POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

ZARZĄDZANIE RYZYKIEM INWESTYCYJNYM

wybrane zagadnienia

Maciej Krawczak,
Antoni Miklewski,
Andrzej Jakubowski,
Piotr Konieczny

ZARZĄDZANIE RYZYKIEM INWESTYCYJNYM

wybrane zagadnienia

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Bogdan KRAWIEC
Doc. dr hab. Leszek ZAREMBA

Publikacja finansowana przez
KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu badawczego Nr 1 1H02D 003 14 nt. „Zarządzanie ryzykiem cenowym banku: krótkoterminowe prognozy cen rynkowych"

ISBN 83-85847-52-9
ISSN 0208-8029

CZĘŚĆ III.

OCENA RYZYKA INWESTYCYJNEGO - METODA VALUE AT RISK (VAR)

Spis treści rozdziału:

1. WSTĘP

Koncepcja pomiaru ryzyka cenowego, a w tym ryzyka stopy procentowej, w oparciu o miarę *VaR* (Dowd, 1998) jest stosunkowo młoda. Po raz pierwszy została ona zastosowana przez instytucje finansowe w końcu lat 80-tych dla celów pomiaru ryzyka ich portfeli handlowych. Od tego czasu rozwój tej metody nabrał bardzo dużej dynamiki, szybki był również wzrost liczby jej użytkowników. W 1994r. bank inwestycyjny J.P. Morgan upowszechnił standard RiskMetrics™, który bardzo szybko przyjął się na rynkach finansowych (*RiskMetrics,* 1996).

Dynamika rozwoju, oraz powszechność stosowania zainteresowała instytucje nadzoru bankowego. W kwietniu 1995r., Komitet Bazylejski zaproponował możliwość zastosowania wewnętrznych modeli opartych na *VaR* dla celów wyliczania adekwatności kapitałowej (*RiskMetrics,* 1996).

Propozycja została przyjęta w Stanach Zjednoczonych w czerwcu 1995r, natomiast w krajach Unii Europejskiej w 1996r.

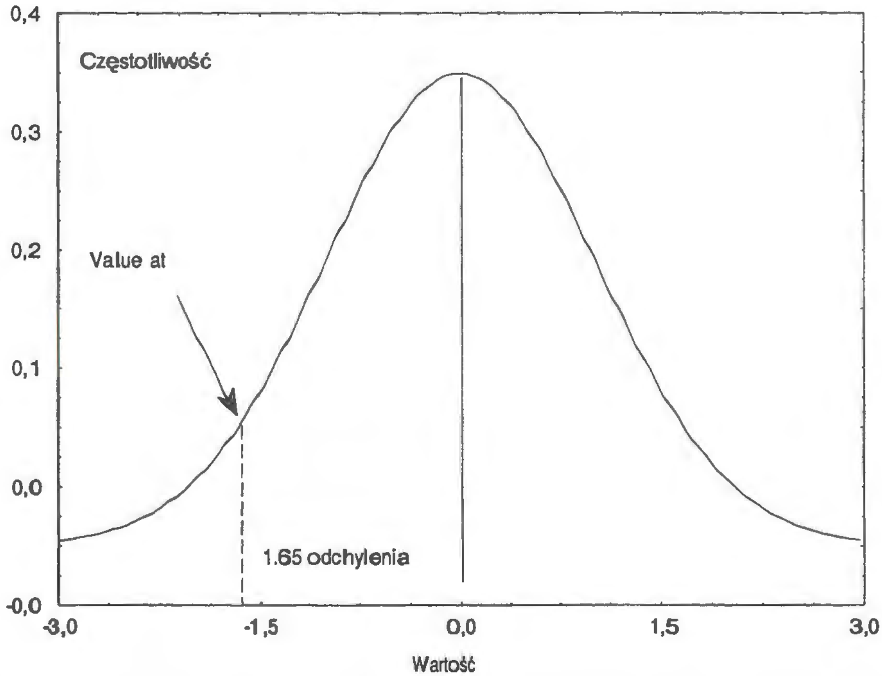
2. WPROWADZENIE DO METODY VAR

Nazwa metody pomiaru ryzyka rynkowego *VaR* pochodzi od angielskich słów *Value at Risk* oznaczających wartość narażoną na ryzyko. Wykorzystuje ona standardowe techniki statystyczne do określenia największej oczekiwanej straty w określonym horyzoncie czasu, przy założeniu normalnych warunków rynkowych (*tj., braku zdarzeń losowych typu katastrofy, wybuchy konfliktów zbrojnych itp.*), przy z góry założonym poziomie prawdopodobieństwa. Na rysunku 1 przedstawiono graficzną interpretację miary *VaR.*

Metoda pomiary *VaR* wykorzystywana jest w wielu sferach zarządzania ryzykiem rynkowym banku, w tym stopy procentowej, między innymi w:

a) procesie raportowania ryzyka rynkowego - wykorzystywana jest dla celów informowania zarządów o ekspozycji banku na ryzyko rynkowe podejmowanych przez instytucje działań, stanowi podstawę oceny sytuacji oraz podejmowania działań inwestycyjnych,
b) alokacji zasobów - umożliwia określanie limitów pozycji, a przez to pozwala na alokacje ograniczonych zasobów kapitałowych,

c) oceny efektywności - pozwala na dokonywanie korekt efektywności poszczególnych jednostek organizacyjnych banku o czynnik ponoszonego ryzyka.



Rysunek 1. Graficzna interpretacja miary Value at Risk dla 95% poziomu prawdopodobieństwa oraz założonego normalnego rozkładu wartości (źródło: obliczenia własne).

Pierwszym krokiem w kierunku wyznaczenia wartości *VaR* jest podjęcie decyzji co do dwóch ilościowych czynników: horyzontu czasu, dla którego szacować będziemy *VaR* oraz poziomu prawdopodobieństwa. Obydwa wymienione czynniki są ustalane arbitralnie oraz dostosowywane do potrzeb użytkownika.

Przykładowo, Komitet Bazylejski w swoich rekomendacjach (*Amendment to* ..., 1996) stosuje 10 dniowy horyzont czasowy przy poziomie prawdopodobieństwa 99%. Otrzymana wartość VaR jest następnie mnożona przez 3 w celu uzyskania minimalnego poziomu kapitału alokowanego na zabezpieczenie oszacowanego ryzyka. Zastosowanie mnożnika ma na celu ograniczenie błędów wynikających z błędnej specyfikacji rodzaju rozkładu zmian czynników ryzyka.

W celu oszacowania konsekwencji złamania założenia o normalności rozkładu oszacujemy górną granicę dla 99% odsetka arbitralnego rozkładu F posiadającego skończoną wariancję przy zastosowaniu nierówności Czybyszewa (Smirnow, 1993):

$$P(|X-\mu|>k\sigma)\le\frac{1}{k^2} \tag{1}$$

gdzie
μ - wartość średnia X
σ - odchylenie standardowe
P(.) - prawdopodobieństwo.

Z nierówności (1) wynika, że prawdopodobieństwo tego, że przyszła realizacja X taka, że X znajdzie się poza przedziałem $\langle-\infty,\mu+k\sigma\rangle$ wynosi co najwyżej $\frac{1}{k^2}$.

Rozważmy zdarzenie przeciwne, tj. takie kiedy X przyjmie wartość z przedziału $\langle-\infty,\mu+k\sigma\rangle$. Otrzymamy górną granicę prawdopodobieństwa w postaci (1 - $\frac{1}{k^2}$). Zakładając, że $\mu=0$ otrzymamy

$$F^{-1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\le k\sigma\ . \tag{2}$$

Podstawiając do (2) (1 - $\frac{1}{k^2}$) = 0.99 daje wartość k = 10.

Wyznaczona wartość VaR dla arbitralnego rozkładu F jest równa:

$$VaR = F^{-1}(0.99)\delta V_M\sqrt{T}\ , \tag{3}$$

gdzie
δ - parametr wrażliwości.

Podstawiając nierówność (2) do $F^{-1}(0.99)$ otrzymamy szacunek górnej granicy dla wskaźnika

$$\frac{VaR_F}{VaR_\Theta}=\frac{F^{-1}(0.99)}{\sigma\Theta^{-1}(0.99)}\le\frac{10\sigma}{2.33\sigma}=4.29 \tag{4}$$

Czynnik skalujący 4.29 prawdziwy jest dla dowolnego rodzaju rozkładu F posiadającego skończoną wariancję. Wskaźnik (4) jest monotoniczną funkcją dla danego poziomu ufności. Wartość 4.29 jest górna granicą dla 1% poziomu ufności, natomiast 2.72 stanowi górną granicę dla poziomu 5%. Na podstawie przeprowadzonych szacunków, można zauważyć, że czynnik skalujący 3 zastosowany przez Komitet Bazylejski stanowi kompromis dla akceptowalnych poziomów ufności.

Komitet Bazylejski zastosował 10-dniowy horyzont czasu jako kompromis pomiędzy koniecznością dokonywania pomiarów a możliwością identyfikacji nadchodzących zagrożeń. Jednakże z punktu widzenia użytkownika metody długość przyjętego horyzontu związana jest z charakterem portfela będącego przedmiotem badania. Banki komercyjne z reguły raportują swoje szacunki *VaR* dziennie. Podmioty o wydłużonych horyzontach inwestycyjnych, np. fundusze emerytalne, szacują swoje wielkości *VaR* w okresach miesięcznych. Teoretycznie okres przyjęty do pomiaru ryzyka powinien być równy najdłuższemu okresowi czasu potrzebnego do likwidacji pozycji generującej ryzyko, inaczej mówiąc okres przyjęty do pomiaru powinien korelować ze stopniem płynności instrumentów znajdujących się w portfelu.

Wybór poziomu prawdopodobieństwa jest natomiast znacznie trudniejszy do uzasadnienia. Użytkownicy stosują bardzo różne jego wartości, przykładowo: Bankers Trust 99%, Chemical and Chase 97,5%, Citibank 95,4%, Bank of America i J.P. Morgan 95%. Waga przyjętego poziomu prawdopodobieństwa uzależniona jest od celów dla których szacowana jest wartość *VaR*. W przypadku kiedy oszacowana wartość stanowi podstawę alokacji kapitału to przyjęty jego poziom wyraża stopień awersji do ryzyka danej instytucji. Wyższa wartość poziomu istotności, wyższa wartość *VaR*, wyższa awersja użytkownika na ponoszone ryzyko. W sytuacji gdy metoda stosowana jest dla celów porównywania ryzyka różnych portfeli to uzasadnionym jest wybieranie wyższych wartości poziomu istotności zapewniających uzyskanie pomiaru, którego prawdopodobieństwo przekroczenia jest niewielkie.

Jakkolwiek wybór wartości tego parametru jest arbitralny oraz uzależniony od założonego celu to jego skutki mają istotny wpływ na możliwości kalibracji zastosowanego modelu. Przykładowo decyzja o 95% poziomie istotności oznacza, iż możemy oczekiwać straty większej od *VaR* raz na 20 miesięcy. Wybór 99% poziomu istotności natomiast zmusi nas do czekania 100 miesięcy w celu weryfikacji przyjętych parametrów. Z uwagi na konieczność dokonywania częstych weryfikacji otrzymywanych wyników, użytkownik powinien wybrać taki poziom istotności, który pozwoli mu na sprawne przeprowadzanie procesu testowania.

W literaturze przedmiotu (Dowd, 1998) najczęściej stosowane są trzy różne podejścia do wyznaczania wartości VaR:

a) metoda wariacyjno-kowariacyjna, parametryczna,
b) metoda historycznej symulacji,
c) metoda Monte Carlo.

W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione wyżej wymienione trzy metody szacowania VaR, zarówno na poziomie pojedynczego instrumentu finansowego jak i na poziomie portfela.

3. Metoda wariacyjno-kowariacyjna

W celu wyznaczenia wartości *VaR* dla danego instrumentu finansowego, oznaczmy przez W_0 początkową jego wartość, a przez R jego stopę zwrotu. Wartość instrumentu finansowego na końcu założonego okresu czasu równa jest

$$W = W_0(1+R) \tag{5}$$

Oznaczmy przez W^* najniższą możliwą wartość instrumentu finansowego przy założonym poziomie istotności. Wartość *VaR* wyznaczamy jako stratę wyrażoną w jednostkach pieniężnych w relacji do średniej wartości instrumentu:

$$VaR = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu), \tag{6}$$

gdzie:
μ - oczekiwana stopa zwrotu.

Czasami VaR wyznaczane jest w relacji nie do wartości średniej, a w stosunku do zera lub jest prezentowane samodzielnie.

$$VaR = W_0 - W^* = -W_0 R^*\ . \tag{7}$$

Jednakże w obu przypadkach wyznaczanie wartości *VaR* sprowadza się do identyfikacji najmniejszej wartości W^* lub R^*.

W najbardziej ogólnej formie wartość *VaR* można wyznaczyć z funkcji rozkładu prawdopodobieństwa przyszłych wartości instrumentu finansowego f(w). Przy założonym poziomie istotności c, pragniemy wyznaczyć najgorszą realizację W^* tak aby prawdopodobieństwo przekroczenia tej wartości wynosiło c:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw. \tag{8}$$

lub żeby prawdopodobieństwo osiągnięcia wartości mniejszej od W^*, $p = P(w \leq W^*)$, równe było 1-c:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \leq W^*) = p. \tag{9}$$

Szacowanie wartości *VaR* może zostać bardzo uproszczone jeżeli można przyjąć założenie o normalności rozkładu przyszłych wartości W. W takiej sytuacji wartość *VaR* wyznaczyć można bezpośrednio z oszacowanej wariancji zwrotów z instrumentu finansowego skorygowanej o czynnik wynikający z przyjętego poziomu prawdopodobieństwa. Podejście to określane jest parametryczną metodą *VaR*, gdyż bazuje ono na estymacji parametru σ.

W pierwszym kroku tej metody musimy przekształcić funkcję rozkładu prawdopodobieństwa f(w) na standardową funkcję rozkładu normalnego $\Phi(\varepsilon)$ o nadziei matematycznej równej zero oraz jednostkowej wariancji. Wartość W^* skorelowana jest z wartością R^* tak, że:

$$W^* = W_0(1 + R^*). \tag{10}$$

W ogólnym przypadku wartość R^* jest negatywna wobec czego można ją zapisać inaczej jako $-|R^*|$. Standaryzując R^* na rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ otrzymamy:

$$-\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma}. \tag{11}$$

Podstawiając (11) do (12) otrzymamy:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-|R^*|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon. \tag{12}$$

Z równania (12) wynika, iż w celu wyznaczenia wartości *VaR* wystarczy znaleźć wartość α. Dla wybranego poziomu istotności c odczytujemy z tablic rozkładu normalnego wartość α, a następnie na podstawie (11) wyznaczamy R^*:

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu . \qquad (13)$$

Załóżmy dalej, iż parametry μ i σ wyrażone są w horyzoncie rocznym, a przyjęty okres do pomiaru *VaR* wynosi Δt lat. Otrzymujemy wówczas:

$$VaR = -W_0\left(R^* - \mu\right) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} , \qquad (14)$$

lub

$$VaR = -W_0R^* = W_0\left(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t\right). \qquad (15)$$

Parametryczna metoda wyznaczania *VaR* jest możliwa do zastosowania dla innych niż normalny rozkładów, w których całkowite ryzyko może zostać wyrażone w postaci parametru σ.

Sposób wyznaczania wartości *VaR* dla pojedynczego instrumentu finansowego metodą wariacyjno-kowariacyjną prześledzimy na dwóch przykładach:

1. kontraktu terminowego na kurs walutowy zaliczanego do klasy najprostszych instrumentów pochodnych, których wartość *VaR* charakteryzuje się relacjami liniowymi,
2. kontraktu opcyjnego, którego wartość *VaR* charakteryzuje się nieliniowymi związkami z czynnikami generującymi ryzyko.

Dodatkowo w przykładzie 3 zostanie przedstawiona wpływ dwóch charakterystycznych własność instrumentów dyskontowych na szacowanie wartości VaR metodą parametryczną.

3.1. Wyznaczenie wartości VaR dla kontraktu terminowego na kurs walutowy

W celu wyznaczenia wartości *VaR* dla kontraktu terminowego musimy najpierw zapisać funkcję określającą wartość kontraktu w czasie t:

$$f_t = S_t e^{-y\tau} - Ke^{-r\tau} , \qquad (16)$$

gdzie:

f_t – bieżąca wartość kontraktu terminowego,
S_t – kurs walutowy w transakcji natychmiastowej,
K – kurs terminowy zawarty w kontrakcie,
r – wolna od ryzyka stopa zwrotu,
y – stopa zwrotu na aktywie,
τ – czas do wygaśnięcia kontraktu.

Ryzyko otwartej pozycji w kontrakcie forward może zostać oszacowane poprzez zróżniczkowanie równania (16) w stosunku do zawartych w równaniu źródeł ryzyka, tj. kursu natychmiastowego, stopy procentowej oraz stopy zwrotu z aktywów:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial y}dy = e^{-y\tau}dS + Ke^{-r\tau}\tau dr - Se^{-y\tau}\tau dy. \qquad (17)$$

Równanie (17) obrazuje sposób w jaki można dokonać dekompozycji instrumentu finansowego na elementy składowe. Proces ten jest pierwszym krokiem pozwalającym na oszacowanie wartości *VaR*. Kolejnym etapem jest rekonstrukcja całkowitego ryzyka finansowego ze zidentyfikowanych elementów. Załóżmy, że najistotniejszym czynnikiem generującym ryzyko jest zmienność kursu natychmiastowego, S. Równanie (17) można więc zapisać jako:

$$df = \Delta dS, \qquad (18)$$

gdzie:

$\Delta = e^{-r\tau}$.

Wartość *VaR* kontraktu terminowego będzie bezpośrednio (liniowo) związana z wartością *VaR* kursu walutowego będącego podstawą kontraktu terminowego:

$$VaR(dS) = \alpha\sigma(dS), \qquad (19)$$

$$VaR(df) = |\Delta| VaR(dS), \qquad (20)$$

gdzie:

α - jest funkcją wybranego poziomu istotności.

Uogólniając, można stwierdzić, iż kontrakt terminowy może być traktowany jako "portfel" czynników ryzyka, a jego wartość *VaR* zależy bezpośrednio od parametrów rozkładu elementów składowych "portfela" oraz występujących korelacji pomiędzy nimi.

3.2. Wyznaczenie wartości VaR dla kontraktu opcyjnego

Przykładem instrumentu finansowego charakteryzującego się nieliniowymi relacjami pomiędzy wartością *VaR* a czynnikami generującymi ryzyko jest kontrakt opcyjny. Analogicznie jak w przypadku kontraktu terminowego rozważania dotyczące pomiaru ryzyka rozpoczniemy od zapisania funkcji ceny europejskiej opcji kupna i sprzedaży.
Korzystając z modyfikacji modelu wyceny opcji Black'a – Scholes'a z 1973r. dokonanej przez Mertona (1973) wartość europejskiego kontraktu kupna można zapisać:

$$c = Se^{-y\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2), \tag{21}$$

gdzie:

N(d) – jest dystrybuantą rozkładu normalnego dla wartości d_1 i d_2

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{Se^{-y\tau}}{Ke^{-r\tau}}\right)}{\sigma\sqrt{\sigma}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Wartość wyrażenia $\sigma\sqrt{\tau}$ mierzy zmienność wartości kontraktu opcyjnego w trakcie jego życia.

Wychodząc z teorii parytetu opcyjnego wartość europejskiego kontraktu sprzedaży można zapisać:

$$p = Se^{-y\tau}[N(d_1)-1] - Ke^{-r\tau}[N(d_2)-1]. \tag{22}$$

Model wyceny opcji Black'a – Scholes'a uzależnia wartość kontraktu opcyjnego od kilku czynników ryzyka $c = f(S,\sigma,r,y)$. Ogólnie rzecz biorąc zmiany wartości kontraktu opcyjnego można zapisać równaniem:

$$dc = \frac{\partial f}{\partial S}dS + 0.5\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt. \tag{23}$$

Głównym czynnikiem determinującym wartość ponoszonego ryzyka jest zmienność ceny natychmiastowej aktywa będącego podstawą kontraktu opcyjnego.

Ponieważ model Black'a – Scholes'a posiada formę skończoną, pochodna cząstkowa opcji kupna ze względu na cenę natychmiastową (S) może zostać zapisana jako:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-y\tau} N(d_1). \tag{24}$$

Wartość (24) jest zawsze dodatnia oraz mniejsza od jedności.

Analogicznie dla europejskiej opcji sprzedaży:

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-y\tau}[N(d_1)-1]. \tag{25}$$

Wartość (25) jest zawsze ujemna.

Dużą zaletą wartości (24) oraz (25) jest fakt, iż są one addytywne, umożliwia to instytucją finansowym zabezpieczanie nie tyle pojedynczych kontraktów, a tylko wartości netto dla całego portfela opcyjnego:

$$\Delta\hat{p} = \sum_{i=1}^{N} x_i \Delta_i , \tag{26}$$

gdzie:
x_i – oznacza liczbę kontraktów opcyjnych i-tego typu w portfelu.

Jednakże z uwagi, iż wartość kontraktu opcyjnego jest nieliniową funkcją ceny aktywu na którego została ona wystawiona. Ocena ryzyka wartości portfela tylko na podstawie wartości (26) może nie być miarodajna dla dużych zmian ceny (S). Z uwagi na to funkcję zmiany wartości kontraktu opcyjnego przybliża się wykorzystując rozwinięcie szeregu Taylora:

$$dc = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + \ldots \tag{27}$$

Dla europejskiej opcji kupna lub sprzedaży, wartość gammą może zostać wyznaczona analitycznie jako:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{e^{-y\tau}\Phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}. \tag{28}$$

Podejście delta-gamma pozwala na znacznie lepsze przybliżenie rzeczywistych zmian wartości kontraktu opcyjnego. Czynnik gamma jest równoważny mierze wypukłości (*convexity*) stosowanej w aproksymacji zmian cen instrumentów dłużnych. Generalizując można stwierdzić, iż kupno kontraktu opcyjnego prowadzi do otrzymania dodatniej wartości gamma natomiast sprzedaż kontraktu opcyjnego daje rezultat w postaci negatywnej wartości gamma. Ponieważ negatywna wartość gamma jest niekorzystna dla podmiotu, może zostać zaakceptowana tylko za wynagrodzeniem w postaci premii opcyjnej.

Dotychczasowe rozważania wskazują, iż pomiar ryzyka kontraktów opcyjnych charakteryzujących się dużymi wartościami gamma nie może zostać dokonany z wykorzystaniem liniowych przybliżeń *VaR*, tj. tylko na podstawie ich wartości delta.

Wykorzystując przeprowadzone powyżej rozważania dotyczące ryzyka kontraktu opcyjnego przedstawimy metodę aproksymacji wartości *VaR* z wykorzystaniem podejścia delta-gamma.

Biorąc wariancję równania (27) otrzymujemy:

$$V(dc) = \Delta^2 V(dS) + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 V(dS^2) + 2\left(\Delta\frac{1}{2}\Gamma\right) Cov(dS, dS^2). \tag{29}$$

Przyjmując założenie o normalności rozkładu zmiennej dS równanie (29) można zapisać w uproszczonej formie:

$$V(dc) = \Delta^2 V(dS) + \frac{1}{2}[\Gamma V(dS)]^2. \tag{30}$$

Oznaczając przez σ odchylenie standardowe zmian cen, $\sigma\left(\frac{dS}{S}\right)$ otrzymujemy parametryczną miarę *VaR* dla kontraktu opcyjnego:

$$VaR(dc) = \alpha\sqrt{\Delta^2 S^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\left[\Gamma S^2\sigma^2\right]^2}. \tag{31}$$

Załóżmy (Figer, 1996), że posiadamy pozycję w 52 tygodniowych bonach skarbowych w kwocie 100 000 zł. Biorąc pod uwagę, że roczna stopa procentowa wynosi 22.50% wartość bieżąca omawianej pozycji wynosi więc 81 632.65 zł. Interesuje nas ocena ryzyka cenowego tej pozycji na następne 180 dni. Szacowana tygodniowa zmiana ceny analizowanego instrumentu wynosi 0.52%[1].

Na podstawie tych szacunków oraz przyjmując 95% poziom ufności, największa strata na wartości utrzymywanej pozycji w ciągu następnych 180 dni nie powinna przekroczyć $0.52\%\sqrt{\frac{180}{7}} = 2.64\%$, tj. 2 152.56 zł. Biorą pod uwagę możliwe zyski i straty, można oczekiwać że wartość omawianej pozycji za 180 dni będzie znajdować się w przedziale od 79 480.09 zł do 83 785.21 zł.

Jednakże po 180 dniach omawiana pozycja w 52 tygodniowych bonach skarbowych posiada już tylko półroczny termin wykupu, wobec czego jej wartość bieżąca wyznaczona na podstawie pół rocznej stopy procentowej (stopa procentowa została przyjęta arbitralnie, rzeczywisty jej poziom nie zmienia istoty omawianego problemu i ma wpływ tylko na wyniki liczbowe), tj. 22.30% wynosi 90 424.64 zł. Jak łatwo zauważyć, rzeczywista wartość instrumentu w znacznym stopniu odbiega od jej wartości prognozowanej.

Niedokładność wcześniej przeprowadzonych szacunków wynika z zadziałania wymienionych na wstępie efektów, tj. efektu zbiegania się w czasie wartości rynkowej instrumentu z jego wartością nominalną oraz efektu zanikania zmienności ceny tych instrumentów wraz ze zbliżaniem się do terminu ich zapadalności.

Rozwiązaniem zaistniałego problemu jest szacowanie ryzyka cenowego na podstawie syntetycznego przepływu pieniężnego o czasie trwania równym różnicy pomiędzy okresem trwania pierwotnego instrumentu, a okresem czasu na który dokonujemy oceny ryzyka (*eliminujemy efekt "pull to par"*). Natomiast w celu usunięcia efektu "roll down" pomiaru ryzyka dokonujemy na podstawie zmienności ceny syntetycznego przepływu pieniężnego.

Wracając do naszego przykładu, pragnąc dokonać pomiaru ryzyka cenowego 52 tygodniowych papierów skarbowych na okres 6 miesięcy, szacujemy wartość VaR dla syntetycznego przepływu pieniężnego o okresie czasu równym 180 dni. Utrzymując, upraszczające założenie o płaskiej

---

[1] Parametry rozkładów zmian cen zostały oszacowane przy zastosowaniu algorymu EWMA (*Exponentialy Weighted Moving Average*).

strukturze stóp procentowych, wartość bieżąca utworzonego przepływu pieniężnego wynosi 90 350.79 zł., reprezentuje ona nasze oczekiwania co do wartości badanego instrumentu za 180 dni. Szacowana tygodniowa zmiana ceny syntetycznego instrumentu (6 miesięcznego) wynosi 0.45%.

Na podstawie tych szacunków oraz przyjmując 95% poziom prawdopodobieństwa, największa strata na wartości utrzymywanej pozycji w ciągu następnych 180 dni nie powinna przekroczyć $0.45\%\sqrt{\frac{180}{7}} = 2.28\%$, tj. 2 061.73 zł. Biorą pod uwagę możliwe zyski i straty, można oczekiwać że wartość omawianej pozycji za 180 dni będzie znajdować się w przedziale od 88 289.06 zł do 92 412.52 zł. W tym przypadku zbudowana prognoza wartości instrumentu pokrywa jego rzeczywistą wartość.

Dokonajmy sformalizowania przeprowadzonego powyżej rozumowania. Niech **T** oznacza czas w którym mamy otrzymać jednostkowy przepływ pieniężny a **t** oznacza okres prognozowany. Niech X_s^S oznacza cenę w czasie s instrumentu, który posiada okres trwania S dni, tj. reprezentuje przepływ pieniężny w czasie s + S. Niech $R_s^S = -\log(X_s^S)/S$ oznacza stopę zwrotu na X_s^S, a σ_s będzie oszacowaną dzienną zmiennością stóp zwrotu na X_s^S. Niech dla s < T, Y_s oznacza wartość bieżącą analizowanego przepływu pieniężnego w czasie s.

Zauważmy, że $Y_t = X_t^{T-t}$, tj. wartość bieżąca analizowanego przepływu pieniężnego w czasie t jest równa wartości instrumentu o okresie trwania T – t. Wykorzystując oszacowaną początkową wartość zmienności, można zapisać model dla Y_t:

$$Y_t = X_t^{T-t} = X_0^{T-t} e^{\sigma_{T-t}\sqrt{t}Z},$$

gdzie Z jest standardową zmienną losową o rozkładzie normalnym. Przepisując powyższe równanie oraz biorąc pod uwagę fakt, że $Y_0 = X_0^T$ możemy zapisać:

$$Y_t = Y_0 \frac{X_0^{T-t}}{X_0^T} e^{\sigma_{T-t}\sqrt{t}Z} = Y_0 e^{\hat{Z}},$$

gdzie

$$\hat{Z} = R_0^T T - R_0^{T-t}(T-t) + \sigma_{T-t}\sqrt{t}Z.$$

Biorąc pod uwagę powyższe równania, można stwierdzić, że proces Y_t jest zbliżony do standardowego podejścia metody Value at Risk z tą różnicą, że w wydaniu klasycznym zakłada się, iż wartość oczekiwana modelowanych stóp zwrotu jest stała i równa zeru. Natomiast omawiana modyfikacja charakteryzuje się nie zerową wartością oczekiwaną (równą $R_0^T T - R_0^{T-t}(T-t)$) eliminującą efekt "pull to par" oraz zmodyfikowaną wariancją (równą $\sigma_{T-t}^2 t$) likwidującą efekt "roll down".

Reasumując, przedstawiona procedura pozwala na istotną poprawę wyników szacowanego ryzyka cenowego instrumentów o stałej stopie zwrotu.

3.3. Uogólnienie metody parametrycznej na portfel instrumentów finansowych

Dotychczasowe rozważania dotyczyły szacowania ryzyka pojedynczego instrumentu finansowego. W dalszej części rozdziału przedstawione zostanie uogólnienie metody parametrycznej na portfel instrumentów finansowych (Tarczyński, 1996).

Portfel może być scharakteryzowany poprzez zbiór otwartych pozycji na poszczególnych instrumentach finansowych reprezentujących różne klasy ryzyka. Zwrot z portfela można przybliżyć liniową kombinacją zwrotów z instrumentów składowych portfela.

Oznaczmy zwrot z portfela przez:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} R_{i,t+1}\,, \tag{32}$$

gdzie:

$w_{i,t}$ – oznaczają procentowy udział i-tego instrumentu w wartości portfela w okresie t.

Oczekiwaną stopę zwrotu z portfela można zapisać jako:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i\,, \tag{33}$$

natomiast wariancja zwrotu z portfela dana jest wzorem:

$$V(R_p)=\sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\,. \tag{34}$$

Obniżenie wartości ryzyka portfela można uzyskać w dwojaki sposób, albo poprzez dobieranie instrumentów charakteryzujących się niskimi stopniami korelacji lub zwiększając liczbę instrumentów w portfelu. Uogólniając można przyjąć, że niezdywersyfikowana wartość *VaR* portfela jest sumą ocen *VaR* poszczególnych instrumentów finansowych. Dobieranie instrumentów charakteryzujących się niską korelacją zwrotów pozwala na dywersyfikację ryzyka, a co za tym idzie wpływa na zmniejszenie wartości VaR.

Istotnym aspektem szacowania wartości VaR jest dokonanie identyfikacji instrumentów powodujących wzrost jego wartości. Informacja ta pozwoli na dokonanie modyfikacji pozycji w celu zmniejszenia ryzyka portfela w sposób najbardziej efektywny.

Załóżmy, iż portfel składa się z N-1 aktywów. Tworzymy nowy portfel poprzez dodanie nowego składnika i. Ocenę wpływu dodania do portfela nowego składnika otrzymamy poprzez wyznaczenie pochodnej równania (34) ze względu na w_i.

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} w_j\sigma_{ij} = 2\operatorname{cov}(R_i, R_p), \tag{35}$$

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w_i} = \frac{2\sigma_p\partial\sigma_p}{\partial w_i}\,.$$

Wrażliwość ryzyka portfela na zmianę czynnika wagowego jest zatem dana wzorem:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\sigma_p\partial w_i} = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_p)}{\sigma_p^2} = \beta_i\,, \tag{36}$$

lub wykorzystując zapis macierzowy:

$$\beta = \frac{\mathbf{\Sigma w}}{\mathbf{w'\Sigma w}}\,. \tag{37}$$

Wskaźnik β stanowi fundament modelu CAPM wprowadzonego przez Sharp'a (1964). Zgodnie z tą teorią, inwestorzy o wysokiej awersji do ryzyka pragną uzyskać kompensaty tylko za czynnik ryzyka systematycznego, tj. ryzyka nie dającego się dalej zdywersyfikować. Teza tej teorii była i jest nadal przedmiotem burzliwych debat wśród praktyków i teoretyków finansów, jednakże bezsporna pozostaje wysoka użyteczność parametru β w ocenie ryzyka portfela instrumentów finansowych.

Wartość β pozwala na dokonanie dekompozycji oszacowanej wartości VaR na poszczególne czynniki ryzyka. Zapiszmy wariancję portfela w postaci:

$$\sigma_p^2 = w_1\left(w_1\sigma_1^2 + \sum_{j=1, j\neq 1}^{N} w_j\sigma_{1j} \right) + w_2\left(w_2\sigma_2^2 + \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} w_j\sigma_{2j} \right) + \ldots \tag{38}$$

Przedstawiając wzór (38) inaczej otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1 \operatorname{cov}(R_1, R_p) + w_2 \operatorname{cov}(R_2, R_p) + \ldots = \\ &= w_1(\beta_1\sigma_p^2) + w_2(\beta_2\sigma_p^2) + \ldots = \sigma_p^2\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\beta_i \right). \end{aligned} \tag{39}$$

Wzór (39) pokazuje, że wariancję portfela można przedstawić w postaci sumy składników ryzyka związanych z danym portfelem. Wykorzystując powyższe rozważania możemy zapisać:

$$VaR = VaR\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\beta_i \right) = VaR_1 + VaR_2 + \ldots \tag{40}$$

Dokonanie dekompozycji VaR dostarcza cennych informacji o strukturze ryzyka badanego portfela instrumentów finansowych.

Na diagramie 2 przedstawiono schemat omawianego podejścia do szacowania wartości VaR.

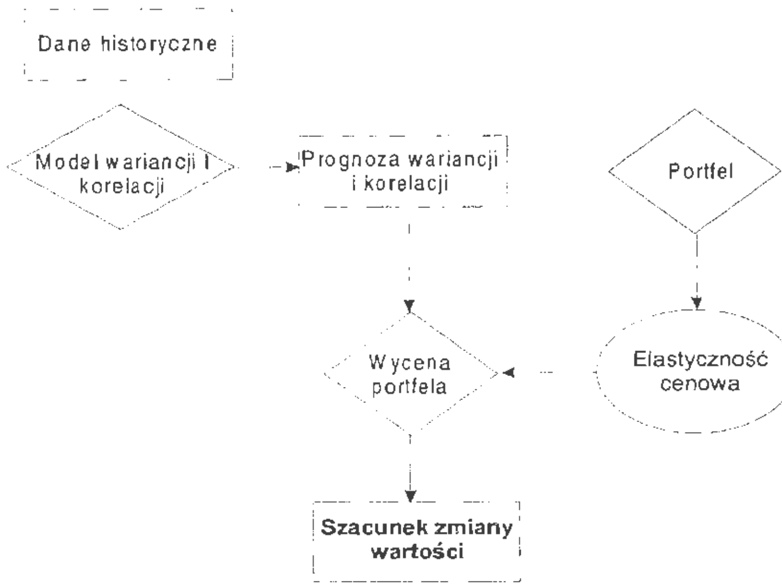


Diagram 2. (źródło: opracowanie własne na podstawie Jorion P., *Value at Risk. The new benchmark for controlling market risk.*, University of California, Irvine, 1997).

3.4. Podsumowanie

Reasumując, metoda wariacyjno-kowariacyjna wyznaczania miary VaR jest najprostszą z opracowanych metod. Bezpośrednią tej prostoty jest szereg wad, wśród których najistotniejsze to:
metoda ta nie pozwala uchwycić ryzyka związanego z rzadko zachodzącymi zdarzeniami (Danielsson i de Vries, 1997), tj. nietypowymi, ekstremalnymi wahnięciami czynników ryzyka takimi jak załamania giełdowe, kryzysy walutowe, itp. Problem ten związany jest z faktem, iż metoda ta bazując na rozkładach prawdopodobieństwa, których parametry szacowane są na podstawie danych historycznych, w których liczba tych nietypowych zdarzeń jest zbyt mała, aby model rozkładu pozwolił je uchwycić:

a) metoda ta bazuje z reguły na założeniu normalności rozkładów, co na podstawie badań empirycznych nie odpowiada rzeczywistości,

b) metoda pozwala na dokładny pomiar ryzyka instrumentów finansowych charakteryzujących się liniowymi zależnościami pomiędzy wartością a czynnikami ryzyka, natomiast dla nieliniowych instrumentów zastosowanie rozwinięcia szeregu Taylora pozwala na przybliżoną ocenę ryzyka.

Pomimo swych ograniczeń metoda ta oferuje stosunkowo dużą dokładność wyników uzyskiwaną stosunkowo niewielkim nakładem obliczeniowym. Jak zostanie to wykazane w dalszej części rozdziału, metody historycznej symulacji oraz Monte-Carlo, bazujące na pełnej rewaluacji instrumentów finansowych, pozwalają na uzyskanie większej efektywności za cenę istotnego wzrostu komplikacji obliczeń.

4. METODA HISTORYCZNEJ SYMULACJI

Metoda historycznej symulacji bazuje na pełnej wycenie posiadanych instrumentów finansowych, na bazie historycznych wartości parametrów. W metodzie tej teoretyczne przyszłe wartości cen rynkowych, w tym i stóp procentowych, tworzone są poprzez zastosowanie zaobserwowanych zmian w generowanych stopach zwrotu do ich bieżącego poziomu

$$P^{*}_{i,T} = P_{i,0} + \Delta P_{i,\tau}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{41}$$

Na podstawie tak uwożonych scenariuszy szacowana jest nowa wartość portfela instrumentów finansowych $P^{*}_{p,\tau}$. Następnie wyznaczana jest wartość hipotetycznej stopy zwrotu:

$$R_{p,\tau} = \frac{\left(P^{*}_{p,\tau} - P_{p,0}\right)}{P_{p,0}}. \tag{42}$$

Miara VaR otrzymywana jest na podstawie rozkładu oszacowanych wartości (42). Etapy postępowania w tej metodzie zostały przedstawione na diagramie 3.

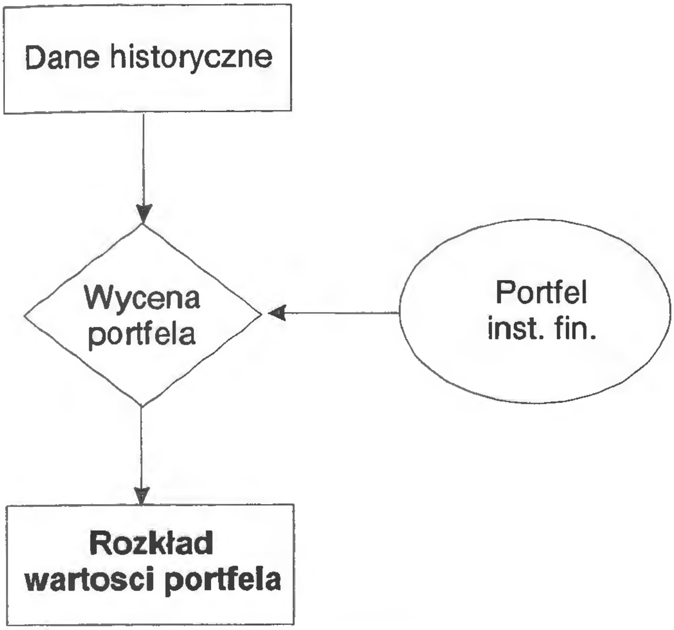


Diagram 3. (źródło: opracowanie własne na podstawie Jorion P., *Value at Risk. The new benchmark for controlling market risk.*, University of California, Irvine, 1997).

Z uwagi na fakt, że metoda ta bazuje na rzeczywistych, obserwowalnych rozkładach zmian cen rynkowych oraz pełnej rewaluacji portfela, pozwala ona na ujęcie większości z istniejących własności finansowych szeregów czasowych, tj. nieliniowości, nie-normalnych rozkładów, itd. Dodatkowa, metoda ta nie jest podatna na ryzyko modelowe gdyż nie bazuje na stosowaniu ani modeli dynamiki cen ani też modeli wyceny instrumentów finansowych. Metoda ta jest na tyle prosta i intuicyjna, że znalazła zastosowanie w propozycji Komitetu Bazylejskiego z 1996r. dotyczącej uwzględnienia ryzyka rynkowego w wyliczaniu adekwatności kapitałowej banku (Zob. *Amendment to ...*, 1996). Z drugiej zaś strony, metoda ta spotyka się zarówno w literaturze jak i praktyce z wieloma zarzutami. Po pierwsze, zakłada ona, iż zaobserwowane historyczne rozkłady zmian cen pozwalają się przenieść w przyszłość bez istotnej utraty własności poznawczych. Założenie to jest sprzeczne z wykazanymi wcześniej własnościami zmienności finansowych szeregów czasowych, tj. ich heteroskedastyczności. Po drugie, metoda ta jest bardzo wrażliwa na długość zastosowanego okresu przeszłego, ponieważ każdy przeszły element posiada tę samą wagę. Inaczej mówiąc w zależności od zastosowanego przedziału czasowego otrzymywać będziemy zróżnicowane wyniki. Po trzecie, metoda ta staje się niezwykle niewygodną w zastosowaniu wraz ze wzrostem portfela. Konieczność obserwowania historycznych stóp zwrotu dla każdego z elementów skomplikowanego portfela może doprowadzić do całkowitej niewydolności metody.

5. METODA MONTE CARLO

Świat instytucji finansowych często porównywany jest do gry w kasynie. Ta analogia jest właściwa przynajmniej ze względu na jeden aspekt. Firmy finansowe bardzo często stosują techniki symulacyjne znane pod nazwą Monte Carlo w celu dokonywania wyceny instrumentów finansowych.

Metody numerycznych symulacji zostały po raz pierwszy użyte przez specjalistów podczas konstrukcji bomby atomowej w 1942r. w Los Alamos. Nazwa tych technik pochodzi od nazwy słynnego kasyna założonego w 1862r. na południu Francji (*obecnie Monaco*).

Z uwagi na swą elastyczność metoda Monte Carlo jest najdokładniejszą techniką wyznaczania VaR. Pozwala na uchylanie założeń stawianych przy wykorzystaniu metody parametrycznej, tj. nie wymaga stawiania założeń co do kształtu rozkładów czynników ryzyka, pozwala na liniowe oraz nieliniowe relacje między czynnikami ryzyka a kryterium pomiarowym, itd.

Podstawową koncepcją stojącą za metodą Monte Carlo jest generowanie losowego procesu dla analizowanej zmiennej, pokrywającego cały jej rozkład. Pierwszym i najistotniejszym krokiem tej metody jest wybór modelu stochastycznego opisującego zachowanie się cen rynkowych, w tym i stopy procentowej. W kolejnym kroku dokonuje się symulacji wszystkich czynników ryzyka w każdym z badanych momentów czasu. Ostatnim etapem metody jest rewaluacja portfela instrumentów finansowych z wykorzystaniem otrzymanych, w wyniku symulacji, parametrów. W wyniku wielokrotnego powtórzenia tego zabiegu otrzymuje się rozkład wartości portfela, z którego to odczytuje się miarę VaR.

Na diagramie 4 przedstawiono schemat wcześniej opisanego postępowania.

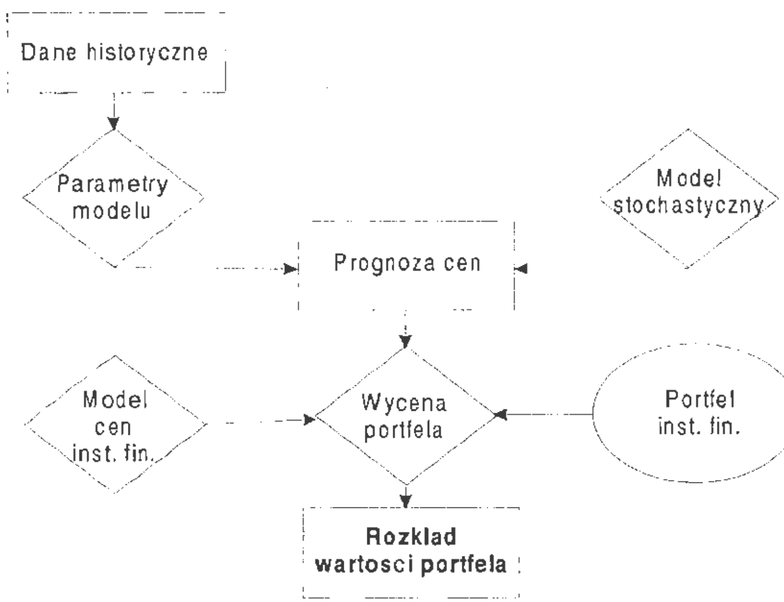


Diagram 4. (źródło: opracowanie własne na podstawie Jorion P., *Value at Risk. The new benchmark for controlling market risk.*, University of California, Irvine, 1997).

6. PODSUMOWANIE

W tabeli 1 dokonano porównania przedstawionych w niniejszym podrozdziale miar ryzyka.

Najprostszą metodą weryfikacji otrzymanych oszacowań *VaR* jest zaobserwowanie częstości występowania zdarzenia polegającego na przekroczeniu oszacowanej wartości *VaR* w wybranej próbie. Załóżmy, że bank wyznacza swoją wartość *VaR* dla poziomu istotności równego 5% dla okresu czasu T. W celu zweryfikowania poprawności obliczeń wyznacza się wartość N mierzącą liczbę dni kiedy oszacowana wartość *VaR* została przekroczona. Następnie musimy zweryfikować hipotezę, iż otrzymana wartość N jest poprawna dla przyjętego poziomu istotności p = 5%.

Sprawdzianem postawionej hipotezy jest statystyka zaproponowana przez Kupca (1995) postaci:

$$l = -2\ln\left[(1-p)^{T-N} p^{N}\right] + 2\ln\left[\left(1-\left(\frac{N}{T}\right)\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\right]. \qquad (43)$$

Tabela 1 Porównanie metod wyznaczania *VaR*

	Metoda historycznej symulacji	Metoda wariacyjno-kowariacyjna	Metoda Monte Carlo
Rodzaje pozycji			
Wycena	Pełna	Liniowe	Pełna
nieliniowe aktywa	Tak	Nie	Tak
Rodzaje rozkładów			
Historyczny	Normalny	Empiryczny	Dowolny
Zmiany w czasie	Nie	Tak	Tak
Pochodny*	Nie	Tak	Tak
Rynek			
nienormalne rozkłady	Tak	Nie	Tak
możliwość uchwycenia ekstremalnych ruchów	Częściowo	Częściowo	Tak
Wdrożenie			
Pozwala uniknąć ryzyka modelowego	Tak	Częściowo	Nie
Łatwość obliczeniowa	Łatwy	Łatwy	Trudny
Największe wady	Zmiany w czasie, Zdarzenia ekstremalne	Pozycje nieliniowe Zdarzenia ekstremalne	Ryzyko modlowe

*) – wynikający, np. z bieżących cen instrumentów finansowych.

Statystyka ta posiada rozkład chi-kwadrat z jednym stopniem swobody.

Przykładowo, dla T=255 dni oczekuje się wartości N = pT = 13. Jeżeli w tym okresie zaobserwowano 18 przekroczeń to przy poziomie prawdopodobieństwa równym 5% obszar krytyczny testu obejmuje przedział (6 , 21) co oznacza brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Reasumując należy stwierdzić, iż metoda VaR nie jest panaceum na ryzyko rynkowe banku. Jest tylko wysublimowanym narzędziem pozwalającym na aproksymacje ryzyka tkwiącego w interakcjach banku z jego zewnętrznym środowiskiem.

Stąd też metoda VaR powinna być traktowana jako konieczny aczkolwiek niewystarczający środek wspomagający proces zarządzania ryzykiem banku komercyjnego.

LITERATURA

1. *Amendment to the capital accord to incorporate market risks. Consultative proposal by the Basle Commitee on Banking Supervision.*, Basle January 1996.
2. Danielsson J., 1997, de Vries C., *Extreme Returns, Tail Estimation, and Value-at-Risk*, Working Papers, London School of Economics and Institute of Economic Studies at Univercity of Iceland.
3. Dowd K., 1998, *Beyond value at risk. The new science of risk management*. John Wiley & Sons, Chichester.
4. Jorion P.,1997, *Value at Risk. The new benchmark for controlling market risk.* University of California, Irvine.
5. Kupiec P., 1995, *Techniques for verifying the accuracy of risk measurment models*, Journal of Derivatives 2
6. Matten C., 1996, *Managing Bank Capital. Capital Allocation and performance measurement.*, John Wiley&Sons, Chichester.
7. Merton R., 1973, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4.
8. *RiskMetrics – Technical Document Fourth Edition*, 1996, J.P. Morgan, New York.
9. Sharp W., 1964, *Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance 19.
10. Smirnow N. W., Dunin-Barkowski I. W., 1993, *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych.*, PWN, Warszawa.
11. Tarczyński W., 1996, *Analiza portfelowa na giełdzie papierów wartościowych*, PTE, Szczecin.

Zarządzanie ryzykiem inwestycyjr ,

Maciej Krawczak,
Antoni Miklewski,
Andrzej Jakubowski,
Piotr Konieczny

Rozwój rynków finansowych doprowadził do sytuacji, w której jednym z najistotniejszych celów w banku staje się zarządzanie ryzykiem cenowym. Analizując ryzyko cenowe banku, działającego w warunkach polskich, wydaje się, że najważniejsze stają się krótkoterminowe prognozy cen rynkowych (np. stóp procentowych, kursów walutowych itd.). Bezpieczne zarządzanie ryzykiem cenowym oraz krótkoterminowe prognozowanie cen stają się w Polsce jednymi z najważniejszych elementów polityki banków.

W książce przedstawiono:

- modele struktury terminowej stóp procentowych,
- zagadnienia zarządzania portfelem obligacji,
- metodę value at risk,
- procesy stochastyczne w modelowaniu i prognozowaniu szeregów czasowych,
- analizę i predykcję szeregów czasowych z wykorzystaniem elementów sztucznej inteligencji i teorii informacji.

ISBN 83-85847-52-9

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl