^m(\delta)$, $G_i^m(\delta)$ oraz $\Lambda_i^m(\delta)$, $N_A - m \leq i \leq N_A - m + N_q - 1$, rozwiązywane są za pomocą numerycznie stabilnych metod. Z konstrukcji tego algorytmu wynika, że konieczny warunek uznania indeksu m^* jako rzędu uproszczenia nieminimalnego modelu $(A(\delta), B(\delta))$ ma postać $J_{N_q}^{m^*}(A, B) \propto u_\varepsilon$ lub $\bar{J}_{N_q}^{m^*}(A, B) \propto u_\varepsilon$. \square

Przykład 2.1 (wyznaczanie przybliżonego największego wspólnego dzielnika pary wielomianów; Suchomski). Rozważmy znany problem oceny największego wspólnego dzielnika wielomianów zmiennej x (Chin i Corless [61], Emiris *et al.* [106]): $A(x) = 0.37725 + 2.762x + 7.647x^2 + 9.765x^3 + 5.503x^4 + x^5$ oraz $B(x) = 0.7605 + 2.007x - 0.7745x^2 - 2.993x^3 + x^4$. Niech $N_A = 4$. Dla hipotetycznej wartości $m = N_B = 4$ otrzymujemy wskaźniki: $J_4^4 = 0.966$ oraz $\bar{J}_4^4 = 1.988$. Hipotezie $m = 3$ przyporządkowujemy: $J_4^3 = 1.012$ i $\bar{J}_4^3 = 2.032$. Wreszcie, dla $m = 2$ mamy: $J_4^2 = 1.146 \times 10^{-5}$ oraz $\bar{J}_4^2 = 1.608 \times 10^{-5}$. Na tej podstawie wnioskujemy, że $N_A = 2$. Co z

kolei pozwala na oszacowanie największego wspólnego dzielnika rozważanych wielomianów: $\Lambda(x) = 0.2534882 + 1.0070033x + x^2$. Reszta z dzielenia $A(x)/\Lambda(x)$ wynosi $-(0.3798580 + 2.0084648x) \times 10^{-4}$, zaś reszta z dzielenia $B(x)/\Lambda(x)$ ma postać $(2.8306705 - 8.5269971x) \times 10^{-5}$. \square

Przykład 2.2 (ocena rzędu uproszczenia zaburzonego nieminimalnego modelu: Suchomski). Rozważmy dyskretny minimalny model zapisany dla operatora ζ

$$\frac{B'(\zeta)}{A'(\zeta)} = \frac{0.1659739 + 0.1668047\zeta}{0.1659739 + 0.8315305\zeta + \zeta^2}$$

przyporządkowany modelowi czasu ciągłego $(1+s)/(1+5s+6s^2)$ przy $\Delta = 0.01$ s. Niech $\Lambda(\zeta) = (\zeta + 0.2) \cdot (\zeta - 0.35) = -0.07 - 0.15\zeta + \zeta^2$, czemu odpowiada stosowny nieminimalny model $B(\zeta)/A(\zeta)$. Dla hipotetycznej wartości $m = N_B = 3$ otrzymujemy wielomiany $\Lambda_i^3(\zeta)$, $i \in \{1, \dots, N_q = 4\}$, a także wskaźniki $J_4^3 = 0.816$ oraz $\bar{J}_4^3 = 0.781$. Wyniki te uzyskano na podstawie uprzednio określonych wielomianów $L_i(\zeta)$ oraz $F_i(\zeta)$, $i \in \{1, \dots, 4\}$. Zadanie wyznaczania wielomianów $L_i(\zeta)$ jest bardzo dobrze uwarunkowane ($\kappa_2(\cdot) = 3.354$, $\kappa_1(\cdot) = 3.426$, $\kappa_\infty(\cdot) = 4.697$, $\kappa_S(\cdot, \cdot) = 1.527$, $\kappa_S(\cdot) = 4.489$ oraz $\kappa_{\cdot}^\infty(\cdot, \cdot) = 3.053$, zob. *dodatek A*), zaś metoda obliczania współczynników tych wielomianów – czyli standardowy algorytm rozwiązywania układu równań z trójkątną macierzą – jest numerycznie stabilna ($\eta_{\cdot}^2(\cdot) = 1.390 \times 10^{-17}$, $\eta_{\cdot}^\infty(\cdot) = 1.483 \times 10^{-17}$ oraz $\omega_{\cdot}(\cdot) = 6.290 \times 10^{-17}$, zob. *dodatek A*). Wielomiany $F_i(\zeta)$ uzyskujemy przez numerycznie stabilne rozwiązanie dobrze uwarunkowanego liniowego zadania najmniejszych kwadratów (przykładowo, dla $i = 3$ mamy wskaźniki: $\kappa_2(\cdot) = 1$, $\kappa_2(\cdot, \cdot) = 1.723$ oraz $\tan \varphi = 0.723$, a także wsteczne błędy: $\eta_{\cdot}(\cdot) = 5.637 \times 10^{-18}$, $\hat{\eta}_{\cdot}(\cdot) = 2.907 \times 10^{-17}$ oraz $\bar{\omega}_{\cdot}(\cdot) = 1.730 \times 10^{-16}$). Analogiczna charakterystyka dotyczy procesu wyznaczania wielomianów $\Lambda_i^m(\zeta)$, $i \in \{1, \dots, 4\}$. Przykładowo, dla $i = 3$ uzyskano: $\kappa_2(\cdot) = 10.980$, $\kappa_2(\cdot, \cdot) = 13.749$, $\tan \varphi = 0.0421$, $\eta_{\cdot}(\cdot) = 3.767 \times 10^{-18}$, $\hat{\eta}_{\cdot}(\cdot) = 6.234 \times 10^{-18}$ oraz $\bar{\omega}_{\cdot}(\cdot) = 6.778 \times 10^{-14}$.

Z kolei, kładąc $m = 2$, mamy $\Lambda_2^2(\zeta) \approx \dots \approx \Lambda_5^2(\zeta) \approx -0.0700000 - 0.1500000\zeta + \zeta^2$, $J_4^2 = 0.0$ oraz $\bar{J}_4^2 = 0.0$. Zadanie wyznaczania wielomianów $L_i(\zeta)$, $i \in \{2, \dots, 5\}$ opisane jest wskaźnikami uwarunkowania: $\kappa_2(\cdot) = 3.357$, $\kappa_1(\cdot) = 3.667$, $\kappa_\infty(\cdot) = 4.843$, $\kappa_S(\cdot, \cdot) = 1.527$, $\kappa_S(\cdot) = 4.727$ oraz $\kappa_{\cdot}^\infty(\cdot, \cdot) = 3.053$, a także wartościami wstecznych błędów: $\eta_{\cdot}^2(\cdot) = 1.387 \times 10^{-17}$, $\eta_{\cdot}^\infty(\cdot) = 1.483 \times 10^{-17}$ oraz $\omega_{\cdot}(\cdot) = 6.290 \times 10^{-17}$). W przypadku wielomianów $F_i(\zeta)$, $G_i(\zeta)$ oraz Λ_i^2 , $i \in \{2, \dots, 5\}$ dla przykładowej wartości $i = 4$ mamy, odpowiednio: ($\kappa_2(\cdot, \cdot) = 33.000$, $\tan \varphi = 5.772 \times 10^{-16}$, $\eta_{\cdot}(\cdot) = 4.081 \times 10^{-18}$, $\hat{\eta}_{\cdot}(\cdot) = 1.357 \times 10^{-17}$) oraz ($\kappa_2(\cdot, \cdot) = 2.974$, $\tan \varphi =$

4.431×10^{-16} , $\eta_{\cdot, \cdot}(\cdot) = 5.300 \times 10^{-18}$, $\hat{\eta}_{\cdot, \cdot}(\cdot) = 1.098 \times 10^{-18}$). Przedstawione dane świadczą, że rozważane zadania cechuje dobre uwarunkowanie, zaś ich rozwiązania są numerycznie stabilne. Właściwie oceniwszy rząd uproszczenia $N_A = 2$, łatwo odtworzymy parametry nominalnego modelu. Stosując *lemat 2.3*, otrzymujemy wielomiany $A'(\zeta) = 0.1659739 + 0.8315305\zeta + \zeta^2$ oraz $B'(\zeta) = 0.1659739 + 0.1668047\zeta$. Normy bezwzględnych błędów oszacowań współczynników mianownika i licznika tego modelu wynoszą, odpowiednio: 1.241×10^{-16} oraz 0. Powyższe wyniki dotyczą 'dokładnego' modelu nieminimalnego, którego współczynniki reprezentowane są z podwójną zmiennoprzecinkową precyzją (Higham [177], Overton [310]). W tym też sensie, wobec przyjętych założeń, możemy mówić o 'ścisłym' uproszczeniu tego modelu (skreśleniu największego wspólnego dzielnika licznika i mianownika funkcji $B(\zeta)/A(\zeta)$).

Rozważmy problem oceny rzędu uproszczenia zaburzonego nieminimalnego modelu. Przyjmijmy, że źródłem niepewności jest ograniczona liczba znaczących cyfr zmiennoprzecinkowej reprezentacji współczynników tego modelu. Wyniki obliczeń dla $m = 2$ przedstawiono w tabeli 2.1 (analizując wartości wskaźników J_4^2 oraz \bar{J}_4^3 , w każdym z przypadków odrzucamy hipotezę $m = N_B$). \square

liczba cyfr znaczących	J_4^2, \bar{J}_4^2	$\lambda_{2,0}^2, \lambda_{2,1}^2$	$\lambda_{3,0}^2, \lambda_{3,1}^2$	$\lambda_{4,0}^2, \lambda_{4,1}^2$	$\lambda_{5,0}^2, \lambda_{5,1}^2$
3	2.436E-4	-0.0698831	-0.0699002	-0.0699660	-0.0699612
	1.930E-4	-0.1503106	-0.1501351	-0.1501363	-0.1501362
4	1.104E-4	-0.0700231	-0.0700086	-0.0700140	-0.0700026
	9.557E-5	-0.1500252	-0.1499318	-0.1499342	-0.1499319
5	7.073E-6	-0.0699987	-0.0699995	-0.0699990	-0.0699997
	5.998E-6	-0.1499978	-0.1500038	-0.1500036	-0.1500038
6	4.764E-7	-0.0700002	-0.0700001	-0.0700000	-0.0700000
	3.842E-7	-0.1499994	-0.1499997	-0.1499997	-0.1499997
8	3.674E-9	-0.0700000	-0.0700000	-0.0700000	-0.0700000
	2.963E-9	-0.1500000	-0.1500000	-0.1500000	-0.1500000

Tabela 2.1. Przykład 2.2. Ilustracja procedury wyznaczania rzędu uproszczenia zaburzonego nieminimalnego modelu.

Przykład 2.3 (uwarunkowanie zadania rozmieszczania biegunów (I); Suchomski). Dany jest układ sterowania o schemacie jak na rys. 2.1. Niech $P_{yu}(\zeta) = B(\zeta)/A(\zeta)$, gdzie $\deg A(\zeta) = N_A$, $\deg B(\zeta) = N_B < N_A$, oznacza minimalny nominalny model sterowanego obiektu. Załóżmy, że wielomian

charakterystyczny układu zamkniętego ma postać $T(\zeta) = C(\zeta) \cdot T_0(\zeta)$, gdzie $C(\zeta)$ stopnia $\deg C(\zeta) = N_A - 1$ oznacza obserwacyjny wielomian, zaś $T_0(\zeta) = \sum_{j=0}^{N_A} t_{0,j} \zeta^j$, $t_{0,N_A} = 1$, jest założonym monicznym wielomianem. Na tej podstawie otrzymujemy układ liniowych równań $Wl = w$ z macierzą Sylwestera $W \in \mathbb{R}^{(2N_A-1) \times (2N_A-1)}$:

$$W = \begin{bmatrix} T_{N_A}^B & T_{N_A-1}^A \\ 0_{(d-1) \times N_A} & \end{bmatrix}$$

$$l = \begin{bmatrix} l_y \\ l_u \end{bmatrix}, \quad w = T_{N_A}^C(t_0 - a), \quad t_0 = [t_{0,0} \quad \cdots \quad t_{0,N_A-1}]^T$$

w którym rolę niewiadomych pełnią wektory $l_u = [l_{u,0} \quad \cdots \quad l_{u,N_A-2}]^T$ oraz $l_y = [l_{y,0} \quad \cdots \quad l_{y,N_A-1}]^T$ współczynników wielomianów $L_u(\zeta)$ oraz $L_y(\zeta)$. Wzmocnienie regulatora obliczamy ze wzoru $g = t_{0,0}/b_0$.

Wektor parametrów ma postać $p = [a_0 \quad \cdots \quad a_{N_A-1} \quad b_0 \quad \cdots \quad b_{N_B}]^T$, $n_p = N_A + N_B + 1$. Zakładamy, że $\tilde{p} = D_e v_p$ oraz $\tilde{w} = D_f v_w$, gdzie $D_e = \text{diag}(|p|) \in \mathbb{R}^{(N_A+N_B+1) \times (N_A+N_B+1)}$, $D_f = \text{diag}(|w|) \in \mathbb{R}^{(2N_A-1) \times (2N_A-1)}$, $v_p \in \mathbb{R}^{N_A+N_B+1}$ oraz $v_w \in \mathbb{R}^{2N_A-1}$. Niech $\hat{l} = [\hat{l}_y^T \quad \hat{l}_u^T]^T$, gdzie $\hat{l}_u \in \mathbb{R}^{N_A-1}$ oraz $\hat{l}_y \in \mathbb{R}^{N_A}$, będzie numerycznie uzyskanym rozwiązaniem układu $Wl = w$. Mamy zatem

$$\tilde{W} \begin{bmatrix} \hat{l}_y \\ \hat{l}_u \end{bmatrix} - \tilde{w} = r$$

gdzie $r = w - W\hat{l}$. Na tej podstawie otrzymujemy układ równań $M_v v = r$, w którym

$$M_v = \begin{bmatrix} T_{N_A}^{\hat{l}_u} & T_{N_B+1}^{\hat{l}_y} & -I_{2N_A-1} \\ 0_{1 \times N_A} & 0_{(d-1) \times (N_B+1)} & \end{bmatrix} \text{diag}(D_e, D_f)$$

oraz $v = [v_p^T \quad v_w^T]^T$. Macierz $M_v \in \mathbb{R}^{(2N_A-1) \times (3N_A+N_B)}$ tego układu ma pełny wierszowy rząd wtedy i tylko wtedy, gdy $D_e \in D_{N_A+N_B+1}^>$ oraz $D_f \in D_{2N_A-1}^>$. Podobne postępowanie pozwala na wyznaczenie stosownej macierzy M_v odpowiadającej układowi równań z macierzą danych o innej strukturze, dotyczy to przykładowo macierzy cyklicznych, symetrycznych, macierzy Toeplitza oraz Hankela (por. Bunch [46], Higham i Higham [179], Rump [345, 346], Van Dooren [446]).

Rozważmy numeryczny przykład, w którym

$$\tilde{P}_{\rho y u}(s) = \frac{1 + 0.6s}{(1 - 0.4s) \cdot (1 + 0.3s)^2 \cdot (1 + 0.4s)}$$

jest nominalnym modelem sterowanego obiektu. Kładąc $\Delta = 0.05$ s, otrzymujemy nominalny model czasu dyskretnego

$$\bar{P}_{\delta yu}(\zeta) = \frac{B(\zeta)}{A(\zeta)} = \frac{-58.9964102 - 39.9044572\zeta - 1.9091811\zeta^2 - 0.0163357\zeta^3}{-58.9964102 - 41.3793887\zeta + 1.2475236\zeta^2 + 5.8278239\zeta^3 + \zeta^4}.$$

Niech $C(\zeta) = 487.3294738 + 185.7817461\zeta + 23.6081604\zeta^2 + \zeta^3$ oraz $T_0(\zeta) = 172.7493829 + 190.5997689\zeta + 78.8604957\zeta^2 + 14.5015398\zeta^3 + \zeta^4$, co odpowiada wielomianom $(1+0.1s)^3$ oraz $(1+0.25s)^4$. Parametry regulatora mają postać:

$$\begin{aligned} L_u(\zeta) &= -707.5379895 + 98.9068500\zeta + 7.5573097\zeta^2 \\ L_y(\zeta) &= -1206.7573881 - 1432.4105429\zeta - 548.3286100\zeta^2 - 68.3416665\zeta^3. \end{aligned}$$

Ze standardowym nominalnym modelem $\bar{P}_{qu}(z)$ związane są wielomiany:

$$\begin{aligned} L_{qu}(z) &= 0.0421561 - 0.5084638z + 0.3778655z^2 \\ L_{qy}(z) &= 44.3554177 - 153.7731648z + 177.6085689z^2 - 68.3416665z^3. \end{aligned}$$

W obu przypadkach wzmocnienie $g = -2.9281338$. Podstawowe wskaźniki uwarunkowania stosownych macierzy Sylwestera mają wartość: $\kappa_1(W) = 5.317 \times 10^3$, $\kappa_2(W) = 4.020 \times 10^3$ oraz $\kappa_\infty(W) = 5.120 \times 10^3$ (model oparty na operatorze δ), zaś: $\kappa_1(W_q) = 4.318 \times 10^8$, $\kappa_2(W_q) = 5.060 \times 10^8$ oraz $\kappa_\infty(W_q) = 1.006 \times 10^9$ (model wykorzystujący operator q). Uwarunkowanie zadania można poprawić przez skalowanie. Na podstawie *lematu D.3* wyznaczono wartości wskaźnika $\kappa_\infty(\cdot)$ optymalnie wyskalowanych macierzy: 59.335 ($= \rho(|W||W^{-1}|)$) oraz 4.446×10^5 ($= \rho(|W_q||W_q^{-1}|)$). Jak widzimy, pomimo optymalnego skalowania, układ równań przyporządkowany modelowi związanemu z operatorem q wykazuje znacznie gorsze uwarunkowanie w porównaniu do analogicznego układu odpowiadającego modelowi, w którym zastosowano operator δ .

Wskaźniki uwarunkowania dotyczące strukturalizowalnych zaburzeń mają wartości: $\kappa_{|W|,|w|}^\infty(W, \hat{l}) = 167.802$, $\kappa_S(W, \hat{l}) = 89.010$ oraz $\kappa_S(W) = 358.042$ (model z operatorem δ), zaś: $\kappa_{|W_q|,|w_q|}^\infty(W_q, \hat{l}_q) = 1.726 \times 10^6$, $\kappa_S(W_q, \hat{l}_q) = 9.928 \times 10^5$ oraz $\kappa_S(W_q) = 4.855 \times 10^8$ (model wyprowadzony dla operatora q), gdzie \hat{l} oraz \hat{l}_q oznaczają numeryczne rozwiązania odpowiednich liniowych zadań.

Rozważmy wsteczne błędy rozwiązań \hat{l} oraz \hat{l}_q . W przypadku modelowania odwołującego się do operatora δ mamy: $\eta_{W,w}^2(\hat{l}) = 7.496 \times 10^{-18}$, $\eta_{W,w}^\infty(\hat{l}) = 8.156 \times 10^{-18}$ oraz $\omega_{|W|,|w|}(\hat{l}) = 6.318 \times 10^{-17}$. Dla modelu, w którym użyto operatora q zachodzi: $\eta_{W_q,w_q}^2(\hat{l}_q) = 1.792 \times 10^{-19}$, $\eta_{W_q,w_q}^\infty(\hat{l}_q) =$

2.084×10^{-19} oraz $\omega_{|W_q|,|w_q|}(\hat{l}_q) = 4.655 \times 10^{-16}$. Powyższe dane świadczą o tym, że rozwiązania \hat{l} oraz \hat{l}_q odpowiednich liniowych zadań spełniają kryteria numerycznej stabilności wywiedzione z analizy wstecznych błędów, zarówno w przypadku zaburzeń niestrukturalizowalnych, jak i w przypadku zaburzeń o strukturalizowalnej postaci. Tezę o numerycznej stabilności rozwiązań \hat{l} oraz \hat{l}_q , a także pośrednio tezę o numerycznej stabilności metody Householdera ortogonalnego rozkładu QR , którą zastosowano do ich wyznaczenia, potwierdzimy przez badanie względnego błędu tych rozwiązań. W tym celu dla modelu związanego z operatorem δ wyznaczono następujące oceny względnego błędu rozwiązania \hat{l} : $\varepsilon_{W,w}^2(\hat{l}) = 6.026 \times 10^{-14}$ oraz $\varepsilon_{W,w}^\infty(\hat{l}) = 8.477 \times 10^{-14}$. Porównując je z odpowiednimi kryterialnymi wartościami: $\kappa_2(W)u_\varepsilon = 8.926 \times 10^{-13}$ oraz $\kappa_\infty(W)u_\varepsilon = 1.154 \times 10^{-12}$, stwierdzamy, że rozwiązanie to spełnia wymóg numerycznej stabilności przy założeniu zaburzeń o niestrukturalizowalnym charakterze. W podobny sposób postępujemy w przypadku założenia o strukturalizowalnych zaburzeniach. Odpowiednie oszacowania względnego błędu rozwiązania \hat{l} mają postać: $\varepsilon_{W,w}^\omega(\hat{l}) = 1.106 \times 10^{-14}$ oraz $\varepsilon_{W,w}^\parallel(\hat{l}) = 1.643 \times 10^{-15}$. Porównanie z kryterialną wartością $\kappa_S(W, \hat{l})u_\varepsilon = 1.976 \times 10^{-14}$ wypada zatem bardzo pomyślnie (zob. *dodatek A*).

Analogiczne studium przeprowadzono dla modelu związanego z operatorem q , otrzymując następujące oszacowania względnego błędu rozwiązania \hat{l}_q : $\varepsilon_{W_q,w_q}^2(\hat{l}_q) = 1.813 \times 10^{-10}$ oraz $\varepsilon_{W_q,w_q}^\infty(\hat{l}_q) = 4.191 \times 10^{-10}$. Porównując je z odpowiednimi kryterialnymi wartościami: $\kappa_2(W_q)u_\varepsilon = 1.124 \times 10^{-7}$ oraz $\kappa_\infty(W_q)u_\varepsilon = 2.233 \times 10^{-7}$, stwierdzamy, że \hat{l}_q spełnia wymóg numerycznej stabilności przy założeniu zaburzeń o niestrukturalizowalnym charakterze. Oszacowania względnego błędu rozwiązania badanego rozwiązania przy założeniu strukturalizowalnych zaburzeń mają postać: $\varepsilon_{W_q,w_q}^\omega(\hat{l}_q) = 8.033 \times 10^{-10}$ oraz $\varepsilon_{W_q,w_q}^\parallel(\hat{l}_q) = 4.933 \times 10^{-11}$. Stosowna kryterialna wartość wynosi $\kappa_S(W_q, \hat{l}_q)u_\varepsilon = 2.204 \times 10^{-10}$.

Przyjmując model zaburzeń o ściśle strukturalizowalnym charakterze, otrzymujemy: $\kappa_{|p|,|w|}^\infty(W, \hat{l}) = 93.377$ oraz $\kappa_{|p_q|,|w_q|}^\infty(W_q, \hat{l}_q) = 8.307 \times 10^5$. Oszacowania wstecznych błędów $\nu_{|p|,|w|}(\hat{l}) = 1.247 \times 10^{-16}$ oraz $\nu_{|p_q|,|w_q|}(\hat{l}_q) = 8.602 \times 10^{-16}$ pozwalają na podtrzymanie tezy o numerycznej stabilności rozważanych rozwiązań \hat{l} oraz \hat{l}_q . Na podstawie *lematu 2.5* otrzymujemy zgrubne oceny względnych błędów tych rozwiązań: 1.164×10^{-14} oraz 7.146×10^{-10} .

W świetle powyższych ustaleń spodziewamy się, że w przypadku modeli przyporządkowanych operatorowi q zaburzenie parametrów nominal-

nego modelu będzie prowadzić do bardziej widocznej degradacji 'użytkowych' cech zamkniętego układu z regulatorem wyznaczonym na podstawie takiego modelu. Porównawcze badania potwierdzające to przypuszczenie przeprowadzono przy założeniu, że za zaburzenie nominalnych modeli odpowiada ograniczona liczba znaczących cyfr zmiennoprzecinkowej reprezentacji parametrów tych modeli (współczynników wielomianów licznika i mianownika danego modelu). Dla przykładowej reprezentacji o czterech znaczących cyfrach mamy:

$$\begin{aligned} L_u(\zeta) &= -707.2868612 + 98.9127183\zeta + 7.5568312\zeta^2 \\ L_y(\zeta) &= -1206.9216951 - 1432.5004774\zeta - 548.3459762\zeta^2 - 68.3420167\zeta^3 \\ g &= -2.9279556 \end{aligned}$$

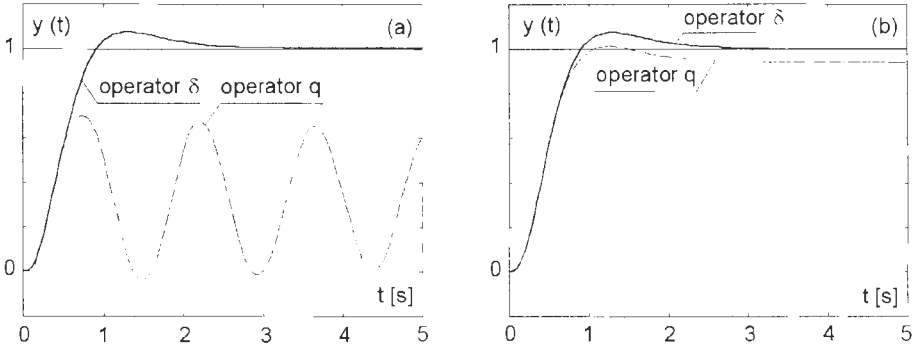
oraz odpowiednio:

$$\begin{aligned} L_{qu}(z) &= 0.0500902 - 0.4744600z + 0.3871279z^2 \\ L_{qy}(z) &= 35.7724133 - 125.5769452z + 147.0738842z^2 - 57.4793289z^3 \\ g_q &= -2.9212220. \end{aligned}$$

W tabeli 2.2 podano względne błędy ε_{l_u} , $\varepsilon_{l_{qu}}$, ε_{l_y} oraz $\varepsilon_{l_{qy}}$ wektorów współczynników odpowiednich wielomianów $L_u(\zeta)$, $L_{qu}(z)$, $L_y(\zeta)$ oraz $L_{qy}(z)$, przy czym jako 'dokładne' wartości tych współczynników przyjęto wartości przyporządkowane dyskretnym modelom reprezentowanym z podwójną zmiennoprzecinkową precyzją. Skokowe odpowiedzi zamkniętych układów sterowania, w których zastosowano tak wyznaczone regulatory, pokazano na rys. 2.2. \square

liczba cyfr znaczących	ε_{l_u}		$\varepsilon_{l_{qy}}$	
	ε_{l_u}	$\varepsilon_{l_{qu}}$	ε_{l_y}	$\varepsilon_{l_{qy}}$
3	3.687E-3	8.751E-2	1.408E-3	2.729E-1
4	3.516E-4	5.690E-2	9.633E-5	1.762E-1
5	2.080E-5	1.717E-3	1.392E-5	5.402E-3
6	4.665E-6	9.490E-4	1.643E-6	2.969E-3
8	7.216E-8	1.181E-4	2.373E-8	3.695E-4

Tabela 2.2. Przykład 2.3. Względne błędy parametrów regulatora wynikające z ograniczonej precyzji reprezentacji modelu obiektu.



Rys. 2.2. Przykład 2.3. Ilustracja wpływu zaburzenia nominalnych modeli $\bar{P}_{\delta y u}(\zeta)$ oraz $\bar{P}_{q y u}(z)$ na odpowiedzi skokowe układu regulacji: a) 3 cyfry znaczące, b) 4 cyfry znaczące.

2.3 Nominalna stabilność oraz jakość sterowania

Niech $P(\delta) = \sum_{i=0}^{n_p} k_i P_i(\delta)$ oznacza liniową kombinację wielomianów będących elementami dowolnego ciągu wielomianów z pierwszej bazy diofantycznej, przy czym liczba $n_p + 1$ uwzględnianych wielomianów oraz rzeczywiste współczynniki $\{k_i\}_{i=0}^{n_p}$ tej kombinacji są parametrami projektu. Kładąc $L_u(\delta) = G(\delta)$ oraz $L_y(\delta) = F(\delta)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(\delta) &= C(\delta) \cdot K(\delta) - A(\delta) \cdot E(\delta) \\ G(\delta) &= \begin{cases} B(\delta) \cdot E(\delta) & \text{dla } n_p < d \\ B(\delta) \cdot E(\delta) - C(\delta) \cdot H(\delta) & \text{dla } n_p \geq d \end{cases} \\ L(\delta) &= \begin{cases} B(\delta) \cdot K(\delta) & \text{dla } n_p < d \\ B(\delta) \cdot K(\delta) - A(\delta) \cdot H(\delta) & \text{dla } n_p \geq d \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $K(\delta) = \sum_{i=0}^{n_p} k_i \delta^i$ oznacza prototypowy wielomian o swobodnie dobraćanym stopniu oraz współczynnikach. Na tej podstawie stwierdzamy, iż $A(\delta) \cdot G(\delta) + B(\delta) \cdot F(\delta) = C(\delta) \cdot L(\delta)$, a ponadto widzimy, że charakterystyczny wielomian zamkniętego układu sterowania ma czynnikową postać $T(\delta) = C(\delta) \cdot T_0(\delta)$, w której $T_0(\delta) = A(\delta) + L(\delta)$.

Podobnie postępujemy z drugą diofantyczną bazą: ustalając \bar{n}_p oraz przyjmując rzeczywiste współczynniki $\{\bar{k}_i\}_{i=0}^{\bar{n}_p}$, definiujemy liniową kombinację elementów dowolnego ciągu wielomianów tej bazy $\bar{P}(\delta) = \sum_{i=0}^{\bar{n}_p} \bar{k}_i \bar{P}_i(\delta)$. Następnie, dla $L_u(\delta) = \bar{G}(\delta)$ oraz $L_y(\delta) = \bar{F}(\delta)$ uzyskujemy:

$$B(\delta) \cdot \bar{F}(\delta) = C(\delta) \cdot \bar{K}(\delta) - A(\delta) \cdot \bar{E}(\delta)$$

$$\begin{aligned}\bar{G}(\delta) &= \begin{cases} \bar{E}(\delta) & \text{dla } \bar{n}_p < N_A \\ \bar{E}(\delta) - C(\delta) \cdot \bar{H}(\delta) & \text{dla } \bar{n}_p \geq N_A \end{cases} \\ \bar{L}(\delta) &= \begin{cases} \bar{K}(\delta) & \text{dla } \bar{n}_p < N_A \\ \bar{K}(\delta) - A(\delta) \cdot \bar{H}(\delta) & \text{dla } \bar{n}_p \geq N_A \end{cases}\end{aligned}$$

gdzie $\bar{K}(\delta) = \sum_{i=0}^{\bar{n}_p} \bar{k}_i \delta^i$ jest prototypowym wielomianem. W rozważanym przypadku zachodzi $A(\delta) \cdot \bar{G}(\delta) + B(\delta) \cdot \bar{F}(\delta) = C(\delta) \cdot \bar{L}(\delta)$, zaś wielomian $T_0(\delta) = A(\delta) + \bar{L}(\delta)$ występuje jako czynnik wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego: $T(\delta) = C(\delta) \cdot T_0(\delta)$.

Powyższe ustalenia stanowią podstawę reguł syntezy nominalnie stabilnego układu sterowania. W przypadku pierwszej bazy diofantycznej zakładamy, że

$$\begin{cases} n_p = d \\ K(\delta) = K_d(\delta) = h_d^{-1} \cdot \tilde{K}_d(\delta) \end{cases}$$

przy czym $\tilde{K}_d(\delta) = \sum_{i=0}^d \tilde{k}_i \delta^i$, $\tilde{k}_d = 1$, jako moniczny prototypowy wielomian o zredukowanym stopniu pełni rolę swobodnego parametru projektu. Na tej podstawie stwierdzamy, że $H(\delta) = 1$ oraz $T_0(\delta) = b_{N_B}^{-1} \cdot B(\delta) \cdot \tilde{K}_d(\delta)$. W szczególności dla trójki $(\delta \cdot A(\delta), B(\delta), C(\delta))$, w której $\deg A(\delta) = N_A$ oraz $C(\delta) = A(\delta)$, uzyskujemy licznikowe wielomiany algorytmu sterowania: $F(\delta) = k_0 A(\delta)$ oraz $G(\delta) = B(\delta) \cdot \sum_{i=1}^d k_i \delta^{i-1} \dots b_{N_B} k_d A(\delta)$. Kładąc $g = k_0$ oraz $k_d = 1/b_{N_B}$, wyznaczamy poszukiwane postacie filtrów wejściowego oraz wyjściowego, odpowiednio: $M_u(\delta) = B(\delta) \cdot E(\delta)/A(\delta) - 1$ oraz $M_y(\delta) = g$, przy czym $E(\delta) = \sum_{i=1}^d k_i \delta^{i-1}$. W przypadku drugiej bazy diofantycznej mamy

$$\begin{cases} \bar{n}_p = N_A \\ \bar{K}(\delta) = \bar{K}_{N_A}(\delta) = \bar{h}_{N_A}^{-1} \cdot \tilde{K}_{N_A}(\delta) \end{cases}$$

gdzie moniczny prototypowy wielomian $\tilde{K}_{N_A}(\delta) = \sum_{i=0}^{N_A} \tilde{k}_i \delta^i$, $\tilde{k}_{N_A} = 1$, jest swobodnym parametrem projektu. Zachodzi teraz: $\bar{H}(\delta) = 1$ oraz $T_0(\delta) = \tilde{K}_{N_A}(\delta)$. Trójce $(\delta \cdot A(\delta), B(\delta), C(\delta))$, gdzie $\deg A(\delta) = N_A$ oraz $C(\delta) = A(\delta)$, odpowiadają wielomiany: $\bar{F}(\delta) = \bar{k}_0 b_0^{-1} A(\delta)$ oraz $\bar{G}(\delta) = k_0(1 - b_0^{-1} B(\delta)) \cdot \delta^{-1} - k_{N_A+1} A(\delta) + \sum_{i=1}^{N_A+1} \bar{k}_i \delta^{i-1}$. W efekcie dla $g = \bar{k}_0/b_0$ oraz $\bar{k}_{N_A+1} = 1$ otrzymujemy proste postacie filtrów projektowanego układu: $M_u(\delta) = \bar{E}(\delta)/A(\delta) - 1$ oraz $M_y(\delta) = g$, przy czym $\bar{E}(\delta) = \bar{k}_0(1 - b_0^{-1} B(\delta)) \cdot \delta^{-1} + \sum_{i=1}^{N_A+1} \bar{k}_i \delta^{i-1}$.

Lemat 2.6 (o syntezy regulatorów rozmieszczających bieguny nominalnej funkcji przenoszenia układu zamkniętego; Suchomski [405]).

- (i) Rozważając zastosowanie pierwszej oraz drugiej bazy diofantycznej jako podstawy syntezy wewnętrznie stabilnego układu sterowania z regulatorem rozmieszczającym bieguny funkcji przenoszenia układu zamkniętego, dochodzimy do wniosku, że:
- pierwsza baza diofantyczna może być stosowana tylko w przypadku minimalnofazowych nominalnych modeli sterowanych obiektów, w tym celu przyjmuje się $n_p = d$ oraz $K(\delta) = K_d(\delta)$, gdzie $K_d(\delta)$ jest założonym stabilnym prototypowym wielomianem,
 - drugą bazę diofantyczną można stosować zarówno w przypadku minimalnofazowych, jak i nieminimalnofazowych nominalnych modeli sterowanych obiektów, wymaga to przyjęcia $\bar{n}_p = N_A$ oraz $\bar{K}(\delta) = \bar{K}_{N_A}(\delta)$, gdzie $\bar{K}_{N_A}(\delta)$ jest założonym stabilnym prototypowym wielomianem.
- (ii) Kładąc $g = k_0$ oraz odpowiednio $g = \bar{k}_0/b_0$, uzyskujemy zerowanie się nominalnego ustalonego błędu śledzenia pozycyjnego sygnału odniesienia. \square

Uwaga 2.5 (Suchomski [405]). Nominalna funkcja przenoszenia toru śledzenia wielkości odniesienia w zamkniętym układzie sterowania z regulatorem wyznaczonym na podstawie pierwszej diofantycznej bazy zależy wyłącznie od założonego prototypowego wielomianu $K_d(\delta)$, mamy bowiem: $G_{yr}^{\bar{}}(\zeta) = k_0/K_d(\zeta)$. Współczynniki takiego wielomianu dobiera się w oparciu o dowolne kryterium jakości sterowania. W tym celu można wykorzystać dyskretne postacie prototypowych funkcji przenoszenia modeli czasu ciągłego optymalizowanych ze względu na typowe wskaźniki (np. *ITAE*, Chen [57]; por. także Nowakowski i Suchomski [305], Shi i Gibbard [360]). Rodzinę prototypowych wielomianów optymalnych ze względu na kwadratowy wskaźnik właściwy dla zadań dyskretnego sterowania predykcyjnego wprowadzimy w rozdziale 3. (Suchomski i Kowalczyk [417]). \square

Uwaga 2.6 (Suchomski [405]). Projekt wynikający z drugiej diofantycznej bazy prowadzi do nominalnej funkcji przenoszenia $G_{yr}^{\bar{}}(\zeta)$ zależnej nie tylko od odpowiedniego prototypowego wielomianu $\bar{K}_{N_A}(\zeta)$, ale także od zer wielomianu $B(\zeta)$. Wpływ tych zer na kształt skokowej odpowiedzi układu zamkniętego będzie tym bardziej znaczący, im bliższej będą one położone okręgu ∂D_Δ . W szczególności, żądając przyspieszenia odpowiedzi skokowej, należy w omawianej sytuacji liczyć się ze wzrostem wartości jej przeregulowania (niedoregulowania). Prostą metodą, która do pewnego stopnia pozwala na ograniczenie wpływu tych niedogodności, jest znana z kla-

sycznej teorii regulacji filtracja (wygładzanie) wielkości odniesienia r (Doyle *et al.* [94], Kowalczyk i Suchomski [243], Morari i Zafiriou [297], Vidyasagar [452]). Adaptując tę metodę do naszych potrzeb, proponuje się zastosowanie wygładzającego filtru $B(0)/B(\zeta)$ w przypadku, w którym mamy do czynienia z minimalnofazowym nominalnym modelem sterowanego obiektu, lub filtru $\tilde{B}(0)/\tilde{B}(\zeta)$ dla modelu nieminimalnofazowego, gdzie $\tilde{B}(\zeta)$ jest stabilnym wielomianem uzyskanym z wielomianu $B(\zeta)$ przez zastąpienie niestabilnych zer tego wielomianu ich koniugacjami. \square

2.4 Odporna stabilność oraz jakość sterowania

Rozważmy zadanie zapewnienia układowi sterowania odpornej stabilności oraz odpornej jakości (zachowania się) w warunkach niepewności modelu sterowanego obiektu. Przyjęto, że w torze $P_{yu} : U \rightarrow Y$ występuje człon całkujący, dzięki któremu uzyskuje się polepszenie nominalnych właściwości tego układu w zakresie śledzenia wolnozmiennych sygnałów zadających oraz tłumienia wolnozmiennych zakłóceń na wyjściu obiektu. Takie typowe założenie w niczym oczywiście nie ogranicza zakresu stosowalności omawianej metody syntezy regulatorów. Mamy zatem nominalny model obiektu: $\bar{P}_{yu}(\zeta) = B(\zeta)/(\zeta \cdot A(\zeta))$, gdzie $\deg A(\zeta) = N_A \geq 1$ oraz $d = N_A - N_B + 1$.

Niepewność modelu obiektu oraz odporna stabilność układu zamkniętego

Przyjmujemy dwa standardowe modele niestrukturalizowalnej niepewności funkcji przenoszenia sterowanego obiektu. Zakładamy przeto, że 'rzeczywisty' tor sterowania $P_{yu} : U \rightarrow Y$ tego obiektu może być opisany za pomocą addytywnego modelu niepewności $P_{yu} = \bar{P}_{yu}(\zeta) + W_a(\zeta) \cdot W_\delta(\zeta)$ lub za pomocą multiplikatywnego modelu niepewności $P_{yu} = \bar{P}_{yu}(\zeta) \cdot (1 + W_m(\zeta) \cdot W_\delta(\zeta))$, gdzie stabilne funkcje $W_a(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ oraz $W_m(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ pełnią rolę funkcji ważących, odwzorowujących dostępną wiedzę o niepewności nominalnego modelu $\bar{P}_{yu}(\zeta)$ (Suchomski [405], Suchomski i Kowalczyk [414]; por. też Green i Limebeer [153], Grimble [154], Landau *et al.* [257], Zhou *et al.* [487]), zaś $W_\delta(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ są odpowiednimi stabilnymi funkcjami o jednostkowo ograniczonej normie $\|W_\delta(\zeta)\|_\infty < 1$. Wymaganie stabilności funkcji $W_a(\zeta)$ oraz $W_m(\zeta)$ można osłabić, żądając aby funkcje przenoszenia obiektu, nominalna i zaburzona, miały taką samą liczbę niestabilnych biegunów (por. Francis [116], Green i Limebeer [153], Maciejowski [280], Zhou *et al.* [487], Weinmann [463]).

Zdefiniujmy następujące nominalne funkcje wrażliwości układu sterowania o schemacie danym na rys. 2.1, odpowiednio wejściową $G_{uw}^- : W \rightarrow U$, wyjściową $G_{yw}^- : W \rightarrow Y$ oraz szumową $G_{yn}^- : N \rightarrow Y$ funkcję wrażliwości:

$$\begin{aligned} G_{uw}^- (\zeta) &= -\frac{\zeta \cdot A(\zeta) \cdot M_y(\zeta)}{T_0(\zeta)} \\ G_{yw}^- (\zeta) &= \frac{\zeta \cdot A(\zeta) \cdot (1 + M_u(\zeta))}{T_0(\zeta)} \\ G_{yn}^- (\zeta) &= -\frac{B(\zeta) \cdot M_y(\zeta)}{T_0(\zeta)}. \end{aligned}$$

Załóżmy, że układ ten jest nominalnie stabilny: $G_{uw}^-(\zeta)$, $G_{yw}^-(\zeta)$, $G_{yn}^-(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$. Niech $G_a^s(\zeta) = G_{uw}^-(\zeta) \cdot W_a(\zeta)$ oraz $G_m^s(\zeta) = G_{yn}^-(\zeta) \cdot W_m(\zeta)$. Konieczny i wystarczający warunek wewnętrznej stabilności rozważanego układu dla wszystkich funkcji $W_\delta(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|W_\delta(\zeta)\|_\infty < 1$, a zatem konieczny i wystarczający warunek odpornej stabilności tego układu, ma postać żądania

$$\|G_x^s(\zeta)\|_\infty \leq 1, \quad x \in \{a, m\}.$$

Z powyższego nieco rygorystycznego (por. Desoer i Vidyasagar [90]) sformułowania wynika, że możliwość odpowiedniego kształtowania nominalnej wejściowej funkcji wrażliwości oraz nominalnej szumowej funkcji wrażliwości układu sterowania odgrywa zasadniczą rolę w projektowaniu układu odpornego (Freudenberg *et al.* [119], Kwakernaak [254, 255], O'Young i Francis [311], Skogestad i Postlethwaite [363], Zhou i Doyle [486]). Ponieważ $G_{yw}^-(\zeta) - G_{yn}^-(\zeta) = 1$, zatem takie kształtowanie musi być postępowaniem, w którym w sposób kompromisowy uwzględnia się wymagania w zakresie zdolności układu zamkniętego do tłumienia wpływu obiektowych zakłóceń oraz wymagania dotyczące odporności. Wyczerpującą dyskusję właściwości wymienionych funkcji wrażliwości dyskretnych układów sterowania można znaleźć w (Goodwin i Salgado [143], Sung i Hara [424]).

Zasady formowania funkcji wrażliwości standardowych układów odpornej regulacji procesów opisanych modelami w dziedzinie operatora δ przedstawiono w (Suchomski [395, 398, 401]), omawiając regulatory przyspieszające oraz opóźniające fazę, a także regulatory *PID*. Pokazano tam, że stosując proste metody nastawiania dyskretnego regulatora w oparciu o reguły ustalone dla 'asymptotycznie równoważnego' regulatora czasu ciągłego, łatwo można zaniedbać niektóre istotne problemy specyficzne dla regulacji w czasie dyskretnym. Mowa tu przede wszystkim o niebezpieczeństwie pojawienia się

'dzwoniących' modów w sygnale sterującym uzyskiwanym w układzie z korektorem forsującym fazę (por. Isermann [195, 196]), a także o niepożądaną potencjalną nieminimalnofazowość funkcji przenoszenia regulatora *PID* o nieujemnych nastawach (uwaga ta dotyczy także bardziej złożonych metod, polegających na optymalnym – w określonym sensie – odwzorowaniu algorytmu ciągłego w jego dyskretny odpowiednik; por. de Oliveira i Fleming [86], Marouf i Al-Assadi [282], Nowakowski i Suchomski [306, 307], Rattan [333, 334], Tabak [427]). Proponowane rozwiązania mają postać dogodnie sparametryzowanych zbiorów nastaw opracowanych ze względu na typowe specyfikacje w zakresie: stabilności układu zamkniętego, szybkości sterowania, statycznej dokładności, ograniczeń nakładanych na postać sygnału sterującego oraz odporności jakości regulacji na wpływ niepewności nominalnego modelu obiektu. Stosowna parametryzacja zbioru dopuszczalnych regulatorów ułatwia poszukiwanie kompromisowych rozwiązań (w sensie wielokryterialnej optymalności *Pareto*; por. Górecki [148], Liu i Patton [277], Stadler [376]) w przypadku zadań, w których występują wymagania pozostające w konflikcie. Takie postępowanie umożliwia, do pewnego stopnia, zwiększenie 'zakresu' odporności układu bez potrzeby rozbudowy podstawowej struktury przyjętego regulatora.

Powracając do głównego wątku tego podrozdziału, zauważmy, iż w najprostszej próbie zapewnienia rozważanemu układowi sterowania odpornej stabilności, polegającej na doborze odpowiedniego obserwatorowego wielomianu $C(\zeta)$, wykorzystuje się fakt, że nominalna funkcja przenoszenia $G_{yr}^-(\zeta)$ tego układu nie zależy od wielomianu $C(\zeta)$. Oznacza to, że na nominalne funkcje wrażliwości $G_{uw}^-(\zeta)$ oraz $G_{yn}^-(\zeta)$ układu sterowania (a zatem także na odpornościowe cechy tego układu) można wpływać, nie zmieniając założonych cech toru śledzenia wielkości odniesienia (Suchomski [404, 405]). Pomysł spożytkowania obserwatorowego wielomianu $C(q^{-1})$ jako dodatkowego stopnia swobody projektu nie jest oczywiście nowy: na tę możliwość wskazywało już wielu autorów, zwłaszcza tych, którzy zajmowali się syntezą układów sterowania predykcyjnego (zob. *rozdział 3.*). Pewnym 'usprawiedliwieniem' traktowania wielomianu $C(q^{-1})$ jako tylko swobodnego parametru algorytmów predykcyjnego sterowania, w których obiektowe zakłócenie $w(t)$ sprowadzone do wyjścia obiektu (rys. 2.1) modelowane jest formułą $A(q^{-1})w(t) = C(q^{-1})v(t)$, gdzie v jest procesem zakłócającym, są trudności w adekwatnym modelowaniu (identyfikacji) tego wielomianu (Ansary i Wertz [6], Ansary *et al.* [7], Clarke i Mohtadi [65], Yoon i Clarke [479]).

Ponieważ związek między obserwatorowym wielomianem $C(\zeta)$ a wielomianami licznikowymi filtrów $M_u(\zeta)$ oraz $M_y(\zeta)$ nie jest w ogólności za-

leżnością jawną, nie istnieje żadna 'bezpośrednia' i systematyczna procedura wyznaczania tego wielomianu (zwłaszcza w przypadku modeli o wysokim rzędzie). Ponadto, możliwości omawianej prostej metody kształtowania nominalnych funkcji wrażliwości $G_{uv}^{\bar{=}}(\zeta)$ oraz $G_{yn}^{\bar{=}}(\zeta)$ mogą być niewystarczające ze względu na wymagania, które wynikają z warunków odpornej stabilności (por. Ansay i Wertz [6], Ansay *et al.* [7], Kouvaritakis *et al.* [233], Suchomski [405], Yoon i Clarke [479]).

Alternatywne i metodologicznie lepiej ugruntowane rozwiązanie zadania odpornej stabilizacji (a także odpornego zachowania się) układu sterowania uzyskuje się przez odpowiednią parametryzację stosownie rozbudowanej podstawowej struktury tego układu, co odbywa się zgodnie z koncepcją znaną jako metoda Youli Kučery (Fuhrmann [121], Green i Limebeer [153], Kowalczyk i Suchomski [244], Kučera [248], Morari i Zafriou [297], Youla *et al.* [480, 481], Zames [483]).

Pewną wadą standardowej metody Youli-Kučery (zwanej także metodą Q -parametryzacji zbioru wszystkich stabilizujących regulatorów) jest to, że rozwiązania otrzymywane w ten sposób z reguły charakteryzują się dużą złożonością (wysokim rzędem członów korekcyjnych), co utrudnia ich implementację (Anderson [3], Morari i Zafriou [297], Suchomski [405]). Niżej pokażemy w jaki sposób uproszczoną metodę Q -parametryzacji zastosować w celu zwiększenia odporności nominalnie stabilnego układu sterowania kosztem niewielkiego skomplikowania jego podstawowej struktury (Suchomski [404, 405]).

Algorytm proponowany w dalszej części tego podrozdziału, polegający na strojeniu prostych filtrów korekcyjnych (Q -parametrów) odpowiedzialnych za odporność układu zamkniętego, nie jest jednak algorytmem optymalnym. Prezentację optymalnego rozwiązania zadania odpornej stabilizacji oraz odpornego zachowania się układów z regulatorami rozmieszczającymi bieguny odłożymy do *rozdziału 6.*, dotyczącego metod przestrzeni \mathcal{H}_{∞} . Znane są również podejścia, w których autorzy rozważają użycie zmiennych w czasie Q -parametrów w zastosowaniu do syntezy sterowania predykcyjnego z ograniczeniami nałożonymi na trajektorię stanu sterowanego obiektu oraz na sygnały sterujące (Fikar i Engell [114], Fikar *et al.* [115], Van den Boom i De Vries [438, 439]). W (Suchomski [411]) pokazano, w jaki sposób dobierać zmienny w czasie Q -parametr w samonastrajającym się (adaptacyjnym) układzie sterowania, w którym metoda rozmieszczania biegunów jest wykorzystywana jako metoda stabilizacji tego układu.

2.5 Q -parametryzacja układu sterowania

Podstawowy algorytm rozmieszczania biegunów opiera się na parze odpowiednio ukształtowanych licznikowych wielomianów filtrów $(M_u(\zeta), M_y(\zeta))$. Modyfikacja tego algorytmu wynika ze spostrzeżenia, że funkcja przenoszenia toru śledzenia wielkości odniesienia $(G_{yr} : R \rightarrow Y)$ nie zmieni się po zastąpieniu tej pary przez $(M_u(\zeta) + Q_u(\zeta), M_y(\zeta) + Q_y(\zeta))$, gdzie $Q_u(\zeta) = -B(\zeta) \cdot Q(\zeta)$ oraz $Q_y(\zeta) = \zeta \cdot A(\zeta) \cdot Q(\zeta)$, przy czym $Q(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ oznacza taką stabilną funkcję, nazywaną dalej Q -parametrem, której odpowiada właściwa funkcja $M_y(\zeta) + Q_y(\zeta)$ (Suchomski [404, 405]). Tak postępując, otrzymujemy zmodyfikowane funkcje wrażliwości:

$$\begin{aligned} G_{uw}(\zeta) &= -\frac{\zeta \cdot A(\zeta) \cdot (M_y(\zeta) + Q_y(\zeta))}{T_0(\zeta)} \\ G_{yw}(\zeta) &= \frac{\zeta \cdot A(\zeta) \cdot (1 + M_u(\zeta) + Q_u(\zeta))}{T_0(\zeta)} \\ G_{yn}(\zeta) &= -\frac{B(\zeta) \cdot (M_y(\zeta) + Q_y(\zeta))}{T_0(\zeta)}. \end{aligned}$$

Kładąc

$$Q(\zeta) = M_y(\zeta) \cdot Q_0(\zeta)$$

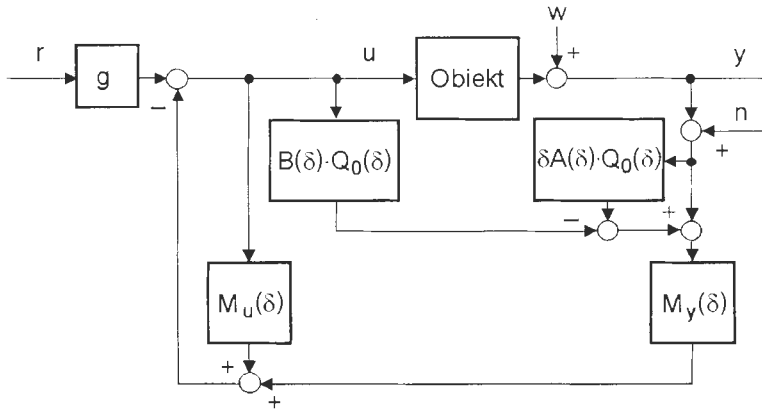
gdzie funkcja $Q_0(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ o względnym rzędzie większym niż N_A jest efektywnym parametrem projektu, otrzymujemy dogodną postać Q -parametru (z założenia $M_y(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$). Analizując strukturę odpowiedniego regulatora (rys. 2.3), zauważamy obecność dwóch pętli sprzężenia zwrotnego: zadaniem zewnętrznej pętli (niezmienionej w stosunku do pierwotnego algorytmu z rys. 2.1) jest stabilizacja nominalnego układu sterowania, z kolei wewnętrzna korekcyjna pętla zapewnia układowi zamkniętemu odporną stabilność.

2.5.1 Odporna stabilność

Zakłada się, że podstawowy (nieskorygowany) układ zamknięty spełniający założenia metody rozmieszczania biegunów jest nominalnie wewnętrznie stabilny.

Stabilny obiekt: Q -parametryzacja

Strukturę regulatora można znacząco uprościć w przypadku, w którym mianownik $A(\zeta)$ nominalnej funkcji przenoszenia sterowanego obiektu jest wie-



Rys. 2.3. Strukturalny schemat odpornego układu sterowania.

lomianem stabilnym. W tym celu wystarczy przyjąć (Suchomski [405])

$$Q_0(\zeta) = \frac{Q_0^0(\zeta)}{A(\zeta)} \quad (2.4)$$

gdzie stabilna funkcja $Q_0^0(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ o względnym rzędzie większym od jedności przejmuje rolę parametru korektora. Tak postępując, uzyskujemy Q -parametr $Q(\zeta) = M_y(\zeta) \cdot Q_0^0(\zeta)/A(\zeta)$, któremu przyporządkowane są funkcje wrażliwości $G_{uw}(\zeta) = G_{uw}^-(\zeta) \cdot (1 + \zeta \cdot Q_0^0(\zeta))$ oraz $G_{yn}(\zeta) = G_{yn}^-(\zeta) \cdot (1 + \zeta \cdot Q_0^0(\zeta))$, przy czym czynnik $1 + \zeta \cdot Q_0^0(\zeta)$ afinicznie zależny od $Q_0^0(\zeta)$ może być dowolnie kształtowany. Najprostszym rozwiązaniem jest filtr pierwszego rzędu

$$Q_0^0(\zeta) = \frac{\chi}{\zeta + \gamma} \quad (2.5)$$

o dwóch swobodnych rzeczywistych nastawach γ oraz χ . Na tej podstawie otrzymujemy dogodnie reprezentacje badanych funkcji wrażliwości: $G_{uw}(\zeta) = G_{uw}^-(\zeta) \cdot Z_\gamma^\chi(\zeta)$ oraz $G_{yn}(\zeta) = G_{yn}^-(\zeta) \cdot Z_\gamma^\chi(\zeta)$, w których występuje czynnik

$$Z_\gamma^\chi(\zeta) = \frac{\eta(\zeta + \beta)}{\zeta + \gamma} \quad (2.6)$$

o pomocniczych parametrach $\eta = \chi + 1$ oraz $\beta = \gamma/(\chi + 1)$. Taka postać funkcji wrażliwości czyni względnie prostym zadanie doboru wartości nastaw γ oraz χ . W tym celu stosujemy standardowe widmowe metody syntezy szeregowych korektorów dynamicznych (Suchomski [405]). Przyjmując $\gamma \in (0, 2/\Delta)$, zapewniamy stabilność parametru $Q_0^0(\zeta)$. Aby uniknąć obecności

'dzwoniącego' bieguna rozważanych funkcji wrażliwości, rozwiązania poszukujemy w przedziale $\gamma \in (0, 1/\Delta) \subset (0, 2/\Delta)$ (por. Suchomski [398]).

Założmy, że nieskorygowany układ zamknięty (rys. 2.1) nie spełnia warunku odpornej stabilności, a zatem $\|G_x^s(\zeta)\|_\infty = M_x^s > 1$ dla $x \in \{a, m\}$. Niech ω_x^s będzie odpowiednią pulsacją, dla której $|G_x^s(j\omega_x^s)| = M_x^s$. Konieczny i wystarczający warunek odpornej stabilności skorygowanego układu ma postać

$$\|G_x^s(\zeta) \cdot Z_\gamma^s(\zeta)\|_\infty \leq 1, \quad x \in \{a, m\}. \quad (2.7)$$

Na tej podstawie, korzystając z charakterystyk Bodego funkcji $G_x^s(\zeta)$ oraz $Z_\gamma^s(\zeta)$, wyprowadzamy reguły strojenia członu $Q_0^0(\zeta)$ (Suchomski [405]):

$$\gamma = \frac{2\rho_x^s \omega_x^s}{(\sigma_x^s M_x^s - 1)(2 - \rho_x^s \omega_x^s \Delta) + 2}, \quad \chi = \frac{(\sigma_x^s M_x^s - 1)(\gamma \Delta - 2)}{2\sigma_x^s M_x^s}$$

gdzie pomocnicze parametry $\sigma_x^s > 1$ oraz $0 < \rho_x^s < 1$, mające sens współczynników 'bezpieczeństwa' projektu, stanowią stopnie swobody tych reguł (zakłada się tu, że $\beta = \rho_x^s \omega_x^s$). Dla dopuszczalnej wartości nastawy γ zawsze zachodzi $\chi < 0$. Łatwo także sprawdzić, że dla dostatecznie małych wartości okresu próbkowania Δ obowiązują zależności:

$$\gamma \approx \frac{\rho_x^s \omega_x^s}{\sigma_x^s M_x^s}, \quad \chi = \frac{1}{\sigma_x^s M_x^s} - 1.$$

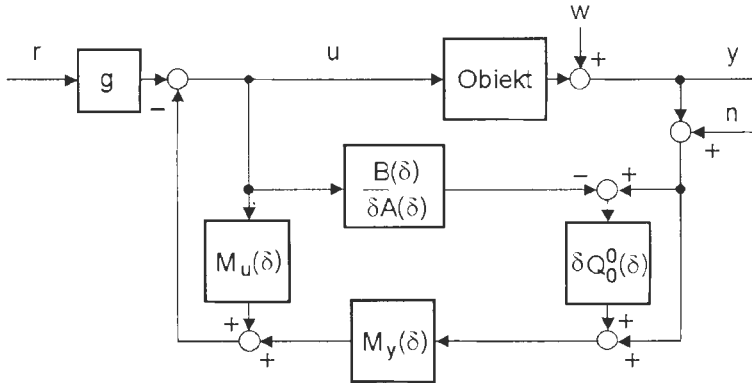
Ponieważ $\gamma < \omega_x^s$, zatem $\gamma \in (0, 1/\Delta)$. Algorytm może być implementowany w oparciu o strukturę układu z wewnętrznym modelem sterowanego obiektu (*Internal Model Control, IMC*; Braatz [42], Gawthrop *et al.* [129], Morari i Zafiriou [297]). W strukturze tej (rys. 2.4) zwraca uwagę obecność dwóch dodatkowych elementów: toru modelowania obiektu oraz toru sprzężenia zwrotnego $\zeta Q_0^0(\zeta)$, których zadaniem jest stabilizacja układu zamkniętego w warunkach zakładanej niepewności nominalnego modelu tego obiektu.

Stabilny obiekt: Q-parametryzacja połączona z kształtowaniem wielomianu obserwatorowego

Kładąc $C(\zeta) = A(\zeta)$, $\deg C(\zeta) = N_A$, uzyskujemy algorytm odpornego sterowania z uproszczonym filtrem $M_y(\zeta) = g$. Rozwiązanie odwołujące się do pierwszej diofantycznej bazy dla $Q_0^0(\zeta) = \chi g^{-1}/(\zeta + \gamma)$ ma postać:

$$Q_u(\zeta) = \frac{-\chi B(\zeta)}{(\zeta + \gamma) \cdot A(\zeta)}, \quad Q_y(\zeta) = \frac{\chi \zeta}{\zeta + \gamma}.$$

Warunek odpornej stabilności (2.7) obowiązuje teraz dla funkcji $Z_\gamma^s(\zeta)$ z parametrem $\eta = \gamma/\beta = \chi/g + 1$. Oznacza to, że podany wcześniej sposób doboru wartości nastaw γ oraz χ zachowuje swoją aktualność.



Rys. 2.4. Strukturalny schemat odpornego układu sterowania opartego na koncepcji sterowania z wewnętrznym modelem (IMC).

Niestabilny obiekt: Q -parametryzacja

W przypadku niestabilnego nominalnego wielomianu $A(\zeta)$ formuła (2.4) nie może być stosowana. Pożądane uproszczenie algorytmu uzyskuje się, rozwiązując czynnikową postać tego wielomianu $A(\zeta)$: $A(\zeta) = A^-(\zeta) \cdot A^+(\zeta)$, w której $A^-(\zeta)$ jest stabilnym monicznym wielomianem stopnia $\deg A^-(\zeta) = N_A^-$, zaś $A^+(\zeta)$ oznacza niestabilny moniczny czynnik stopnia $\deg A^+(\zeta) = N_A^+$. Przyjmując $Q_0(\zeta) = Q_0^-(\zeta)/A^-(\zeta)$, gdzie funkcja $Q_0^-(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ o względnym rzędzie większym niż N_A^+ jest stopniem swobody, otrzymujemy $Q(\zeta) = M_y(\zeta) \cdot Q_0^-(\zeta)/A^-(\zeta)$, czemu odpowiadają funkcje wrażliwości: $G_{uw}(\zeta) = G_{uw}^-(\zeta) \cdot (1 + \zeta \cdot A^+(\zeta) \cdot Q_0^-(\zeta))$ oraz $G_{yn}(\zeta) = G_{yn}^-(\zeta) \cdot (1 + \zeta \cdot A^+(\zeta) \cdot Q_0^-(\zeta))$. Jak widzimy, co nie jest zaskoczeniem, w przypadku niestabilnego obiektu funkcji tych nie można dowolnie kształtować (por. Doyle *et al.* [94], Morari i Zafiriou [297], Zames i Francis [484]). Zakładając, że $Q_0^-(\zeta) = \chi/(\zeta + \gamma)^{N_A^++1}$, uzyskujemy $G_{uw}(\zeta) = G_{uw}^-(\zeta) \cdot Z_\gamma^X(\zeta)$ oraz $G_{yn}(\zeta) = G_{yn}^-(\zeta) \cdot Z_\gamma^X(\zeta)$, gdzie

$$Z_\gamma^X(\zeta) = \frac{(\zeta + \gamma)^{N_A^++1} + \chi\zeta \cdot A^+(\zeta)}{(\zeta + \gamma)^{N_A^++1}}.$$

Asymptotyczne właściwości czynnika $Z_\gamma^X(\zeta)$ są zgodne z odpowiednimi cechami wcześniej rozważanej funkcji (2.6), zachodzi bowiem: $Z_\gamma^X(\zeta)|_{\zeta \rightarrow 0} = 1$ oraz $Z_\gamma^X(\zeta)|_{\zeta \rightarrow \infty} = 1 + \chi$. Stosując do pomocniczego modelu $\Theta(\zeta) = \zeta \cdot A^+(\zeta)/(\zeta + \gamma)^{N_A^++1}$ metodę linii pierwiastkowych z ujemnym parametrem χ ,

można sformułować wniosek (Suchomski [405]), że $\forall \chi \in (-1, 0)$ wielomian $(\zeta + \gamma)^{N_A^+ + 1} + \chi \zeta \cdot A^+(\zeta)$ zawsze ma ujemne zero o wartości mniejszej niż $-\gamma$. Gdy N_A^+ jest liczbą nieparzystą, wielomian $(\zeta + \gamma)^{N_A^+ + 1} + \chi \zeta \cdot A^+(\zeta)$ przy $\chi \in (-\infty, 0)$ ma ujemne zero większe od $-\gamma$, co oznacza, że $\|Z_\gamma^x(\zeta)\|_\infty > 1$. Na tej podstawie dochodzimy do przekonania, że w omawianym przypadku warunek odpornej stabilności (2.7) może być spełniony wyłącznie dla funkcji $W_x(\zeta)$ o górnopasmowym charakterze. Powyższe rozumowanie prowadzi do wzoru:

$$\gamma = \eta_x^s \omega_x, \quad \chi = \frac{(\sigma_x^s M_x^s - 1)(\gamma \Delta - 2)^{N_A^+ + 1}}{2T_0^{N_A^+} \sigma_x^s M_x^s A^+(-2/\Delta)}$$

w którym σ_x^s oraz $0 < \eta_x^s < 1$ (Suchomski [405]).

Niestabilny obiekt: Q -parametryzacja połączona z kształtowaniem wielomianu obserwatorowego

Przyjmując $C(\zeta) = A^-(\zeta) \cdot C^-(\zeta)$, gdzie $C^-(\zeta)$ oznacza dowolny stabilny wielomian stopnia $\deg C^-(\zeta) = N_A^+$, zapewnia się uproszczenie algorytmu sterowania. Z równań $D1$ oraz $\bar{D}1$ wynika, że $F(\zeta) = F_-(\zeta) \cdot A^-(\zeta)$ oraz $\bar{F}(\zeta) = \bar{F}_-(\zeta) \cdot A^-(\zeta)$, gdzie $F_-(\zeta)$ oraz $\bar{F}_-(\zeta)$ są odpowiednimi wielomianami o obniżonym stopniu N_A^+ . Na podstawie powyższych ustaleń otrzymujemy: $M_y(\zeta) = F_-(\zeta)/C^-(\zeta)$ oraz $\bar{M}_y(\zeta) = \bar{F}_-(\zeta)/C^-(\zeta)$.

2.5.2 Odporna jakość

Układ sterowania uzyskany w oparciu o opisaną metodologię rozmieszczania biegunów z wykorzystaniem rozwiązań równań diofantycznych (D) lub (\bar{D}) charakteryzuje się właściwą sobie nominalną stabilnością oraz nominalnym zachowaniem się (nominalną jakością). Warunki odpornej stabilności tego układu wiążą się z pewnymi nierównościami ograniczającymi na nominalne funkcje wrażliwości (wejściową lub szumową). Wynaganie odpornego zachowania się rozważanego układu można wyrazić w postaci nierównościowego ograniczenia nałożonego na jego nominalną wyjściową funkcję wrażliwości (por. Suchomski [395, 398]). Poszukując dogodnego sformułowania odpowiedniego warunku, sięgamy do definicji zapasu modułu $M_m = 1/\|G_{yw}^-(\zeta)\|_\infty$. Niech $W_p = M_m/\sigma_p$ oznacza najprostszą (niezależną od pulsacji) ważącą funkcję, w której swobodny współczynnik $\sigma_p > 1$ jest 'miarą' dopuszczalnej degradacji nominalnej jakości sterowania, nieuchronnej w obliczu niepewności modelu sterowanego obiektu. Odpowiedni konieczny i wystarczający warunek nominalnej jakości (zachowania się) układu sterowania ma zatem

postać nierówności

$$\|G_{yw}(\zeta) \cdot W_p\|_\infty \leq 1$$

gdzie $0 < W_p < 1$. Na tej podstawie otrzymujemy wystarczające warunki odpornej jakości (zachowania się) tego układu sterowania (Suchomski [405]):

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} (|G_{uw}(j\omega) \cdot W_a(j\omega)| + |G_{yw}(j\omega) \cdot W_p|) \leq 1 \quad (2.8)$$

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} (|G_{yn}(j\omega) \cdot W_m(j\omega)| + |G_{yw}(j\omega) \cdot W_p|) \leq 1. \quad (2.9)$$

Warunkom tym można nadać bardziej rygorystyczną postać, żądając aby

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{|Z_\gamma^k(j\omega)| \cdot (|G_x^s(j\omega)| + |G_{yn}^-(j\omega)| \cdot W_p)}{1 - W_p} \leq 1, \quad x \in \{a, m\}.$$

Podkreślenia wymaga fakt, że takie sformułowanie ma zaiste 'zachowawczy' charakter, gdyż efektywnie dopuszcza się tu tylko $W_p \leq 0.5$, co w ogólności nie jest wymagane w przypadku warunków (2.8) oraz (2.9). Zdefiniujmy następujący wskaźnik odporności projektowanego układu sterowania

$$M_x^p = \max_{\omega} \frac{|G_x^s(j\omega)| + |G_{yn}^-(j\omega)| \cdot W_p}{1 - W_p}. \quad (2.10)$$

Niech $M_x^p > 1$, co świadczy o tym, że rozważany układ wymaga korekcji:

$$\gamma = \frac{2\rho_x^p \omega_x^p}{(\sigma_x^p M_x^p - 1)(2 - \rho_x^p \omega_x^p \Delta) + 2}, \quad \chi = \frac{(\sigma_x^p M_x^p - 1)(\gamma \Delta - 2)}{2\sigma_x^p M_x^p}$$

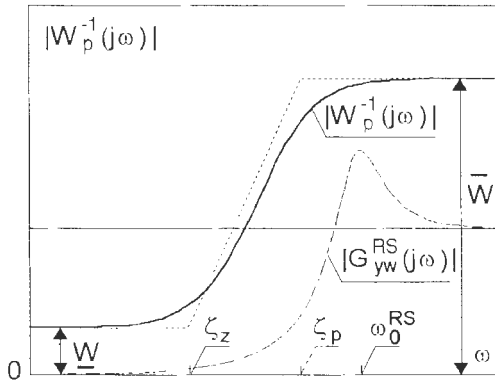
gdzie ω_x^p jest pulsacją wynikającą ze wzoru (2.10), zaś $\sigma_x^p > 1$ oraz $0 < \rho_x^p < 1$ oznaczają pomocnicze parametry projektu (Suchomski [405]).

Uwaga 2.7 (Suchomski [405]). Podane kryterium nominalnej jakości układu sterowania zastąpić można nierównością

$$\|G_{yw}(\zeta) \cdot W_p(\zeta)\|_\infty \leq 1$$

w której $W_p(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ jest odpowiednio zdefiniowaną stabilną funkcją ważącą. Funkcję tę dogodnie jest kształtować w oparciu o wyjściową funkcję wrażliwości $G_{yw}^{RS}(\zeta)$ układu, któremu wstępnie zapewniono odporną stabilność. Traktując zatem funkcję $G_{yw}^{RS}(\zeta)$ jako pewnego rodzaju wzorzec istotnych cech projektowanego układu sterowania, poszukuje się takiej możliwie prostej funkcji $W_p(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$, która odwzorowywałaby akceptowalną

degradację tych właściwości, spowodowaną niedopasowaniem modelu sterowanego obiektu (Suchomski [395]). Na rys. 2.5 zilustrowano przykładowe rozwiązanie, pokazując w jaki sposób wyznaczać moduł odwrotności funkcji wazącej $W_p^{-1}(\zeta) = k_0(\zeta_z + \zeta)/(\zeta_p + \zeta)$, gdzie: $k_0 = \bar{W} - \alpha^{RP}\omega_0^{RS} \Delta(\bar{W} - \underline{W})/2$, $\zeta_z = \alpha^{RP}\omega_0^{RS}\underline{W}/k_0$, $\zeta_p = \alpha^{RP}\omega_0^{RS}$ oraz $\bar{W} = \beta^{RP}\|G_{yw}^{RS}(\zeta)\|_\infty$, przy czym dla uproszczenia założono, że dla pulsacji ω_0^{RS} moduł $|G_{yw}^{RS}(\zeta)|$ osiąga swoje maksimum. Parametry \underline{W} , α^{RP} oraz β^{RP} dobierane są przez projektanta, jako 'typowe' wartości zaleca się: $\underline{W} = 0.1$, $\alpha^{RP} = 0.1$ oraz $2 \leq \beta^{RP} \leq 5$.



Rys. 2.5. Dopuszczalny obszar zdefiniowany dla wyjściowej funkcji wrażliwości.

Wyrażenie $\mu(\omega) = |G_{ym}(j\omega) \cdot W_m(j\omega)| + |G_{yw}(j\omega) \cdot W_p(j\omega)|$ interpretować można jako strukturalną osobiwą wartość (*Structural Singular Value*, *SSV*, μ -value) projektowanego układu (Doyle [93], Doyle *et al.* [95], Packard i Doyle [313], Zhou *et al.* [487]). Uzyskane rozwiązanie zadania odpornej jakości sterowania różni się od typowego rozwiązania optymalizacji ze względu na normę \mathcal{H}_∞ (\mathcal{H}_∞ mixed sensitivity; Doyle *et al.* [94], Helton i Merino [170], Skogestad i Postlethwaite [363], Suchomski [405]). \square

Uwaga 2.8 (Suchomski). W przypadku wielu metod syntezy algorytmów sterowania obecność nieminimalnofazowych zer nominalnego modelu sterowanego obiektu jest czynnikiem utrudniającym projekt odpowiedniego algorytmu (Åström [11], Freudenberg i Looze [117], Goodwin i Seron [144], Looze i Freudenberg [278], Middleton [291, 292], Seron *et al.* [357]). Dotyczy to, przykładowo: metody minimalnowariancyjnego sterowania, metody dopasowania modelu (*model matching*), algorytmu sterowania minimalnoczasowego (*DB*) oraz sterowania z wykorzystaniem modelu odniesienia (*Model Reference Adaptive Control*, *MRAC*; Åström *et al.* [12], Åström

i Wittenmark [13, 14], Doyle *et al.* [94], Goodwin *et al.* [141], Passino i Antsaklis [318]). Takie zera mogą ponadto stanowić ograniczenie na drodze do uzyskania dostatecznie odpornych układów sterowania (Landau *et al.* [257], Weller i Middleton [465]). W (Åström *et al.* [12]) wykazano, że dyskretne (q) modele ciągłych obiektów, uzyskane przy użyciu mechanizmu podtrzymywania zerowego rzędu, mają dodatkowo (w stosunku do liczby skończonych zer modelu dyskretyzowanego ciągłego obiektu) skończone zera (*sampled zeros*), których położenie na płaszczyźnie zespolonej w znaczącym stopniu zależy od przyjętego okresu próbkowania (zob. także Błachuta [35], Gessing [131], Hagiwara [160]). Proste przykłady ilustrujące ten fenomen dla obiektów drugiego rzędu rozważano w (El-Khoury i Crisalle [102], Söderström [368]). Inne właściwości zer dyskretnych (q) modeli ciągłych obiektów, w tym obiektów z transportowym opóźnieniem oraz modeli otrzymywanych przez zastosowanie mechanizmów podtrzymywania wyższego rzędu, badano w (Feliu i Cerrada [111], Fu i Dumond [120], Hagiwara *et al.* [161], Hara *et al.* [165, 166], Ishitobi [197]-[200], Kabamba [204]).

Dyskretne (q) modele o skończonej impulsowej odpowiedzi (*FIR*), przybliżające zachowanie się danego obiektu czasu ciągłego, rozważano w (Bai i Ding [15]), wykazując, że w przypadku obiektów o względnym rzędzie większym niż dwa, przy dostatecznie szybkim próbkowaniu, w modelach takich zawsze występują nieminimalnofazowe zera (zob. także Bai i Wu [16]). Analizie właściwości zer dyskretnych modeli związanych z operatorem δ poświęcone są prace (Hersh [172], Tesfaye i Tomizuka [431], Weller [464]). W (Tesfaye i Tomizuka [431]) pokazano, że dla ciągłego obiektu *SISO* o względnym rzędzie większym niż dwa w zbiorze zer jego dyskretnego (δ) odpowiednika można wyróżnić 'regularne' zera zbiegające się przy $\Delta \rightarrow 0$ do stosownych zer ciągłego pierwowzoru, a także 'singularne' zera wprowadzane przez mechanizm próbkowania i podtrzymywania, przy czym takie osobliwe zera dążą wtedy do zer w nieskończoności.

Jak uniknąć utrudnień wprowadzanych przez obecność nieminimalnofazowych singularnych zer nominalnego dyskretnego modelu sterowanego obiektu? Przykładowo, w rozważanym przypadku metody rozmieszczania biegunów takie zera wymuszają stosowanie drugiej diofantycznej bazy (zob. także Goodwin *et al.* [141]). Rozważmy przeto obiekt czasu ciągłego modelowany funkcją $\bar{P}_{pyu}(s) = B_\rho(s)/A_\rho(s)$, gdzie $\deg A_\rho(s) = N_A$, $\deg B_\rho(s) = N_B$, a ponadto $d = N_A - N_B \geq 2$. Odpowiedni dyskretny (δ) model ma postać $B(\zeta)/A(\zeta)$, przy czym zakłada się, że $A(\zeta)$ jest wielomianem monicznym. Niech $B(\zeta) = b_0 \hat{B}(\zeta)$, gdzie $\hat{B}(\zeta)$ jest odpowiednim wielomianem antymonicznym stopnia $\deg \hat{B}(\zeta) = N_A - 1$. Mamy zatem $\hat{B}(\zeta)|_{\zeta=0} = 1$.

Wielomian $\hat{B}(\zeta)$ przedstawiamy w postaci sumy $\hat{B}(\zeta) = \underline{B}(\zeta) + \zeta^{N_B+1} \cdot \overline{B}(\zeta)$, w której $\deg \underline{B}(\zeta) = N_B$, $\deg \overline{B}(\zeta) = d - 2$ oraz $\underline{B}(\zeta)|_{\zeta=0} = 1$. Zera $\underline{B}(\zeta)$ dążą do zer $B_\rho(s)$, gdy $\Delta \rightarrow 0$. Jako nominalny dyskretny model rozważanego obiektu przyjmujemy $\bar{P}_{yu}(\zeta) = b_0 \underline{B}(\zeta)/A(\zeta)$. W przypadku, w którym model czasu ciągłego jest modelem minimalnofazowym uzyskujemy w ten sposób możliwość numerycznie dogodnego wyznaczania potrzebnych wielomianów $F_i(\zeta)$ oraz $G_i(\zeta)$ przez zastosowanie równań $D1$ oraz $D2$ pierwszej diofantycznej bazy.

Odrzucony 'wysokoczęstotliwościowy' składnik $b_0 \zeta^{N_B+1} \cdot \overline{B}/A(\zeta)$ można interpretować w kategoriach addytywnej niepewności modelu $\bar{P}_{yu}(\zeta)$. Kładąc $W_a(\zeta) = b_0 \zeta^{N_B+1} \cdot \overline{B}/A(\zeta)$ oraz stosując omówione metody zwiększania odporności, mamy pewność, że układ sterowania uzyskany na podstawie tak uproszczonego nominalnego modelu będzie stabilny. Jest wszakże oczywistym, że w 'realnym' układzie sterowania przedstawiony sposób pozyskiwania uproszczonego nominalnego modelu nie jest dominującym, ani tym bardziej jedynym, źródłem niepewności tego modelu. Ponieważ w strukturze algorytmu odpornego sterowania obiektem, którego opis charakteryzuje się 'istotną' niepewnością, zawsze powinny być obecne elementy (Q -parametr) zapewniające układowi zamkniętemu przynajmniej odporną stabilność, zatem wyznaczając funkcję $W_a(\zeta)$ (lub $W_m(\zeta)$) odpowiadającą nominalnemu modelowi $\bar{P}_{yu}(\zeta)$ i opisującą całkowitą niepewność tego modelu, niejako w 'naturalny' sposób uwzględniamy także ów singularny przyczynnik niepewności modelowania. \square

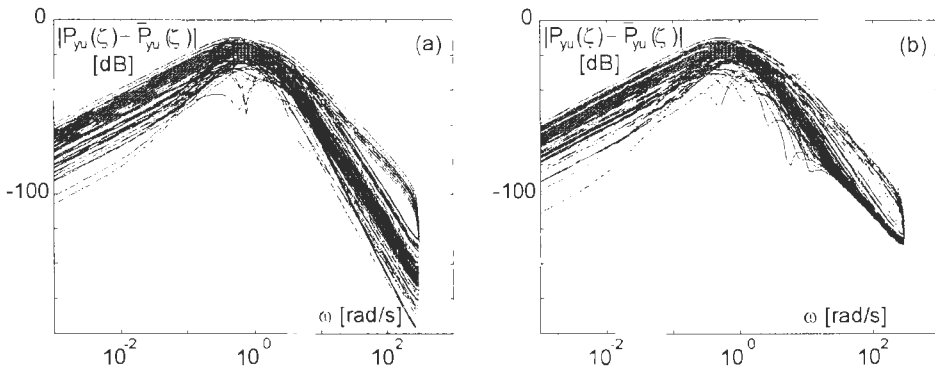
Przykład 2.4 (kształtowanie nominalnego modelu; Suchomski). Rozważmy obiekt czasu ciągłego opisany funkcją przenoszenia $P_{\rho yu}(s) = 1/((1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s))$ o niepewnych parametrach $T_{i \min} \leq T_i \leq T_{i \max}$, $i \in \{1, \dots, 3\}$, gdzie: $T_{1 \min} = 0$ s, $T_{1 \max} = 0.6$ s, $T_{2 \min} = 0.6$ s, $T_{2 \max} = 1.2$ s, $T_{3 \min} = -2$ s oraz $T_{3 \max} = -1$ s. Przyjmując $\bar{T}_i = (T_{i \min} + T_{i \max})/2$, $i \in \{1, \dots, 3\}$, otrzymujemy nominalny model w czasie ciągłym

$$\bar{P}_{\rho yu}(s) = \frac{B_\rho(s)}{A_\rho(s)} = \frac{1}{(1 + 0.3s)(1 + 0.9s)(1 - 1.5s)}.$$

Modelowi temu dla $\Delta = 0.01$ s odpowiada nominalny dyskretny model o dwóch singularnych zerach $z_1 = -126.542341$ oraz $z_2 = -469.706809$, z których drugie jest zerem nieminimalnofazowym. Uproszczony minimalnofazowy model nominalny ma zatem postać

$$\bar{P}_{yu}(\zeta) = \frac{-2.42306342}{-2.42306342 + 0.69049679\zeta + 3.71445719\zeta^2 + \zeta^3}.$$

Niech \mathcal{P}_{yu} oznacza zbiór dyskretnych (δ) modeli $P_{yu}(\zeta)$ odpowiadających obiektowi $P_{pyu}(s)$. Na rys. 2.6 pokazano dwie rodziny krzywych $|P_{yu}(\zeta) - \bar{P}_{yu}(\zeta)|$, $P_{yu}(\zeta) \in \mathcal{P}_{yu}$, $\zeta = (e^{j\omega\Delta} - 1)/\Delta$, ilustrujących niepewność rozważanych dyskretnych modeli nominalnych. Łatwo zauważamy, że ze względu na 'wysokoczęstotliwościowy' charakter odchyłki wprowadzanej przez sposób wyznaczania uproszczonego nominalnego modelu, odpowiednia wążąca funkcja $W_a(\zeta)$, dobrana na podstawie dostępnej wiedzy o stałych czasowych obiektu, byłaby wystarczająca także ze względu na ten niedominujący przyczynik niepewności modelu dyskretnego.



Rys. 2.6. Przykład 2.4. Ilustracja niepewności nominalnego modelu $P_{yu}(\zeta)$: a) nieminimalnofazowy model z singularnymi zerami, b) uproszczony minimalnofazowy model bez singularnych zer.

Przykład 2.5 (uwarunkowanie zadania rozmieszczania biegunów (II); Surchomski). Powróćmy do zadania rozmieszczania biegunów rozważanego w przykładzie 2.3, przyjmując jako nominalny dyskretny model sterowanego obiektu funkcję przenoszenia z jednym minimalnofazowym zerem (poprzednio rozważany model miał singularne zero o wartości -90.2480)

$$\bar{P}_{\delta yu}(\zeta) = \frac{-58.9964102 - 39.9044572\zeta}{-58.9964102 - 41.3793887\zeta + 1.2475236\zeta^2 + 5.8278239\zeta^3 + \zeta^4}.$$

Parametry regulatora, odpowiadające założeniom z przykładu 2.3, obliczamy w oparciu o lemat 2.6, otrzymując $g = -1.1941008$ oraz:

$$\begin{aligned} L_u(\zeta) &= -23.5046480 + 170.3106964\zeta + 6.5267725\zeta^2 \\ L_y(\zeta) &= -1045.7453160 - 1071.0685897\zeta - 365.9747344\zeta^2 - 41.6930588\zeta^3. \end{aligned}$$

Wyznaczanie wielomianów $F_i(\zeta)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, występujących w równaniu $D1$ pierwszej diofantycznej bazy, sprowadza się do rozwiązania trzech układów liniowych równań z górnymi trójkątnymi macierzami o jednostkowymi diagonalami. Podstawowe wskaźniki uwarunkowania tych równań dla strukturalizowalnych zaburzeń, to znaczy wskaźniki $(\kappa_{|\cdot|,|\cdot|}^\infty(\cdot, \cdot))$, $\kappa_S(\cdot, \cdot)$ oraz $\kappa_S(\cdot)$, wynoszą odpowiednio: (2.157, 1.157, 118.993), (5.311, 3.656, 806.634) oraz (10.802, 6.401, 4814.087). Wielomiany $G_i(\zeta)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, otrzymujemy zgodnie z formułą wynikającą z równania $D2$ pierwszej diofantycznej bazy. Porównując powyższe dane ze wskaźnikami z *przykładu 2.3*, stwierdzamy, że w rozważanym przypadku zadanie syntezy regulatora jest znacznie lepiej uwarunkowane. Reprezentując model $\bar{P}_{\delta y u}(\zeta)$ z precyzją trzech znaczących cyfr, mamy $g = -1.1942341$ oraz:

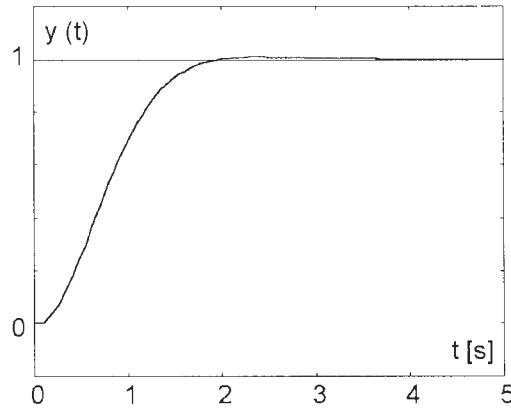
$$\begin{aligned} L_u(\zeta) &= -23.5017224 + 170.2626402\zeta + 6.5248516\zeta^2 \\ L_y(\zeta) &= -1045.8132470 - 1071.2955499\zeta - 366.0104148\zeta^2 - 41.6870320\zeta^3. \end{aligned}$$

W tabeli 2.3 podano względne błędy ε_{l_u} oraz ε_{l_y} wektorów współczynników odpowiednich wielomianów $L_u(\zeta)$ oraz $L_y(\zeta)$, przy czym jako 'dokładne' wartości tych współczynników przyjęto wartości przyporządkowane reprezentacji modelu $\bar{P}_{\delta y u}(\zeta)$ z podwójną precyzją liczb zmiennoprzecinkowych. Zgodnie z oczekiwaniem, błędy te są mniejsze w porównaniu z tymi, które obserwowano w *przykładzie 2.3*. Skokową odpowiedź rozważanego układu pokazano na rys. 2.7.

liczba cyfr znaczących		
	ε_{l_u}	ε_{l_y}
3	2.801E-4	1.555E-4
4	1.268E-4	8.222E-5
5	1.765E-5	9.182E-6
6	2.581E-6	9.619E-7
8	1.842E-9	4.465E-9

Tabela 2.3. Przykład 2.5. Względne błędy parametrów regulatora wynikające z ograniczonej precyzji reprezentacji modelu obiektu.

Przykład 2.6 (synteza regulatora metodą rozmieszczania biegunów (I); Suchomski [405]). Dany jest obiekt czasu ciągłego opisany funkcją przeno-



Rys. 2.7. Przykład 2.5. Skokowa odpowiedź układu regulacji.

szenia

$$P_{\rho y u}(s) = \frac{100(1 - 0.1s) \cdot (1 + T_z s)}{s \cdot (10 + s)^2 \cdot (5 + s)}$$

w której $T_{z \min} \leq T_z \leq T_{z \max}$, gdzie $T_{z \min} = -1$ s oraz $T_{z \max} = 0.75$ s. Wpływ nieznannej wartości potencjalnie nieminimalnofazowego zera tej funkcji uwzględniamy, kładąc $P_{\rho y u}(s) = \bar{P}_{\rho y u}(s) + W_{\rho a}(s) \cdot W_{\rho \delta}(s)$, $\|W_{\rho \delta}(s)\|_{\infty} < 1$, gdzie

$$\bar{P}_{\rho y u}(s) = \frac{100(1 - 0.1s) \cdot (1 + \hat{T}_z s)}{s \cdot (10 + s)^2 \cdot (5 + s)}$$

oznacza założony nominalny model o parametrach:

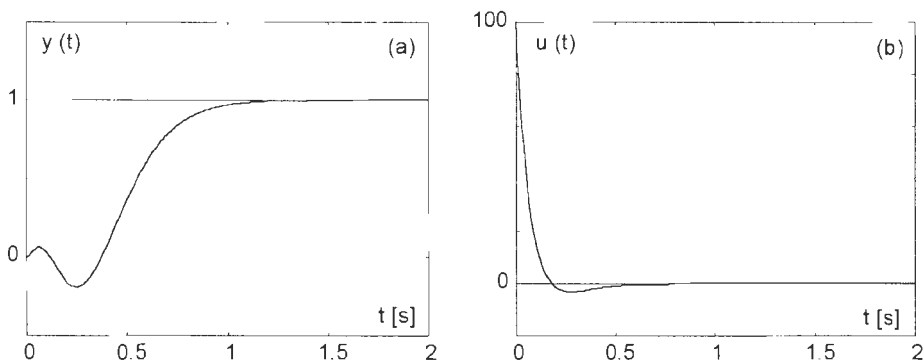
$$\hat{T}_z = \frac{T_{z \min} + T_{z \max}}{2} = -0.125 \text{ s}, \quad r_z = \frac{T_{z \max} - T_{z \min}}{T_{z \min} + T_{z \max}} = -7$$

zaś

$$W_{\rho a} = \frac{100\hat{T}_z r_z (1 - 0.1s)}{(10 + s)^2 \cdot (5 + s)}$$

jest odpowiednią wążącą funkcją. Na tej podstawie, dla $\Delta = 0.01$ s, wyznaczamy nominalny dyskretny model sterowanego obiektu $B(\zeta)/(\zeta \cdot A(\zeta))$ oraz funkcję $W_a(\zeta)$. Ponieważ mamy do czynienia z nominalnym modelem nieminimalnofazowym, zatem stosujemy równania drugiej diofantycznej bazy (\bar{D}), przyjmując $\bar{n}_p = N_A + 1 = 4$. Założmy, że podstawowe specyfikacje dotyczą cech nominalnej skokowej odpowiedzi układu zamkniętego: wymaga się czasu ustalania ≈ 1 s oraz nieobecności przeregulowania. Ponadto, w

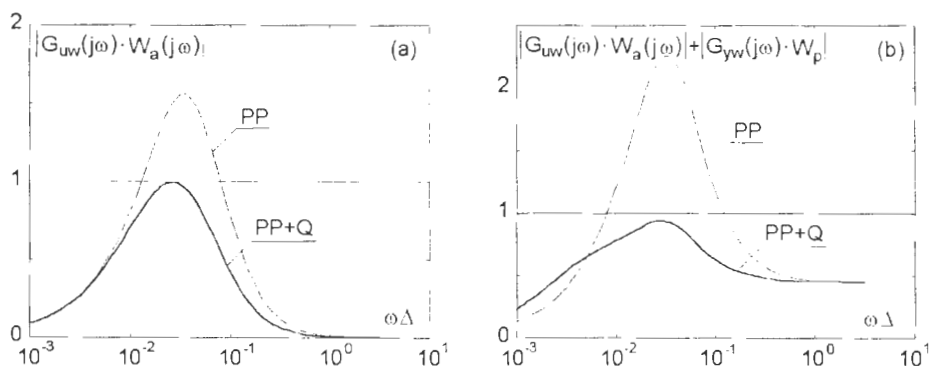
przypadku skokowego pobudzenia r żądamy ograniczenia początkowej wartości sygnału sterującego: $u(0) \leq 100$. Dla uproszczenia przyjmijmy prostą jednoparametrową postać prototypowego wielomianu $\bar{K}(\zeta) = \bar{K}_{N_A+1}(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^4$, w której $\zeta_0 \in (-2/\Delta, 0)$. Biorąc pod uwagę, że $u(0) = g = \bar{k}_0/b_0 = \zeta_0^4/b_0$ oraz kładąc $g = 100$, otrzymujemy $\zeta_0 = -(100b_0)^{1/4} = -9.6946$. Odpowiedź skokową oraz sygnał sterujący nominalnego układu zamkniętego zilustrowano na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Przykład 2.6. Czasowe charakterystyki nominalnego układu sterowania: a) odpowiedź skokowa, b) sygnał sterujący.

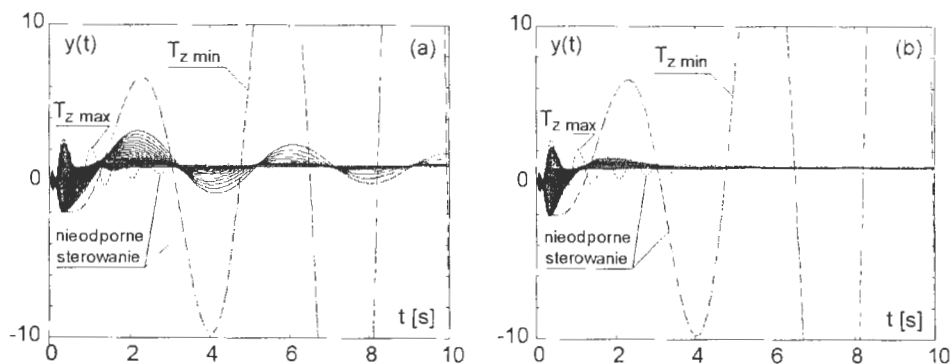
Przykładowemu wielomianowi $C(\zeta) = (1 + 0.25\zeta)^3$ odpowiadają rozwiązania $\bar{F}(\zeta) = 100.0 + 41.5452\zeta + 5.4186\zeta^2 + 0.2267\zeta^3$ oraz $\bar{G}(\zeta) = 18.1388 + 2.9734\zeta + 0.2311\zeta^2$, zapewniające układowi zamkniętemu założone nominalne atrybuty. Ponieważ $M_a^s = 1.5582$ przy $\omega_a^s = 3.396 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, zatem układ ten nie jest odpornie stabilny. Kładąc $\sigma_a^s = 1.2$ oraz $\rho_a^s = 0.75$, uzyskujemy $\gamma = 1.3704$ oraz $\chi = -0.4620$. Teraz $\|G_a^s(\zeta) \cdot Z_\gamma^X(\zeta)\|_\infty = 0.9963$, co oznacza odporną stabilność (rys. 2.9a). Rozważmy problem odpornej jakości tego układu. Przy $W_p = 0.45$ mamy $M_a^p = 3.3221$ oraz $\omega_a^p = 3.020 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Poprawę odporności uzyskamy, przyjmując $\sigma_a^p = 1.2$ oraz $\rho_a^p = 0.4$. Człon korekcyjny (2.5) o parametrach $\gamma = 0.3044$ oraz $\chi = -0.7480$ zapewnia, że odpowiedni wskaźnik ze wzoru (2.8) osiąga wymaganą (mniejszą od 1) wartość 0.9047 (rys. 2.9b).

Dla 50 przypadków modeli sterowanego obiektu z losowo dobranym zerem $-1/T_z$, gdzie $T_{z \min} \leq T_z \leq T_{z \max}$, wykonano symulacyjne badania odpowiedzi skokowych układu zamkniętego. Wyniki tych badań pokazano na rys. 2.10a (warunek odpornej stabilności) oraz na rys. 2.10b (warunek odpornej jakości). Na obu rysunkach pokazano też niezadowalające zachowanie się nieodpornego układu sterowania, który w warunkach założonej dużej



Rys. 2.9. Przykład 2.6. Synteza ze względu na odporność układu sterowania (Q -parametryzacja): a) warunek odpornej stabilności, b) warunek odpornej jakości.

niepewności modelu obiektu może utracić stabilność. Studium przypadku odpowiadającego uproszczonemu algorytmowi ($C(\zeta) = A(\zeta)$) przedstawiono w (Suchomski [405]).



Rys. 2.10. Przykład 2.6. Odpowiedzi skokowe układów sterowania (Q -parametryzacja): a) warunek odpornej stabilności, b) warunek odpornej jakości.

Zakończenie

Praca dotyczyła problemów syntezy algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Próbując wskazać najważniejsze przyczynki, które zdaniem autora wnosi niniejsza praca, należałoby – konsekwentnie wiążąc poniższe sformułowania z przyjętym sposobem modelowania sterowanych obiektów opartym na operatorze δ – wymienić co następuje.

- (1) Opracowano analityczne formuły nastawiania korektorów Youli–Kučery o niskim rzędzie, służące zapewnieniu odpornej stabilności oraz odpornego zachowania się nominalnie stabilnych układów sterowania wyznaczonych zgodnie z metodą rozmieszczania biegunów oraz układów sterowania predycyjnego. Zdefiniowano dwie rodziny diofantycznych równań niezbędnych przy rozwiązywaniu zadań syntezy algorytmów sterowania na podstawie zasady rozmieszczania biegunów.
- (2) Podano oszacowanie wstecznego oraz względnego błędu rozwiązania problemu rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń liniowego zadania wynikającego z odpowiednich równań diofantycznych.
- (3) Przedstawiono numerycznie stabilną metodę oceny stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów dyskretnego modelu sterowanego obiektu.
- (4) Opracowano metodę strojenia algorytmów predycyjnego sterowania, mającą postać analitycznych formuł wywiedzionych z właściwości odpowiednio sparametryzowanych rodzin prototypowych wielomianów.
- (5) Badając wrażliwość rozwiązań dyskretnych równań Riccatiego oraz dyskretnych równań Lapunowa na zaburzenia odpowiednich macierzowych pęków, wykazano, że w przypadku nieosobliwych zadań przy dostatecznie małej wartości okresu próbkowania równania przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia q charakteryzują się istotnie

gorszym uwarunkowaniem w stosunku do równań wynikających z zastosowania operatora δ . Ujawniono także istnienie klasy osobliwych zadań, dla których taka przewaga modeli związanych z operatorem δ nie występuje.

- (6) Dla typowych struktur algorytmów optymalnego sterowania pokazano w jaki sposób, wykorzystując odpowiednio zdefiniowane równania Lapunowa, wyznaczyć zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.
- (7) Zbadano właściwości J –bezstratnych stabilizujących koniugatorów.
- (8) Sformułowano konieczne i wystarczające warunki istnienia różnych J –bezstratnych faktoryzacji modeli (macierzy) rozproszenia, w tym także uogólnionych J –bezstratnych faktoryzacji macierzy, które mają zera należące do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Szczegółowo przeanalizowano właściwości czynników takich faktoryzacji.
- (9) Ukazano podstawowe strukturalne cechy szerokiej klasy optymalnych algorytmów sterowania, które uzyskuje się, biorąc pod uwagę zalecenia wynikające z teorii przestrzeni \mathcal{H}_∞ . Podano wystarczające warunki istnienia wymiernych rozwiązań o ściśle właściwej postaci, a także zwrócono uwagę na ograniczony zakres ich stosowalności.
- (10) Omówiono szereg algorytmów odpornego sterowania oraz estymacji stanu, w tym ogólną postać algorytmu wyprowadzonego z metody rozmieszczania biegunów.

Rozdział 6., poświęcony problemom syntezy liniowych układów optymalnych ze względu na normę \mathcal{H}_∞ , stanowi merytorycznie najistotniejszą część pracy. Łatwo wszakże zauważyć, że motyw kształtowania charakterystyk układów dynamicznych (sterowania oraz estymacji) w oparciu o wskazania formułowane z wykorzystaniem normy \mathcal{H}_∞ wielokrotnie pojawiał się także w innych miejscach tej pracy.

Problemy oraz zadania tu podjęte nie wypełniają całości obszaru zasługującego na penetrację. Jeden z rozpoczętych i interesujących wątków wiąże się z pytaniem o możliwość zbudowania numerycznie stabilnego algorytmu syntezy regulatora według normy \mathcal{H}_∞ na podstawie rozszerzonego modelu danego obiektu. Okazuje się, że w przypadku takich modeli, badając konieczne i wystarczające warunki istnienia odpowiednich J –bezstratnych faktoryzacji, a także definiując dodatkowe strukturalne wymagania nakładane

na unimodularne czynniki tych faktoryzacji, po raz kolejny przekonujemy się o korzyściach, jakie daje reprezentacja rozważanych równań Riccatiego w postaci stosownych macierzowych pęków (Suchomski [412]). Inny problem, o którym tylko wspomniano w toku prowadzonych rozważań, dotyczy algorytmów syntezy odpornych adaptacyjnych układów sterowania z Q -parametrami zmieniającymi się w czasie (Suchomski [411]).

Na zakończenie warto jeszcze wymienić dwa tematy, które będąc rozwinięciem problematyki poruszonej w niniejszej pracy, stanowią o aktualnych fascynacjach jej autora. Są to problemy syntezy numerycznie odpornych algorytmów sterowania nieliniowymi obiektami o nieskończeniowym wymiarowym modelach oraz zagadnienia związane z adekwatnym modelowaniem w czasie dyskretnym niepewności charakterystyk obiektów opisanych różniczkowymi inkluzjami.

Literatura

- [1] J. Abels, P. Benner: CAREX (DAREX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Riccati equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 14 (16), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [2] A. Albert: Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudo inverses, *SIAM Journ. Applied Math.*, 1969, 17 (2), 434-440.
- [3] B.D.O. Anderson: From Youla-Kučera to identification, adaptive and nonlinear control, *Automatica*, 1998, 34 (12), 1485-1506.
- [4] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenny, D. Sorensen: *LAPACK users' guide*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [5] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: *Optimal control. Linear quadratic methods*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [6] P. Ansay, V. Wertz: Model uncertainties in GPC: a systematic two-step design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, FR-A-B-3.
- [7] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz: Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter, *European Journ. Control*, 1998, 4 (1), 64-70.
- [8] K. Arent, I.M.Y. Mareels, J.W. Polderman: The pole-zero cancellation problem in adaptive control: a solution for minimum phase systems by approximate models, *European Journ. Control*, 1998, 4 (3), 320-332.
- [9] L. Arnold: *Stochastic differential equations. Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [10] W.F. Arnold, A.J. Laub: Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations, *Proc. IEEE*, 1984, 72 (12), 1746-1754.
- [11] K.J. Åström: Limitations on control system performance, *European Journ. Control*, 2000, 6 (1), 2-20.
- [12] K.J. Åström, P. Hagander, J. Sternby: Zeros of sampled systems, *Automatica*, 1984, 20 (1), 31-38.

- [13] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA., 1989.
- [14] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Computer-controlled systems*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ., 1997.
- [15] E.W. Bai, Z. Ding: Zeros of sampled data systems represented by FIR models, *Automatica*, 2000, 36 (1), 121-123.
- [16] E.W. Bai, Y.Q. Wu: Limiting zero distribution of sampled systems, *Automatica*, 2002, 38 (5), 843-851.
- [17] G.A. Baker: *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York, San Fransisco, 1975.
- [18] G.A. Baker, P. Graves-Morris, P.A. Carruthers: *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981.
- [19] S. Barnett: *Matrices in control theory*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
- [20] A.Y. Barraud: A numerical algorithm to solve $A^T X A - X = Q$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1977, AC-22 (5), 883-885.
- [21] R.H. Bartels, A.R. Conn, C. Charalambous: On Cline's direct method for solving overdetermined linear systems in the l_∞ sense, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1978, 15 (2), 255-270.
- [22] H. Bartels, G.W. Stewart: Algorithm 432. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Comm. Assoc. Computing Mach.*, 1972, 15 (9), 820-826.
- [23] F.L. Bauer: Optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1963, 5 (1), 73-87.
- [24] F.L. Bauer: Remarks on optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1969, 13 (1), 1-3.
- [25] B. Beckermann, G. Labahn: A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials, *Journ. Symbolic Comput.*, 1998, 26 (6), 691-714.
- [26] B. Benhammouda: Rank-revealing 'top-down' *ULV* factorizations, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1997, SFB393/97-02, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [27] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic Riccati equations. I: continuous-time case, II: discrete-time case, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1995, 95-22, 95-23, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [28] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: Benchmarks for the numerical solution of algebraic Riccati equations, *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17 (5), 18-28.

- [29] A. Berman, R.J. Plemmons: *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [30] R.R. Bitmead, M. Gevers: Riccati difference and differential equations: convergence, monotonicity and stability, w S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [31] R.R. Bitmead, H. Weiss: On the solution of discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (3), 481-482.
- [32] Å. Björck: *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [33] Å. Björck: Component-wise perturbation analysis and error bounds, *BIT*, 1991, 31, 238-244.
- [34] T. Bleile, P. Boucher, D. Dumur: Delta-operator generalized predictive cascade control, *Proc. 3rd European Control Conf ECC'95*, Rome, Italy, 4, 1995, 2857-2862.
- [35] M.J. Błachuta: On zeros of pulse transfer functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1999, AC-44 (6), 1229-1234.
- [36] J. Bognar: *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.
- [37] D.L. Boley: Computing rank-deficiency of rectangular matrix pencils, *Systems and Control Letters*, 1987, 9, 207-214.
- [38] D.L. Boley, W.S. Lu: Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (3), 249-251.
- [39] P. Boucher, D. Dumur, R. Neumann: Control axis using delta-operator generalized-predictive control, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993 2, 937-940.
- [40] T.L. Boullion, P.L. Odell: *Generalized inverse matrices*, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1971.
- [41] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [42] R.D. Braatz: Internal model control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [43] G.E. Bredon: *Topology and geometry*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [44] W.S. Brown: On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1971, 18 (4), 476-504.
- [45] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang: *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

- [46] J.R. Bunch: The weak and strong stability of algorithms in numerical linear algebra, *Linear Algebra Appl.*, 1987, 88/89, 49-66.
- [47] J.R. Bunch, C.P. Nielsen: Updating the singular value decomposition, *Numer. Math.*, 1978, 31 (2), 111-129.
- [48] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, V. Mehrmann: A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (2), 419-453.
- [49] P.A. Businger: Matrices which can be optimally scaled, *Numer. Math.*, 1968, 12, 346-348.
- [50] P.A. Businger, G.H. Golub: Linear least squares solutions by Householder transformations, *Numer. Math.*, 1965, 7 (3), 269-276.
- [51] M. Busłowicz: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk, Politechnika Białostocka, Warszawa, Białystok, 2000.
- [52] R. Byers: A LINPACK-style condition estimator for the equation $AX - XB^T = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (10), 926-928.
- [53] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model predictive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [54] T.F. Chan, D.E. Foulser: Effectively well-conditioned linear systems, *SIAM Journ. Sci. Statist. Comput.*, 1988, 9 (6), 963-969.
- [55] S. Chandrasekaran, I.C.F. Ipsen: On the sensitivity of solution components in linear systems of equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1995, 16 (1), 93-112.
- [56] B.M. Chen: *Robust and H_∞ control*, Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [57] C.T. Chen: *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*, Saunders College Publishing, Philadelphia, San Diego, 1993.
- [58] B.S. Chen, T.Y. Dong: LQG Optimal control system design under plant perturbation and noise uncertainty: a state-space approach, *Automatica*, 1989, 25 (3), 431-436.
- [59] S. Chen, J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne: Optimising stability bounds of finite-precision controller structures for sampled-data systems in the δ -operator domain, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (6), 517-526.
- [60] H.W. Cheng, S.S.T. Yau: More explicit formulas for the matrix exponential, *Linear Algebra Appl.*, 1997, 262, 131-163.

- [61] P. Chin, R.M. Corless: Optimization strategies for the approximate GCD problem, *Proc. Int. Symp. Symbolic and Algebraic Computation ISSAC*, Rostock, Germany, 1998, 228-235.
- [62] A. Chotai, P. Young, P. McKenna, W. Tych: Proportional-integral-plus (PIP) design for delta (δ) operator systems. Part 2: MIMO systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (1), 149-168.
- [63] C.K. Chui, G. Chen: *Kalman filtering with real-time applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [64] D.W. Clarke: Self-tuning control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [65] D.W. Clarke, C. Mohtadi: Properties of generalized predictive control, *Automatica*, 1989, 25 (6), 859-876.
- [66] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm, *Automatica*, 1987, 23 (1), 137-148.
- [67] T.F. Coleman, Y. Li: A global and quadratically convergent method for linear l_∞ problems, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1992, 29 (4), 1166-1186.
- [68] E.G. Collins Jr., W.M. Haddad, V. Challeboina: Robustness analysis in the delta-domain using fixed-structure multipliers, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 3286-3291.
- [69] E.G. Collins Jr., T. Song: A delta operator approach to discrete-time \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (4), 315-320.
- [70] J.B. Conway: *Functions of one complex variable*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1978.
- [71] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A generalized eigenproblem solution for singular \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ problems, *Control and Dynamic Systems*, 1992 50 (2), 331-394.
- [72] R.B. Copeland, M.G. Safonov: Zero cancelling compensation for singular control problems and their application to the inner-outer factorization problem, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1992, 2 (2), 139-164.
- [73] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A zero compensation approach to singular \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ , *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5 (2), 71-106.
- [74] C.L. Cox, W.F. Moss: Backward error analysis for a pole assignment algorithm, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (4), 446-456.
- [75] S. Cristea, C. De Prada: Predictive control system with slow and fast dynamics using the delta operator, *Proc. CIDIC Seminar. Theory and Applic. Model-based Predictive Control*, Brussel, Belgium, 1996.
- [76] C.G. Cullen, C.A. Hall: On determining whether two polynomials are relatively prime, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (4), 369-370.

- [77] P.F. Curran: Lyapunov's matrix equation with system matrix in companion form, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1509-1516.
- [78] B.N. Datta: *Numerical methods for linear control systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, 2004.
- [79] E.J. Davison, I.J. Ferguson: The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using parameter optimization methods, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (1), 93-110.
- [80] H. Demircioglu: Constrained continuous-time generalised predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 470-476.
- [81] H. Demircioglu, D.W. Clarke: CGPC with guaranteed stability properties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1992, 139 (4), 371-380.
- [82] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Continuous-time generalised predictive control (CGPC), *Automatica*, 1991, 27 (1), 55-74.
- [83] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Multivariable continuous-time generalised predictive control (MCGPC), *Automatica*, 1992, 28 (4), 697-713.
- [84] J.W. Demmel: *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [85] J.W. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, Slapničar, K. Veselič, Z. Drmač: Computing the singular value decomposition with relative accuracy, *LAPACK working note*, 1997, 119, CS-97-348. SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [86] M.C.F. de Oliveira, P.J. Fleming: Effective mapping of continuous-time controllers to their equivalents, *Electronics Letters*, 1990, 26 (9), 562-564.
- [87] P. Devilde, H. Dym: Lossless chain scattering matrices and optimum linear prediction: the vector case, *Circuit Theory Appl.*, 1981, 9 (2), 135-175.
- [88] I.S. Dhillon: Reliable computation of the condition number of a tridiagonal matrix in $\mathcal{O}(n)$ time, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 776-796.
- [89] C. De Prada, S. Cristea, A.G. Kuznetsov: Stability guarantee in predictive control delta domain, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 3b-07-3, I, 397-402.
- [90] C.A. Desoer, M. Vidyasagar: *Feedback systems: input-output properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [91] J. Douglas, M. Athans: Multivariable poles, zeros, and pole-zero cancellations, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [92] J.C. Doyle: Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (4), 756-757.
- [93] J.C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1982, 129 (6), 242-250.

- [94] C.J. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum: *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [95] J.C. Doyle, A. Packard, K. Zhou: Review of LFTs, LMIs and μ , *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, England, 1991, 1227-1232.
- [96] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis: State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, 34 (8), 831-847.
- [97] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- [98] D. Dumur, P. Boucher: New predictive techniques: control axis solutions, *Proc. 3rd Conf. on Control Applications*, Glasgow, Scotland, UK, 1994, 1663-1668.
- [99] D. Dumur, P. Boucher, E. Pope, C. Holtan: PREDATOR: a delta identification and autotuned predictive control software toolbox, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2845-2850.
- [100] G.E. Dullerud, F. Paganini: *A course in robust control theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, 2000.
- [101] W. Ebert: Optimal filtered predictive control - a delta operator approach, *Systems and Control Letters*, 2001, 42, 69-80.
- [102] M. El-Khoury, O.D. Crisalle: Relative zero location for second-order sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1551-1552.
- [103] E. Elmroth, F. Gustavson, I. Jonsson, B. Kågström: Recursive blocked algorithms and hybrid data structures for dense matrix library software, *SIAM Review*, 2004, 46 (1), 3-45.
- [104] L. Elsner, C. He: An algorithm for computing the distance to uncontrollability, *Systems and Control Letters*, 1991, 17, 453-464.
- [105] A. Emami-Nacini, P. Van Dooren: Computation of zeros of linear multivariable systems, *Automatica*, 1982, 18 (4), 415-430.
- [106] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Numerical univariate polynomial GCD, w J. Renegar, M. Shub, S. Smale (Eds.): *The mathematics of numerical analysis, Lect. appl. math.*, 32, Amer. Math. Soc., 1996.
- [107] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Certified approximate univariate GCDs, *Journ. Pure Appl. Algebra*, 1997, 117/118, 229-251.
- [108] F.W. Fairman: *Linear control theory, the state space approach*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.
- [109] G. Favier, D. Dubois: A review of k -step-ahead predictors, *Automatica*, 1990, 26 (1), 75-84.
- [110] A. Feintuch: *Robust control theory in Hilbert space*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1998.

- [111] V. Feliu, J.A. Cerrada: Analysis and design of minimum-phase zeros of sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (6), 1397-1416.
- [112] A. Feuer, R.H. Middleton: Conditioning of LMS algorithms with fast sampling, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-43 (8), 1978-1981.
- [113] R.D. Fierro, P.C. Hansen, P.S.K. Hansen: UTV tools: MATLAB templates for rank-revealing UTV decompositions, *Numer. Algorithms*, 199, 20 (1), 165-194.
- [114] M. Fikar, S. Engell: Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kučera parameterisation, *European Journ. Control*, 1997, 3 (2), 304-316.
- [115] M. Fikar, M. Morari, J. Mikleš: On Youla-Kučera parameterisation approach to predictive control, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CP-12-5.
- [116] B.A. Francis: *A course in \mathcal{H}_∞ control theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [117] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (6), 555-565.
- [118] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: A sensitivity tradeoffs for plants with time delay, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 99-104.
- [119] J.S. Freudenberg, R.H. Middleton, J.H. Braslavsky: Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems, *Int. Journ. Control*, 1995, 61 (6), 1387-1421.
- [120] Y. Fu, G.A. Dumont: Choice of sampling to ensure minimum-phase behaviour, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 560-563.
- [121] P.A. Fuhrmann: *A polynomial approach to linear algebra*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1996.
- [122] Z. Gajic, M. Qureshi: *Lyapunov matrix equation in system stability and control*, Academic Press, New York, 1995.
- [123] P.M. Gahinet, A.J. Laub: Computable bounds for the sensitivity for the algebraic Riccati equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1461-1480.
- [124] P.M. Gahinet, A.J. Laub, C.S. Kenney, G.A. Hower: Sensitivity of the stable discrete-time Lyapunov equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1209-1217.
- [125] F.R. Gantmacher: *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

- [126] P.J. Gawthrop: *Continuous-time self-tuning control; vol. 1: design*, Research Studies Press, Letchworth, U.K., 1987.
- [127] C.E. Garcia, M. Morari: Internal model control. A unifying review and some new results, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1982, 21 (2), 308-323.
- [128] P.J. Gawthrop, H. Demircioglu, I.I. Siller-Alcala: Multivariable continuous-time generalised predictive control: a state-space approach to linear and non-linear systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1998, 145 (3), 241-250.
- [129] P.J. Gawthrop, R.W. Jones, D.G. Sbarbaro: Emulator-based control and internal model control: complementary approaches to robust control design, *Automatica*, 1996, 32 (8), 1223-1227.
- [130] Y. Genin, P. Van Dooren, T. Kailath, J. Delosme, M. Morf: On Σ -lossless transfer functions and related questions. *Linear Algebra Appl.*, 1983, 50, 251-275.
- [131] R. Gessing: About some properties of discrete-time transfer functions for small sampling periods, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993,3, 1699-1702.
- [132] R. Gessing: Whether the delta operator models are really better for small sampling periods, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-We-M21 .
- [133] M. Gevers, G. Li: *Parametrizations in control, estimation and filtering problems*, Springer Verlag, London, 1993.
- [134] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Residual bounds for discrete-time Lyapunov equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (7), 1244-1249.
- [135] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Backward error, sensitivity and refinement of computed solutions of algebraic Riccati equations, *Numer. Algebra Appl.*, 1995, 2 (1), 29-49.
- [136] K.C. Goh, M.G. Safonov: The extended $j\omega$ -axis eigenstructure of a Hamiltonian matrix pencil, *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 1897-1902.
- [137] G.H. Golub, V. Klema, G.W. Stewart: Rank degeneracy and least squares problems, *Stanford Univ. Tech. Report*, 1976, STAN-CS-76-559, Computer Sci. Depart., Stanford, CA.
- [138] G.H. Golub, S. Nash, C.F. Van Loan: A Hessenberg-Schur method for the problem $AX + XB = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1974, AC-24 (6), 909-913.
- [139] G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1996.
- [140] R.M. Goodall, B.J. Donoghue: Very high sample rate digital filters using the δ operator realisation, *IEE Proc., Circuit Device Syst.*, 1993, 140 (3), 199-206.

- [141] G.C. Goodwin, R. Lozano Leal, D.Q. Mayne, R.H. Middleton: Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, 1986, 22 (2), 199-207.
- [142] G.C. Goodwin, R.H. Middleton, H.V. Poor: High-speed digital signal processing and control, *Proc. IEEE*, 1992, 80 (2), 240-259.
- [143] G.C. Goodwin, M. Salgado: Frequency domain sensitivity functions for continuous time systems under sampled data control, *Automatica*, 1994, 30 (8), 1263-1270.
- [144] G.C. Goodwin, M.M Seron: Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (9), 1240-1251.
- [145] G.C. Goodwin, A.R. Woodyatt, R.H. Middleton, J. Shim: Fundamental limitations due to $j\omega$ -axis zeros in SISO systems, *Automatica*, 1999, 35 (5), 857-863.
- [146] R. Gorez, V. Wertz, K.Y. Zhu: On a generalised predictive control algorithm, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (5), 369-377.
- [147] H. Górecki: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, WNT, Warszawa, 1971.
- [148] H. Górecki: *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.
- [149] A. Graham: *Kronecker products and matrix calculus with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [150] J. F. Grcar: Optimal sensitivity analysis of linear least squares, *Lawrence Berkeley National Laboratory Techn. Report*, 2002, LBNL-52434.
- [151] M. Green: \mathcal{H}_∞ controller synthesis by J -lossless coprime factorisation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (3), 522-547.
- [152] M. Green, K. Glover, D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle: A spectral factorization approach to \mathcal{H}_∞ control, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1350-1371.
- [153] M. Green, D.J.N. Limebeer: *Linear robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [154] M.J. Grimble: *Robust industrial control*, Prentice Hall International, New York, London, 1994.
- [155] M.J. Grimble: Generalised predictive control: an introduction to the advantages and limitations, *Int. Journ. Systems Science*, 1992, 23 (1), 85-98.
- [156] M. Gu: Backward perturbation bounds for linear least squares problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 20 (2), 363-372.

- [157] D.W. Gu, M.C. Tsai, S.D. O'Young, I. Postlethwaite: State-space formulae for discrete-time \mathcal{H}_∞ optimization, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (5), 1683-1723.
- [158] T. Gudmundsson, C. Kenney, A.J. Laub: Scaling of the discrete-time algebraic Riccati equation to enhance stability of the Schur solution method, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (4), 513-518.
- [159] C.H. Guo, A.J. Laub: On a Newton-like method for solving algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2000, 21 (2), 694-698.
- [160] T. Hagiwara: Analytic study of the intrinsic zeros of sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1996, AC-41 (2), 261-263.
- [161] T. Hagiwara, T. Yuasa, M. Araki: Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds, *Int. Journ. Control*, 1993, 58 (6), 1325-1346.
- [162] M.E. Halpern: Modified pole-assignment controller for plant models with exact or near pole-zero cancellation, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (3), 189-195.
- [163] S.J. Hammarling: Numerical solution of the stable, nonnegative definite Lyapunov equation, *IMA Journ. Numer. Anal.* 1982, 2, 303-323.
- [164] P.C. Hansen, P.Y. Yalamov: Computing symmetric rank-revealing decompositions via triangular factorization, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2002, 23 (2), 443-458.
- [165] S. Hara, H. Katori, R. Kondo: The relationship between real poles and real zeros in SISO sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 632-635.
- [166] S. Hara, R. Kondo, H. Katori: Properties of zeros in digital control systems with computational time delay, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (2), 493-511.
- [167] S. Hara, T. Sugie: Inner-outer factorization for strictly proper functions with $j\omega$ -axis zeros, *Systems Control Letters*, 1991, 16 (2), 179-185.
- [168] S. Hara, T. Sugie, R. Kondo: \mathcal{H}_∞ control problem with $j\omega$ -axis zeros, *Automatica*, 1992, 28 (1), 55-70.
- [169] B. Hassibi, A.H. Sayed, T. Kailath: *Indefinite-quadratic estimation and control. A unified approach to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ theories*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [170] J.W. Helton, O. Merino: *Classical control using \mathcal{H}_∞ methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [171] H.V. Henderson, S.S. Searle: The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review, *Linear and Multilinear Algebra*, 1981, 9, 271-288.

- [172] M.A. Hersh: The zeros and poles of delta operator systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (3), 557-575.
- [173] G.A. Hewer, C.S. Kenney: The sensitivity of the stable Lyapunov equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1988, 26 (2), 321-344.
- [174] N.J. Higham: Computing error bounds for regression problems, *Contemporary Math.*, 1990, 112, 195-210.
- [175] N.J. Higham: Perturbation theory and backward error for $AX - XB = C$, *BIT*, 1993, 33 (1), 124-136.
- [176] N.J. Higham: A survey of componentwise perturbation theory in numerical linear algebra, Proc. Symposia in Applied Math., American Math. Soc., 1994, 48, 49-77.
- [177] N.J. Higham: *Accuracy and stability of numerical algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [178] N.J. Higham: Notes on accuracy and stability of algorithms in numerical linear algebra, *Numer. Anal. Report*, 1998, 333, The Univ. of Manchester.
- [179] D.J. Higham, N.J. Higham: Backward error and condition of structured linear systems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (1), 162-175.
- [180] N.J. Higham, M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov: The sensitivity of computational control problems, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 28-43.
- [181] R.D. Hocken, S.V. Salehi, J.F. Marshall: Time-delay mismatch and the performance of predictor control schemes, *Int. Journ. Control*, 1983, 38 (2), 433-447.
- [182] A.S. Hodel: Recent applications of the Lyapunov equation in control theory, w R. Beauvens, P. de Groen (Eds.): *Iterative methods in linear algebra*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [183] R.A. Horn, C.R. Johnson: *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.
- [184] M. Hou, A.C. Pugh, G.E. Hayton: Generalized transfer functions and input-output equivalence, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (5), 1163-1178.
- [185] Y.S. Hung: \mathcal{H}_∞ optimal control. Part 1. Model matching, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (4), 1291-1330.
- [186] Y.S. Hung, D. Chu: A simple and unified approach for analyzing discrete-time algebraic Riccati equation and spectral factorisation related to discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem, *Technical Report*, 1995, University of Hong Kong.
- [187] Y.S. Hung, D. Chu: (J, J') -lossless factorisation for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (3), 517-533.

- [188] Y.S. Hung, D. Chu: Relationships between discrete-time and continuous-time algebraic Riccati inequalities, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 270, 287-313.
- [189] Y.S. Hung, D. Chu: On extended (J, J') -lossless factorisation, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 271, 117-138.
- [190] P. A. Iglesias, K. Glover: State-space approach to discrete-time \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Control*, 1991, 54 (5), 1031-1073.
- [191] V. Ionescu, C. Oară, M. Weiss: General matrix pencil techniques for the solution of algebraic Riccati equations: a unified approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (8), 1085-1097.
- [192] P.A. Ioannou, J. Sun: *Robust adaptive control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996.
- [193] V. Ionescu, M. Weiss: On computing the stabilizing solution of the discrete-time Riccati equation, *Linear Algebra Appl.*, 1992, 174, 229-238.
- [194] V. Ionescu, M. Weiss: Two-Riccati formulae for the discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (1), 141-195.
- [195] R. Isermann: *Digital control systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [196] R. Isermann: *Digital control systems. Vol. 1: fundamentals, deterministic control*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [197] M. Ishitobi: Conditions for stable zeros of sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1558-1561.
- [198] M. Ishitobi: Stable zeros of sampled low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1485-1498.
- [199] M. Ishitobi: Criteria for stability of zeros of sampled systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1994, 141(6), 396-402.
- [200] M. Ishitobi: Stable zeros of a discrete systems obtained by sampling a continuous-time plant with a time delay, *Int. Journ. Control*, 1994, 59 (4), 1053-1062.
- [201] A.H. Jazwinski: *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [202] J. Ježek: Polynomial equations, conjugacy and symmetry, w K.J. Hunt (Ed.): *Polynomial methods in optimal control and filtering*, Peter Peregrinus Ltd, London, 1993.
- [203] J.C. Johnson, C.L. Phillips: An algorithm for the computation of the integral of the state transition matrix, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (2), 204-205.
- [204] P.T. Kabamba: Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 772-783.

- [205] T. Kaczorek: *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa, 1996.
- [206] T. Kailath: *Linear systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [207] T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi: *Linear estimation*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [208] B. Kågström, P. Poromaa: LAPACK-style algorithms and software for solving the generalized Sylvester equation and estimating the separation between regular matrix pairs, *Report UMINF*, 1993, 93.23, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.
- [209] B. Kågström, P. Poromaa: Computing eigenspaces with specified eigenvalues of a regular matrix pair (A, B) and condition estimation: Theory, algorithms and software, *Report UMINF*, 1994, 94.04, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.
- [210] B. Kågström, L. Westin: Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (7), 745-751.
- [211] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib: *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [212] N. Karcaniyas, M. Mitrouli: A matrix pencil based numerical method for the computation of GCD of polynomials, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, AC-39 (5), 977-981.
- [213] R. Karlson, B. Waldén: Estimation of optimal backward perturbation bounds for the linear least squares, *BIT*, 1997, 37 (4), 862-869.
- [214] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [215] J. Kautsky, N.K. Nichols, P. Van Dooren: Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. Journ. Control*, 1985, 41 (5), 1129-1155.
- [216] C. Kenney, G. Hoyer: The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (1), 50-69.
- [217] C. Kenney, A.J. Laub: Condition estimates for matrix functions, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (1), 191-209.
- [218] C. Kenney, A.J. Laub, M. Wette: A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers, *Systems Control Letters*, 1989, 12 (2), 241-250.
- [219] A. Kielbasiński, H. Schwetlick: *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa, 1992.
- [220] H. Kimura: Conjugation, interpolation and model matching in \mathcal{H}_∞ , *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (1), 269-307.

- [221] H. Kimura: Generalized chain-scattering approach to \mathcal{H}_∞ control problems, *w* S.P. Bhattacharyya, L.H. Keel (Eds.): *Control of uncertain dynamic systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, 21-38.
- [222] H. Kimura: (J, J') -lossless factorisation using conjugations of zero and pole extractions, *w* S. Hosoe (Ed.): *Robust control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [223] H. Kimura: (J, J') -lossless factorization based on conjugation, *Systems Control Letters*, 1992, 19 (1) 95-109.
- [224] H. Kimura: Chain scattering representation, J -lossless factorization and \mathcal{H}_∞ control, *Journ. Math. Systems Estimation Control*, 1995, 5 (2), 203-255.
- [225] H. Kimura: *Chain-scattering approach to \mathcal{H}_∞ control*, Birkhäuser, Boston, Basel, 1997.
- [226] H. Kimura, Y. Lu, R. Kawatani: On the structure of \mathcal{H}_∞ control systems and related extensions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 653-667.
- [227] H. Kimura, F. Okunishi: Chain-scattering approach to control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 151-171.
- [228] R. Kondo, S. Hara: On cancellation in \mathcal{H}_∞ optimal controllers, *Systems and Control Letters*, 1989 13 (2), 205-210.
- [229] W. Kongprawechnon, H. Kimura: J -lossless conjugation and factorization for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1996, 65 (5), 867-884.
- [230] W. Kongprawechnon, H. Kimura: J -lossless factorization and \mathcal{H}_∞ control for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (3), 423-446.
- [231] M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov: *Perturbation theory for matrix equations*, Elsevier Press, Amsterdam, 2003.
- [232] B. Kouvaritakis, M. Cannon, J.A. Rossiter: Recent developments in generalized predictive control for continuous-time systems, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (2), 164-173.
- [233] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang: Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (2), 349-362.
- [234] Z. Kowalczyk, P. Suchomski, A. Marcińczyk: Discrete-time and continuous-time generalised predictive controllers with anticipated filtration: tuning rules, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1996, 6 (4), 707-732.
- [235] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Anticipated filtering approach to generalised predictive control, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3591-3596.

- [236] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, K, 301-306.
- [237] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Numerically robust computer aided Markov-equivalent CGPC design, *Proc. IFAC Symp. Comp. Aided Contr. Syst. Design*, Gent, Belgium, April 1997, 365-370.
- [238] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Robust predictive control based on overparameterised delay models, *Proc. 2nd IFAC Symp. Robust Control Design*, Budapest, Hungary, 1997, 525-530.
- [239] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Dyskretne uogólnione sterowanie predykcyjne z filtracją antycypacyjną, *Studia z Automatyki i Informatyki*, Poznań, 1997, 22, 41-52.
- [240] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Two-degree-of-freedom stable GPC design, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 243-248.
- [241] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Continuous-time generalised predictive control of delay systems, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (1), 65-75.
- [242] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Control of delay plants via continuous-time GPC principle, *Control and Cybernetics*, 1999, 28 (2), 291-314.
- [243] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Analytical design of stable continuous-time generalised predictive control, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 53-100.
- [244] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Robust CGPC design via simple Youla parameterisation, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CA-12-2.
- [245] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Simple stable discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration of control error, *Control and Cybernetics*, 2002, 31 (1), 17-41.
- [246] E. Kreindler, A. Jameson: Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, AC-17 (1), 147-148.
- [247] D. Kresner, V. Mehrmann, T. Penzl: CTLEX (DTLEX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Lyapunov equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 6 (7), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [248] V. Kučera: Stability of discrete linear feedback system, *Proc. 6th IFAC World Congress*, Boston, 1975, 44.1.
- [249] V. Kučera: Diophantine equations in control - a survey, *Automatica*, 1993, 29 (6), 1361-1375.

- [250] V. Kučera: A tutorial on \mathcal{H}_2 control theory: the continuous time case, w M.J. Grimble, V. Kučera: *Polynomial methods for control systems design*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [251] B.C. Kuo: *Digital control systems*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1980.
- [252] H. Kushner: *Introduction to stochastic control*, Holt, Rinehart, Winston, Inc., New York, 1971.
- [253] A.G. Kuznetsov, R.O. Bowyer, D.W. Clark: Estimation of multiple order models in the δ domain, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (7/8), 629-642.
- [254] H. Kwakernaak: Robust control and \mathcal{H}_∞ -optimization, *Automatica*, 1993, 29 (2), 255-273.
- [255] H. Kwakernaak: Symmetries in control system design, w A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 17-51.
- [256] P. Lancaster, L. Rodman: *Algebraic Riccati equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [257] I.D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad: *Adaptive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [258] A.J. Laub: A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (6), 913-921.
- [259] A.J. Laub: Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations, in S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [260] A.J. Laub, R.V. Patel, P.M. Van Dooren: Numerical and computational issues in linear control and system theory, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [261] D.L. Laughlin, K.G. Jordan, M. Morari: Internal model control and process uncertainty: mapping uncertainty regions for SISO controller design, *Int. Journ. Control*, 1986, 44 (6), 1675-1698.
- [262] D.L. Laughlin, D.E. Rivera, M. Morari: Smith predictor design for robust performance, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 477-504.
- [263] M.B. Lauritsen: Delta-domain predictive control and identification for control, *Ph.D. Thesis (Lyngby: Technical University of Denmark, Institute of Mathematical Modelling*, 1997.
- [264] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard: Delta-operator predictive control, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 884-889.

- [265] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Emulator-based GPC in the delta-domain, *Technical University Denmark Techn. Report*. 1994, IMM-Rep-1994-24, Inst. Math. Modelling, Lyngby, Danmark.
- [266] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Optimal prediction in the delta-domain, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2851-2856.
- [267] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Generalized predictive control in the delta-domain, *Proc. the American Control Conf.*, Seattle, WA, 1995, 5, 3709-3713.
- [268] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: GPC using a delta-domain emulator-based approach, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (1), 219-232.
- [269] C.L. Lawson, R.J. Hanson: *Solving least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [270] P.H. Lee, H. Kimura, Y.C. Soh: On the lossless and J -lossless embedding theorems in \mathcal{H}_∞ , *Systems and Control Letters*, 1996, 29 (1), 1-7.
- [271] M.A. Lelić, M.B. Zarrop: Generalized pole-placement self-tuning controller, part I, basic algorithms, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 547-568.
- [272] F.L. Lewis: *Optimal estimation*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986.
- [273] Q. Li, H.H. Fan: On properties of information matrices of delta-operator based adaptive signal processing algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, SP-45 (10), 2454-2467.
- [274] G. Li, M. Gevers: Roundoff noise minimization using delta-operator realizations, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, SP-41 (2), 629-637.
- [275] G. Li, M. Gevers: Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (5), 803-807.
- [276] K.Z. Liu, T. Mita: Conjugation and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1989, 50 (4), 1435-1460.
- [277] G.P. Liu, R.J. Patton: *Eigenstructure assignment for control system design*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.
- [278] D.P. Looze, J.S. Freudenberg: Limitations of feedback properties imposed by open-loop right half plane poles, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 736-739.
- [279] D.H. Luecking, L.A. Rubel: *Complex analysis, a functional analysis approach*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1984.
- [280] J.M. Maciejowski: *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, Reading, MA., 1989.

- [281] A.N. Malyshev, M. Sadkane: Computation of optimal backward perturbation bounds for large sparse linear least squares problems, *BIT*, 2002, 41 (4), 739-747.
- [282] A.A. Marouf, S.A.K. Al-Assadi: Computer-aided discretization of continuous data control systems, *Computer Aided Design*, 1985, 17 (4), 169-178.
- [283] Math Works: *Using MATLAB*, The Math Works Inc., Natick, MA, 2002.
- [284] A.R. McIntosh, S.L. Shah, D.G. Fisher: Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control, *Canadian Journ Chem. Eng.*, 1991, 69, 97-110.
- [285] V. Mehrmann: A step toward a unified treatment of continuous and discrete time control problems, *Linear Algebra Appl.*, 1996, 241-243, 749-779.
- [286] V. Mehrmann, H. Xu: An analysis of the pole placement problem. I. The single-input case, *Electr. Trans. Numer. Anal.*, 1996, 4, 89-105.
- [287] V. Mehrmann, H. Xu: Choosing poles so that the single-input pole placement problem is well-conditioned, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 664-681.
- [288] V. Mehrmann, H. Xu: Numerical methods in control: from pole assignment via linear quadratic to \mathcal{H}_∞ control, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1999, SFB393/99-12. Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [289] D. Megias, J. Serrano, C. De Prada: Uncertainty treatment in GPC: design of T polynomial, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-A-B-1.
- [290] C.D. Meyer: *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [291] R.H. Middleton: Trade-offs in linear control system design, *Automatica*, 1991, 27 (2), 281-192.
- [292] R.H. Middleton: Trade-offs in linear filter design, *Automatica*, 1991, 31 (10), 1367-1376.
- [293] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (11), 1015-1021.
- [294] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: *Digital control and estimation*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [295] L. Mirkin: On discrete-time \mathcal{H}_∞ problem with a strictly proper controller, *Int. Journ. Control*, 1997, 66 (6), 747-765.
- [296] C. Moler, C.F. Van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*, 1978, 20 (4), 801-836.

- [297] M. Morari, E. Zafriou: *Robust process control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [298] K.S. Narandra, A.M. Annaswamy: *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [299] C.P. Neuman: Transformations between delta and forward shift operator transfer function models, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 295-296.
- [300] C.P. Neuman: Properties of the delta operator model of dynamic physical systems, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 296-301.
- [301] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Delta-operator generalized predictive control (DGPC), *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 2224-2225.
- [302] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Application of delta-operator generalised predictive control (DGPC) *Proc. 32th Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2499-2504.
- [303] B.M. Ninness, G.C. Goodwin: The relationship between discrete time and continuous time linear estimation, w N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [304] M.T. Noda, T. Sasaki: Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations, *Journ. Comput. Appl. Math.*, 1991, 38, 335-351.
- [305] J. Nowakowski, P. Suchomski: O specyfikacji dyskretnej transmitancji wzorcowej ukladu regulacji cyfrowej, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 1990, 36 (4), 71-73.
- [306] J. Nowakowski, P. Suchomski: On a method of mapping of continuous-time control SISO systems to their discrete equivalents, *Archives of Control Sciences*, 1992, 37 (3-4), 269-283.
- [307] J. Nowakowski, P. Suchomski: Mapping of continuous-time control SISO systems to their equivalents with stable discrete controllers, *Int. Journ. Systems Science*, 1994, 25 (1), 193-200.
- [308] W. Oettli, W. Prager: Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.*, 1964, 6, 405-409.
- [309] K. Ogata: *Discrete-time control systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [310] M.L. Overton: *Numerical computing with IEEE floating point arithmetic*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

- [311] S.D. O'Young, B.A. Francis: Sensitivity tradeoffs for multivariable plants, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (7), 625-632.
- [312] S.D. O'Young, I. Postlethwaite, D.W. Gu: A treatment of $j\omega$ -axis model-matching transformation zeros in the optimal \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 551-553.
- [313] A. Packard, J.C. Doyle: The complex structured singular value, *Automatica*, 1993, 29 (1) 71-109.
- [314] Z.J. Palmor: Time-delay compensation - Smith predictor and its modifications, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [315] V.J. Pan: Numerical computation of a polynomial GCD and extensions, *INRIA Techn. Report*, 1996, Sophia-Antipolis, France.
- [316] P. Pandey: On scaling an algebraic Riccati equation, *Proc. of the American Control Conf.*, San Francisco, CA, 1993, 1583-1587.
- [317] T. Pappas, A.J. Laub, N.R. Sandell: On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, AC-25 (4), 631-641.
- [318] K.M. Passino, P.J. Antsaklis: Inverse stable low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 47 (6), 1905-1913.
- [319] R.V. Patel, A.J. Laub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra techniques for systems and control*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993.
- [320] R.A. Paz, J.V. Madanić: \mathcal{H}_∞ control in discrete time: state feedback control and norm bounds, *Int. Journ. Control*, 1992, 55 (2), 1405-1424.
- [321] J.M. Peña: On the Skeel condition number, growth factor and pivoting strategies for Gaussian elimination, *Proc. SIAM Conf. Applied Linear Algebra*, Williamsburg, VA, 2003, CP2, <http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings/penaj.pdf>.
- [322] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M. Konstantinov: On the numerical properties of the Schur approach for solving the matrix Riccati equation, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (2) 197-201.
- [323] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M. Konstantinov: *Computational methods for linear control systems*, Prentice Hall International, New York, London, 1991.
- [324] P.H. Petkov, D.W. Gu, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: Condition and error estimates in the solution of Lyapunov and Riccati equations, *NICONET Report*, 2000, 1, Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [325] P.H. Petkov, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: DGRSVX and DMSRIC: Fortran 77 subroutines for solving continuous-time matrix algebraic Riccati equations with condition and accuracy estimates, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1998, SFB393/98-16, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

- [326] A.W. Pike, M.J. Grimble, M.A. Johnson, A.W. Ordys, S. Shakoor: Predictive control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [327] H.V. Poor: Delta-operator based signal processing: fast algorithms for rapidly sampled data, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 872-877.
- [328] K. Premaratne, R. Salvi, N.R. Habib, J.P. LeGall: Delta-operator formulated discrete-time approximations of continuous-time systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, AC-39 (3), 581-585.
- [329] A.C. Pugh, L. Tan: A generalized chain-scattering representation and its algebraic system properties, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, AC-45 (5), 1002-1007.
- [330] K.R. Ralev, P.H. Bauer: Limit cycles elimination in delta-operator systems, *IEEE Trans. Circuits Systems, I*, 2000, CAS-47 (5), 769-772.
- [331] A.C.M. Ran, R. Vreugdenhill: Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems, *Linear Algebra Appl.*, 1988, 99, 63-83.
- [332] G. P. Rao, N.K. Sinha: Continuous-time models and approaches, w N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [333] K.S. Rattan: Digitalization of existing continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, AC-29 (3), 282-285.
- [334] K.S. Rattan: Compensating for computational delay in digital equivalent of continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, AC-34 (8), 895-899.
- [335] J. Rice: A theory of condition, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1966, 3 (2), 287-310.
- [336] J.L. Rigal, J.Gaches: On the compatibility of a given solution with the data of a linear system, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1967, 14 (3), 543-548.
- [337] B.D. Robinson, D.W. Clarke: Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1991, 138 (1) 2-8.
- [338] J.A. Romagnoli, M.N. Karim, O.E. Agamennoni, A. Desages: Controller design for model-plant parameter mismatch, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (2), 157-164.
- [339] E. Ronco, T. Arsan, P.J. Gawthrop: Open-loop intermittent feedback control: Practical continuous-time GPC, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 426-434.

- [340] J.A. Rossiter, L. Chisci, A. Lombardi: Stabilizing predictive control algorithms in the presence of common factors, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Th-E-B-5.
- [341] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen: A state-space approach to the emulator-based GPC design, *Systems and Control Letters*, 1996, 28, 291-301.
- [342] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen, O. Ravn: ML estimation using delta based state space models, *Proc. of the 1994 SYSID Conference*, Copenhagen, Denmark, 1994, 3, 655-661.
- [343] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: General predictive control using the delta operator, *Proc. 32nd Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2, 1769-1774.
- [344] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: A rapprochement between discrete-time operators, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993, 1, 426-431.
- [345] S.M. Rump: Structured perturbations. Part I: normwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 1-30.
- [346] S.M. Rump: Structured perturbations. Part II: componentwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 31-56.
- [347] A. Saberi, B.M. Chen, P. Sannuti: *Loop Transfer Recovery: analysis and design*, Springer Verlag, London, Berlin, 1993.
- [348] A. Saberi, P. Sannuti, B.M. Chen: *\mathcal{H}_2 optimal control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [349] A. Sage, J. Melsa: *Estimation theory with applications to communications and control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- [350] M.G. Safonov: Imaginary-axis zeros in multivariable \mathcal{H}_∞ -optimal control, w R.F. Curtain (Ed.): *Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*, NATO ASI Series, 34, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [351] M. Salgado, R. Middleton, G.C. Goodwin: Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1988, 135 (1), 28-34.
- [352] C. Scherer: \mathcal{H}_∞ -control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 123-142.
- [353] C. Scherer: \mathcal{H}_∞ -optimization without assumption on finite or infinite zeros, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 143-166.
- [354] A. Schönhage: Quasi-GCD computations, *Journ. Complexity*, 1985, 1, 118-137.
- [355] Z. Schuss: *Theory and applications of stochastic differential equations*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1980.

- [356] J. Sefton, K. Glover: Pole/zero cancellations in the general \mathcal{H}_∞ problem with reference to a two-block design, *Systems and Control Letters*, 1990, 14 (3), 295-306.
- [357] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin: *Fundamental limitations in filtering and control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [358] A. Shapiro: Optimally scaled matrices, necessary and sufficient conditions, *Numer. Math.*, 1982, 39 (2), 239-245.
- [359] A. Shapiro: Optimal block diagonal l_2 -scaling of matrices, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1985, 22 (1), 81-94.
- [360] J. Shi, M.J. Gibbard: Discrete systems' models based on simple performance specifications in the time, frequency or complex z -domains, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (2), 517-527.
- [361] V. Sima, P. Petkov, S. Van Huffel: Efficient and reliable algorithms for condition estimation of Lyapunov and Riccati equations, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, MTNS-2000*, Perpignan, France, June 19-23, 2000, (CD-ROM).
- [362] R.D. Skeel: Scaling for numerical stability in Gaussian elimination, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1979, 26 (3), 493-526.
- [363] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable feedback control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1996.
- [364] O.J.M. Smith: A controller to overcome dead time, *ISA Journ.* 1959, 6 (2), 28-33.
- [365] K. Sobczyk: *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers Group, London, Dordrecht, 1991.
- [366] T. Söderström: Convergence properties of the generalized least squares identification method, *Automatica*, 1974, 10 (6), 617-626.
- [367] T. Söderström: Test of pole-zero cancellation in estimated models, *Automatica*, 1975, 11 (5), 537-541.
- [368] T. Söderström: On zero locations for sampled stochastic systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1249-1253.
- [369] T. Söderström, H. Fan, B. Carlson, M. Mossberg: Some approaches on how to use the delta operator when identifying continuous-time processes, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 890-895.
- [370] T. Söderström, P. Stoica: *System identification*, Prentice Hall International, Hemel Hemstead, U.K., 1989.
- [371] R. Soeterboek: *Predictive control, a unified approach*, Prentice Hall International, New York, London, 1992.

- [372] T. Song: Robust control and estimation for discrete-time systems with applications to finite word length design and robust detection, *Ph.D. Thesis*, FAMU-FSU College of Engineering, The Florida State University, 1999.
- [373] E. Soroka, U. Shaked: On the robustness of LQ regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (7), 664-665.
- [374] E. Soroka, U. Shaked: On the stability robustness of the continuous-time LQG optimal control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (10), 1039-1043.
- [375] V. Sreeram, P. Agathoklis: Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1991, 138 (6), 529-534.
- [376] W. Stadler: A survey of multicriteria optimization of the vector maximum problem, *Journ. Optimization Theory Appl.*, 1979, 29 (1), 1-52.
- [377] G. Stein, M. Athans: The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 105-114.
- [378] G.W. Stewart: Perturbation theory for the singular value decomposition, *UMIACS - Techn. Report*, 1990, TR-90-124.
- [379] G.W. Stewart: Updating a rank revealing ULV decomposition, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1993, 14 (2), 494-499.
- [380] G.W. Stewart: Determining rank in the presence of error, w M.S. Moonen, G.H. Golub, B.L.R. DeMoor (Eds.): *Linear algebra for large scale and real-time applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [381] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. I: basic decompositions*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [382] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. II: eigensystems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [383] G.W. Stewart, J. Sun: *Matrix perturbation theory*, Academic Press, London, 1990.
- [384] P. Stoica, T. Söderström: Common factor detection and estimation, *Uppsala Univ. Techn. Report*, Systems Control Group, Dept. Technology, Uppsala, Sweden, 1996.
- [385] A. Stoorvogel: *The \mathcal{H}_∞ control problem. A state space approach*, Prentice Hall, Inc., New York, 1992.
- [386] A. Stoorvogel: The discrete time \mathcal{H}_∞ control problem with measurement feedback, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 182-202.
- [387] A. Stoorvogel, A. Saberi: The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 274, 317-365.

- [388] A. Stoorvogel, A. Saberi, B.M. Chen: The discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem with strictly proper measurement feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, 39 (9), 1936-1939.
- [389] P. Suchomski: Weighted mixed sensitivity synthesis in \mathcal{H}_∞ by J -lossless coprime factorisation, *Proc. XVII-th National Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica-Zdrój, Poland, 1994, 131-136.
- [390] P. Suchomski: J -lossless coprime factorisation approach to weighted mixed sensitivity suboptimal synthesis in \mathcal{H}_∞ , *Proc. 2nd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'95*, Międzyzdroje, Poland, 1995, 1, 211-216.
- [391] P. Suchomski: An approach to suboptimal \mathcal{H}_∞ control via J -lossless coprime factorisation, *Proc. 3rd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96*, Międzyzdroje, Poland, 1996, 2, 401-406.
- [392] P. Suchomski: A recursive method for model order reduction of discrete-time systems via q -Markov covariance equivalent realisations, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 1996, 23 (1/2), 127-135.
- [393] P. Suchomski: Structural properties of solutions of continuous-time and discrete-time matrix Lyapunov equations in controllable form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1999, 146 (5), 477-483.
- [394] P. Suchomski: Stability robustness bounds for LQG continuous-time control systems with unstructured uncertainties, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2000, 36 (3), 401-440.
- [395] P. Suchomski: Robust PI and PID controller design in delta domain, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (5), 350-354.
- [396] P. Suchomski: A J -lossless factorisation approach to \mathcal{H}_∞ control in delta domain, *Proc. 6th European Control Conf. ECC'01*, Porto, Portugal, 2001, FR-IS01-18, 3422-3427.
- [397] P. Suchomski: Numerical conditioning of delta-domain Lyapunov and Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (6), 497-501.
- [398] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: phase advance and phase lag controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2001, 41 (3), 503-549.
- [399] P. Suchomski: Conditioning of J -lossless factorisations for \mathcal{H}_∞ -control in delta domain, *Proc. 7th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2001*, Międzyzdroje, 2001, 211-216.
- [400] P. Suchomski: A J -lossless coprime factorisation approach to \mathcal{H}_∞ control in delta domain, *Automatica*, 2002, 38 (10), 1807-1814.
- [401] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: PI and PID controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2002, 42 (1), 49-69.

- [402] P. Suchomski: A dual J -lossless factorisations for suboptimal \mathcal{H}_∞ estimation in delta domain, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-Fr-M05-4.
- [403] P. Suchomski: Numerically robust delta-domain solutions to discrete-time Lyapunov equations, *Systems and Control Letters*, 2002, 47 (4), 319-326.
- [404] P. Suchomski: J -lossless and extended J -lossless factorisations approach for δ -domain \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Control*, 2003, 76 (8), 794-809.
- [405] P. Suchomski: Robust pole placement in delta domain for SISO plants, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 483-512.
- [406] P. Suchomski: J -lossless factorisations for robust \mathcal{H}_∞ -control in delta-domain, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 525-555.
- [407] P. Suchomski: Numerically reliable \mathcal{H}_∞ -synthesis of estimators based on J -lossless factorisations, *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification SYSID*, Rotterdam, the Netherlands, 2003, 1072-1077.
- [408] P. Suchomski: Remarks about numerical conditioning of discrete-time Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2003, 149 (5), 449-456.
- [409] P. Suchomski: Numerically robust synthesis of discrete-time \mathcal{H}_∞ estimators based on J -lossless factorisations, *Control and Cybernetics*, 2003, 32 (4), 761-802.
- [410] P. Suchomski: Structural properties of discrete-time \mathcal{H}_∞ solutions based on J -lossless factorisations, artykuł zgłoszony do *Systems and Control Letters*, 2004.
- [411] P. Suchomski: Robust adaptive pole placement in \mathcal{H}_∞ , *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*, Katholieke Univ., Leuven, Belgium, MA4.5, July 5-9, 2004, (CD-ROM).
- [412] P. Suchomski: Numerically robust solutions to \mathcal{H}_∞ control problems for augmented plants, artykuł zgłoszony do *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2004.
- [413] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Markov-equivalent continuous-time GPC design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-M-B-1.
- [414] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Robust performance and stability of control systems - A unifying survey, *Proc. 4th Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'97*, Międzyzdroje, 1997, 1, 187-194.
- [415] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: GPC tuning conditioning, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 249-254.
- [416] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Analytical stable CGPC design for minimum-phase systems, *Int. Journ. Control*, 2000, 73 (17), 1605-1620.

- [417] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Analytical design of stable delta-domain generalized predictive control, *Int. Journ. Optimal Control Appl. and Methods*, 2002, 23, 239-273.
- [418] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Pre-arrangement of solvability, complexity, stability and quality of GPC systems, *Int. Journ. Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16, 177-191.
- [419] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Robust \mathcal{H}_∞ -optimal synthesis of FDI systems, w J. Korbicz, J.M. Kościelny, Z Kowalczyk, W. Cholewa (Eds.): *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 261-298.
- [420] T. Sugie, S. Hara: \mathcal{H}_∞ -suboptimal control problem with boundary constraints, *Systems and Control Letters*, 1989, 13 (1), 93-99.
- [421] J.G. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear LS problem with multiple right-hand sides, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1996, 16 (1), 1-11.
- [422] J.G. Sun: Perturbation theory for algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (1), 39-65.
- [423] J.G. Sun: Condition numbers of algebraic Riccati equations in the Frobenius norm, *Linear Algebra Appl.*, 2002, 350, 237-261.
- [424] H.K. Sung, S. Hara: Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input single-output digital control systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (6), 2429-2439.
- [425] Y. Sung, M. Kung: Lower finite word-length effect on state space digital filter by δ operator realisation, *Int. Journ. Electron.*, 1993, 75 (6), 1135-1141.
- [426] Z. Świder: *Realizacje cyfrowe algorytmów sterowania i filtracji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2003.
- [427] D. Tabak: Digitalization of control systems, *Computer Aided Design*, 1971, 3 (2), 13-18.
- [428] M. Tahk, J.L. Speyer: Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 793-801.
- [429] K. Takaba, T. Katayama: Discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation and parametrization of \mathcal{H}_∞ filters, *Int. Journ. Control*, 1996, 64 (6), 1129-1149.
- [430] L. Tan, A.C. Pugh: Non-standard \mathcal{H}_∞ control problem: a generalized chain-scattering representation approach, *Int. Journ. Control*, 2002, 75 (11), 775-783.
- [431] A. Tesfaye, M. Tomizuka: Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (4), 743-747.

- [432] M.C. Tsai, I. Postlethwaite: On J -lossless co-prime factorizations and \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1991, 1 (1), 47-68.
- [433] M.C. Tsai, C.S. Tsai: Formulation of the \mathcal{H}_∞ control problem by using chain scattering matrix description, *Proc. of the American Control Conf.*, Chicago, 1992, 1870-1871.
- [434] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A chain scattering-matrix description approach to \mathcal{H}_∞ control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (9), 1416-1421.
- [435] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A transfer matrix framework approach to the synthesis of \mathcal{H}_∞ controllers, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1995, 5 (2), 155-173.
- [436] M.C. Tsai, C.S. Tsai, Y.Y. Sun: On discrete-time \mathcal{H}_∞ control: a J -lossless coprime factorization approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (7), 1143-1147.
- [437] H. Unbehauen, B. Göhring: Tests for determining model order in parameter estimation, *Automatica*, 1974, 10 (3), 233-244.
- [438] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Constrained predictive control using a time varying Youla parameter: a state space approach, *Proc. 3rd European Control Conf., ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3235-3240.
- [439] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Robust predictive control using a time varying Youla parameter, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 101-128.
- [440] Van der Sluis: Condition numbers and equilibration of matrices, *Numer. Math.*, 1969, 14 (1), 14-23.
- [441] Van der Sluis: Condition, equilibration and pivoting in linear algebraic systems, *Numer. Math.*, 1970, 15 (1), 74-86.
- [442] Van der Sluis: Stability of the solutions of linear least squares problems, *Numer. Math.*, 1975, 23 (3), 241-254.
- [443] P.M. Van Dooren: The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil, *Linear Algebra Appl.*, 1979, 27, 103-141.
- [444] P.M. Van Dooren: A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equations, *SIAM Journ. Sci. Stat. Comput.*, 1981, 2 (2), 121-135.
- [445] P.M. Van Dooren: The generalized eigenstructure problem in linear system theory, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26, 1, 111-129.
- [446] P.M. Van Dooren: Structured linear algebra problems in digital signal processing, w G.H. Golub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra, digital signal processing and parallel algorithms*, NATO ASI Series, 70, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [447] P.M. Van Dooren: The basic developing numerical algorithms, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 18-27.

- [448] S. Van Huffel, V. Sima, A. Varga, S. Hammarling, F. Delebecque: High-performance numerical software for control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 60-76.
- [449] C.F. Van Loan: Computing integrals involving the matrix exponential, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (3), 395-404.
- [450] A. Varga: Computation of Kronecker-like forms of a system pencil: applications, algorithms and software, *Proc. IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control System Design, CACSD96*, Dearborn, MI, 1996, 77-82.
- [451] A. Varga: Numerical awareness in control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 14-17.
- [452] M. Vidyasagar: *Control system synthesis - A Factorisation approach*, MIT Press, Cambridge, MA., 1985.
- [453] M. Vidyasagar, H. Schneider, B.A. Francis: Algebraic and topological aspects of feedback stabilization, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, AC-27 (4), 880-894.
- [454] B. Waldén, R. Karlson, J. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear least squares problem, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1996, 2 (3), 271-286.
- [455] B. Wahlberg: Limit results for sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (3), 1267-1283.
- [456] B. Wahlberg: The effects of rapid sampling in system identification, *Automatica*, 1990, 26 (1), 167-170.
- [457] D.J. Walker: Relationship between three discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation solutions, *Int. Journ. Control*, 1990, 52 (4), 801-809.
- [458] Z.Q. Wang, S. Skogestad: Robust control of time-delay systems using the Smith predictor, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1405-1420.
- [459] R.C. Ward: Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1977, 14 (3), 600-610.
- [460] G.A. Watson: An algorithm for optimal l_2 scaling of matrices, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1991, 11 (4), 481-492.
- [461] P. Wedin: Perturbation theory for pseudo-inverses, *BIT*, 1973, 13 (2), 217-232.
- [462] M. Wei; Perturbation of the least squares problem, *Linear Algebra Appl.*, 1990, 141, 177-182.
- [463] A. Weinmann: *Uncertain models and robust control*, Springer Verlag, Wien, 1991.

- [464] S.R. Weller: Comments on 'Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis', *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, AC-43 (9), 1308-1310.
- [465] S.R. Weller, R.H. Middleton: On the role of sampling zeros in robust sampled-data control design, *Techn. Report Dept. Electrical and Computer Eng.*, EE9807, University of Newcastle, Australia, 1998.
- [466] P.E. Wellstead, M.B. Zarrop: *Self-tuning systems*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1991.
- [467] O.P. Whittle: *Optimal control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1996.
- [468] M. Wicks, R.A. DeCarlo: Computing the distance to an uncontrollable system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (1), 39-49.
- [469] J.H. Wilkinson: *Rounding errors in algebraic processes*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [470] J.H. Wilkinson: *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.
- [471] D. Williamson: *Digital control and implementation, finite wordlength considerations*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [472] J.L. Willems, F.M. Gallier: The infinite horizon and the receding horizon LQ-problems with partial stabilization constraints, w S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [473] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: Shift and delta operator realisations for digital controllers with finite word length considerations, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 2000, 147 (6), 664-672.
- [474] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: An improved closed-loop stability measures for finite-precision digital controller realizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2001, AC-46 (7), 1162-1166.
- [475] J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne, S. Chen, J. Hu: Stability issues of finite precision controller structures using the delta operator for sampled data systems, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 9d-02-3, Q, 417-422.
- [476] C.S. Xiao, Z.M. Feng, X.M. Shan: On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (3), 286-290
- [477] X. Xin, T. Mita: Inner-outer factorization for non-square proper functions with infinite and finite $j\omega$ -axis zeros, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (1), 145-161.

- [478] I. Yaesh, U. Shaked: A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞ -linear control and filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, 36 (11), 1264-1271.
- [479] T.W. Yoon, D.W. Clarke: Observer design in receding-horizon control, *Int. Journ. Control*, 1985, 61 (1), 171-191.
- [480] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, H.A. Jabr: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part I: the single-input case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (1), 3-14.
- [481] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part II: the multivariable case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (2), 319-338.
- [482] E. Zafriou, M. Morari: Digital controllers for SISO systems: a review and a new algorithm, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (4), 855-876.
- [483] G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximation inverses, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (2) 301-320.
- [484] G. Zames, B.A. Francis: Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1983, AC-28 (5), 585-601.
- [485] J. Zhang: Property analysis of GPC based coefficient mapping, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, C, 457-462.
- [486] K. Zhou, J.C. Doyle: *Essentials of robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1998.
- [487] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1996.

Sterowanie odporne polega na zapewnieniu układowi sterowania wymaganej stabilności oraz jakości w warunkach występowania niepewności w modelu sterowanego obiektu dynamicznego. Przedmiotem pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym obiektami czasu ciągłego. Skupiono się na algorytmach wynikających z metod przestrzeni H_∞ . Wskazano na znaczenie analizy uwarunkowania zadania syntezy (optymalizacji) sterowania oraz na rolę oceny numerycznych błędów proponowanych algorytmów. Omówiono sposoby polepszania uwarunkowania poprzez zastosowanie modelowania opartego na operatorze *delta*.

W pracy wykazano przydatność łańcuchowych macierzy rozproszenia modelowanego obiektu, udowodniono szereg twierdzeń odnoszących się do J -bezstratnych faktoryzacji takich macierzy, a także omówiono strukturę algorytmów sterowania optymalnych ze względu na normę H_∞ .

Teoretyczne rozważania zilustrowano numerycznymi przykładami dotyczącymi zadań odpornego sterowania oraz estymacji stanu. Przykłady te obejmują między innymi: metodę rozmieszczania biegunów, sterowanie predykcyjne, a także sterowanie optymalne ze względu na kwadratowy wskaźnik jakości oraz ze względu na normę H_∞ .

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-94-4

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl**