INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy
Tom 11

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2009

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy
Tom 11

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2009

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w niniejszym tomie:

prof. dr hab. inż. Jerzy HOŁUBIEC
dr inż. Lech KRUŚ
doc. dr hab. inż. Wiesław KRAJEWSKI
doc. dr hab. Jacek MALINOWSKI
dr inż. Edward MICHALEWSKI
prof. dr Adam SKOREK
dr hab. Ryszard SMARZEWSKI
prof. dr hab. inż. Andrzej STRASZAK
dr Dominik ŚLĘZAK
prof. dr hab. inż. Stanisław WALUKIEWICZ
doc. dr hab. Sławomir ZADROŻNY

ISBN 9788389475220

Druk: Zakład Poligraficzny Jerzy Kosiński, Warszawa

BADANIE AUTOREGRESYJNEGO CHARAKTERU PROCESU LICZBY STRAT OPERACYJNYCH

Maciej Buczak
Studia Doktoranckie IBS PAN

Artykuł przedstawia sposób wykorzystania modeli autoregresyjnych w odniesieniu do liczby strat operacyjnych w ramach modelowania ryzyka operacyjnego. Przedstawiono liczbę strat operacyjnych jako proces stochastyczny. Następnie przeprowadzono badanie wewnętrznej struktury zdefiniowanego procesu. W szczególności przedmiot badania stanowiła identyfikacja autoregresyjnego charakteru procesu liczby strat operacyjnych.

Wstęp

Ryzyko operacyjne zyskuje sobie w ostatnich latach coraz większą wagę w procesie zarządzania instytucją. W szczególności dotyczy to instytucji świadczących usługi w sektorze finansowym. Zarówno w bankach, jak i instytucjach ubezpieczeniowych ryzyko operacyjne zostało zidentyfikowane jako istotna część całkowitej ekspozycji na ryzyko organizacji. Uznaje się, że ryzyko operacyjne w sektorze bankowym reprezentuje obecnie około 30% całkowitego oszacowanego ryzyka, na które bank jest narażony. Te same szacunki wskazują na 60% udział ryzyka kredytowego w całkowitym ryzyku oraz 5% udział ryzyko rynkowego i 5% udział innych ryzyk bankowych. W odniesieniu do sektora ubezpieczeniowego zakłada się, że udział ryzyka operacyjnego w całkowitym ryzyku jest stosunkowo niższy [3].

Ryzyko operacyjne ze względu na swoją naturę jest ryzykiem pojawiającym się w działalności każdej organizacji. Specyfika tego ryzyka może różnić się w zależności od typu organizacji. Niemniej jednak ryzyko operacyjne da się zidentyfikować w każdej funkcjonującej instytucji. Ryzyko operacyjne jest generowane zarówno przez czynniki o charakterze wewnętrznym, jak i czynniki zewnętrzne. Ryzyko operacyjne o charakterze wewnętrznym jest wynikiem zawodności funkcjonujących w instytucji procesów oraz systemów. Ryzyko wewnętrzne może być bezpośrednio kontrolowane przez organizację. Strategie zarządzania ryzykiem mogą być ukierunkowane na minimalizację występowania zdarzeń operacyjnych o charakterze wewnętrznym, jak również na łagodzenie wpływu tego typu zdarzeń na działalność instytucji. W przeciwieństwie do wewnętrznego ryzyka operacyjnego, ryzyko zewnętrzne jest tą częścią ryzyka operacyjnego, której instytucja nie jest w stanie kontrolować. Może jedynie łagodzić wpływ tego rodzaju ryzyka na działalność instytucji [3].

Do modelowanie ryzyka operacyjnego wykorzystywane są oparte na instrumentach statystycznych metody zaawansowane. Modelowanie za pomocą metod zaawansowanych przeprowadza się w oparciu o bazy danych o stratach operacyjnych. Modelowanie tego typu ma charakter ilościowy, gdyż opiera się na metodach ilościowych.

Modelowanie ryzyka operacyjnego z wykorzystaniem metod zaawansowanych przeprowadzane jest niezależnie dla wielkości straty operacyjnej, a także liczby strat. Podejście tego typu zostało zapożyczone ze stosowanych w sektorze ubezpieczeniowym metod aktuarialnych. Modelownie wielkości straty nie jest przedmiotem niniejszego opracowania. Niniejszy artykuł poświęcony jest natomiast modelowaniu liczby strat operacyjnych.

1. Zdefiniowanie przedmiotu badania

Przedstawmy liczbę strat operacyjnych jako proces stochastyczny $\{X_t\}$, gdzie przez X_t oznaczona zostanie zmienna losowa, za pomocą której opisano liczbę strat operacyjnych w okresie t. Mając tak zdefiniowany proces stochastyczny można przeprowadzić badanie struktury tego procesu. W szczególności przedmiotem niniejszego opracowania będzie próba identyfikacji autoregresyjnego charakteru wyżej zdefiniowanego procesu stochastycznego. Do tego celu wykorzystane zostaną modele autoregresyjne AR. Modele autoregresyjne to modele, w których w roli zmiennych objaśniających występują opóźnione w czasie zmienne objaśniane. Wartość zmiennej w okresie t jest funkcją poziomów tej zmiennej w okresie $t, t-1, t-2, ..., t-p$ i zmiennej losowej ε. Badanie autoregresyjnego charakteru procesu liczby strat operacyjnych pozwoli na identyfikację zależności pomiędzy liczbą strat operacyjnych w okresie t, a liczbą strat w okresie $t-p$. Brak autoregresyjnego charakteru wyżej wymienionego procesu oznaczać będzie brak zależności pomiędzy liczbą strat operacyjnych w okresie t, a liczba strat operacyjnych w poprzednich okresach.

2. Definiowanie pojęć

2.1. Proces stochastyczny oraz szereg czasowy

Proces stochastyczny może zostać zdefiniowany jako rodzina zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych, indeksowaną przez t, gdzie t oznacza czas. Proces stochastyczny oznaczamy jako zbiór $\{X_t\}$. Każdy element $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_t$ procesu stochastycznego $\{X_t\}$ jest zmienną losową. Jeśli dla wszystkich zmiennych losowych X_t istnieją średnie (wartości oczekiwane), to możemy określić średnią procesu stochastycznego $\{X_t\}$ jako ciąg średnich (wartości oczekiwanych) dla poszczególnych zmiennych X_t, czyli jako funkcję t. Średnią procesu stochastycznego oznaczamy symbolem μ_t, natomiast wariancja procesu stochastycznego oznaczona jest symbolem σ_t^2, a kowariancja dwu zmiennych X_t i X_{t+j} należących do procesu stochastycznego oznaczana jest przez $\sigma_{t,t+j}$. Z pojęciem procesu stochastycznego wiąże się określenie stacjonarności. Znane są dwa pojęcia stacjonarności: stacjonarność w węższym sensie oraz stacjonarność w szerszym sensie. Proces stochastyczny jest stacjonarny w węższym sensie jeśli łączne i warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa procesu nie zmieniają się przy przesunięciach w czasie. Częściej spotykaną w praktyce formą stacjonarności jest stacjonarność w szerszym sensie. Proces jest stacjonarny w szerszym sensie jeśli spełnione są warunki [1]:

$$E(X_t) = cons = \mu \tag{1}$$

$$Var(X_t) = cons = \sigma^2 \tag{2}$$

$$Cov(X_t X_{t+j}) = \sigma_j \tag{3}$$

Średnie i wariancje procesu są zatem stałe w czasie, a wartość kowariancji dla dwóch momentów obserwacji zależy jedynie od odstępu między nimi, a nie od samych momentów obserwacji, dla których liczymy kowariancje. Jeśli nie jest spełniony jeden lub więcej warunków, to proces jest niestacjonarny. Modelami opisującymi niestacjonarność w wartości średniej procesu są modele trendu i sezonowości, natomiast do opisu procesów charakteryzujących się niestacjonarnością w wariancji wykorzystuje się modele ARIMA. Modelami procesów stacjonarnych są modele AR, MA oraz ARMA [1].

Szeregiem czasowym nazywamy skończony zbiór par $\{t, x_t\}$, gdzie t przypiera wartości ze zbioru liczb całkowitych ($t \in Z$) i każdemu t przyporządkowana jest liczba x_t ze zbioru liczb rzeczywistych ($x_t \in R$). Szeregi czasowe są zatem realizacjami procesów stochastycznych. Rozróżnia się dwa typy szeregów czasowych: szeregi czasowe okresów, szeregi czasowe momentów [1].

Szeregi czasowe okresów zawierają dane dotyczące kształtowania się poziomu danego zjawiska w całym okresie przyjętym za jednostkę czasu. Pojedynczą realizacje szeregu czasowego stanowi zatem pewna zagregowana wielkość charakteryzująca dane zjawisko w badanym okresie. Szeregi czasowe momentów zawierają jedynie informację o poziomie zjawiska w wyróżnionych momentach, to znaczy w chwilach dokonywania pomiaru. Nie wiadomo zatem jak badane zjawisko kształtowało się miedzy kolejnymi momentami obserwacji [4].

2.2. Modele autoregresyjne AR

Do opisu procesów stacjonarnych szczególnie przydatne okazują się modele autoregresji AR. Modele tego typu wywodzą się z szerszej klasy modeli regresji i znajdują szerokie zastosowanie w modelowaniu procesów gospodarczych, ponieważ wiele zjawisk zależy od swych stanów w przeszłości. W modelu autoregresyjnym bieżąca wartość zmiennej objaśnianej jest wyrażona przez skończoną kombinację jej wartości poprzednich [4].

Model autoregresji rzędu p oznaczony jako $AR(p)$ zapisać można w następujący sposób:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + \ldots \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{4}$$

gdzie:

p – rząd autoregresji, czyli maksymalne opóźnienie zmiennej objaśnianej

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ - parametry modelu autoregresyjnego

ε_t - proces resztowy

Proces resztowy w modelu autoregresyjnym jest procesem białego szumu, co oznacza, że charakteryzuje się następującymi własnościami:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \tag{5}$$

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 \tag{6}$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \text{ dla } t \neq s \tag{7}$$

Średnia procesu jest zatem równa zero, wariancja procesu jest stała w czasie, natomiast kowariancja pomiędzy obserwacjami z okresu t i s jest równa zero [2].

2.3. Ustalenie rzędu autoregresji

Do ustalenia rzędu autoregresji wykorzystywana jest funkcja autokorelacji cząstkowej oraz test Quenouille'a. Funkcja autokorelacji cząstkowej wskazuje czysty związek pomiędzy obserwacjami. Funkcja autokorelacji cząstkowej pozwala, zatem ocenić rząd opóźnienia procesu p dla modelu autoregresyjnego $AR(p)$ [2].

Dany jest model autoregresyjny postaci:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + \ldots \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Niech φ_{pp} oznacza współczynnik autokorelacji cząstkowej, czyli:

$$\begin{aligned} Y_t &= \varphi_{11} Y_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ Y_t &= \varphi_{22} Y_{t-2} + \varepsilon_{2t} \\ &\vdots \\ Y_t &= \varphi_{pp} Y_{t-p} + \varepsilon_{pt} \end{aligned}$$

Hipotezy w teście Quenouille'a na istotność współczynnika autokorelacji cząstkowej mają postać:

$$H_0 : \varphi_{pp} = 0$$
$$H_1 : \varphi_{pp} \neq 0$$

Sprawdzianem hipotezy jest statystyka t postaci:

$$t = \frac{\hat{\varphi}_{pp}}{S(\hat{\varphi}_{pp})} \tag{8}$$

Błąd standardowy współczynnika autokorelacji cząstkowej wynosi:

$$S(\hat{\varphi}_{pp}) = \frac{1}{n}$$

Jeżeli $\left|\hat{\varphi}_{pp}\right| \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$, to odrzucamy hipotezę H_0 na korzyść hipotezy H_1.

Jeżeli $\left|\hat{\varphi}_{pp}\right| < \frac{2}{\sqrt{n}}$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 [2].

2.4. Estymacja parametrów modeli autoregresyjnych

Wśród metod estymacji parametrów modeli autoregresyjnych AR wyróżnia się: równania Yule'a-Walkera, Klasyczną Metodę Najmniejszych Kwadratów, a także Metodę Największej Wiarygodności. Najczęściej stosowana metodą jest Klasyczna Metoda Najmniejszych Kwadratów. Estymator według KMNK jest zgodny i asymptotycznie nieobciążony [2].

3. Badanie autoregresyjnego charakteru procesu liczby strat operacyjnych

Analiza autoregresyjnej struktury procesu liczby strat operacyjnych przeprowadza się w oparciu o szereg czasowy liczby strat, stanowiący pojedynczą realizację wyżej wymienionego procesu. Szereg czasowy liczby strat operacyjny jest szeregiem okresów. Oznacza to, że pojedyncza realizacja szeregu czasowy liczby strat zawiera informację na temat liczby wystąpień strat operacyjnych w całym okresie przyjętym za jednostkę czasu. Jeżeli przez $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p}$ oznaczymy liczbę strat operacyjnych w okresach $t, t-1, t-2, \ldots, t-p$, to model autoregresyjny rzędu p $AR(p)$ dla takiego szeregu czasowego zapisać można jako:

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{9}$$

gdzie:

x_t – liczba strat operacyjnych w okresie t

p – rząd autoregresji, czyli maksymalne opóźnienie zmiennej x_t

α_i - parametr modelu autoregresyjnego

ε_t - proces resztowy

Identyfikację rzędu autoregresji przeprowadza się z wykorzystaniem funkcji autokorelacji cząstkowej. W tym celu wyznacza się współczynniki autokorelacji cząstkowej:

$$x_t = \varphi_{11} x_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$x_t = \varphi_{22} x_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$
$$\vdots$$
$$x_t = \varphi_{pp} x_{t-p} + \varepsilon_{pt}$$

gdzie:

φ_{pp} – współczynnik autokorelacji cząstkowej rzędu pp

Współczynnik autokorelacji φ_{pp} w odniesieniu do szeregu czasowego liczba strat operacyjnych wskazuje czysty związek pomiędzy ilością strat operacyjnych w okresie t, a ilością strat w okresie $t-p$.

Jako że, modele AR są modelami stacjonarnymi ustalenie rzędu autoregresji, a także oszacowanie ocen parametrów modelu autoregresyjnego przeprowadza się na szeregach czasowych pozbawionych trendu lub/i sezonowości. Badanie to przeprowadza się zatem na resztach modelu trendu i/lub sezonowości. Ze względu na fakt, że w szeregu czasowym liczby strat operacyjnych za okres t najczęściej przyjmuje się jeden rok rozważony zostanie w tym miejscu jedynie model trendu, który zapisać można w następującej postaci:

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{j=0}^{r} \alpha_j t^j + u_t \tag{10}$$

gdzie:

$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j t^j$ - składnik trendu

u_t - reszty modelu

Oszacowania funkcji korelacji można zaprezentować w postaci wykresu. Przeważnie w pakietach statystycznych współczynniki funkcji autokorelacji cząstkowej (Partial Autocorrelation Function – PACF) szacowane są razem ze współczynnikami funkcji autokorelacji (Autocorrelation Function - ACF). Wartości współczynników autokorelacji cząstkowej φ_{pp} przedstawione są na wykresie PA-

CF w postaci pionowych słupków. Poziome linie reprezentują wartości krytyczne określone jako:

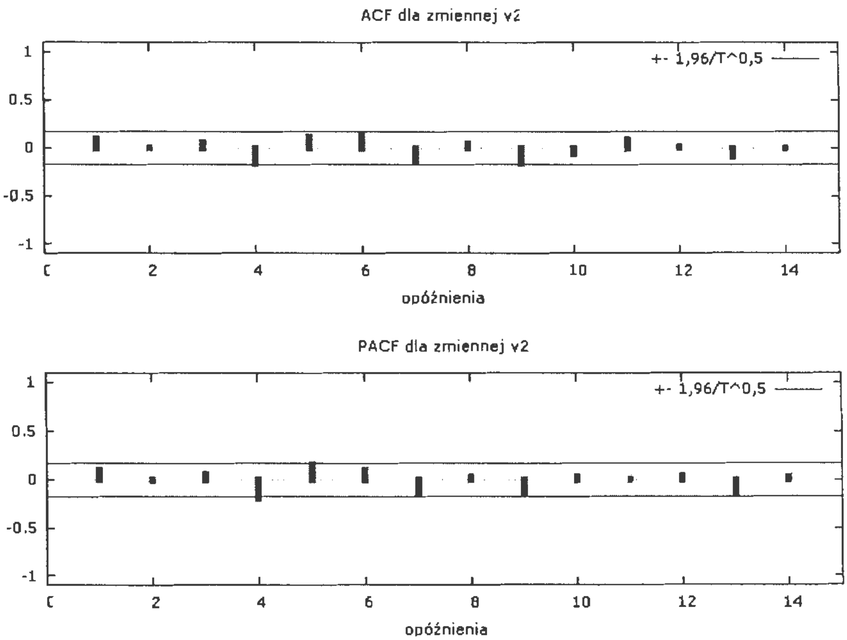
$$\frac{2}{\sqrt{n}}$$

gdzie:

n - liczebność próby

Wartość współczynnika autokorelacji φ_{pp} uznaje się za istotną jeśli:

$$\left|\hat{\varphi}_{pp}\right| \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$$



Wykres 1. Wykres funkcji autokorelacji oraz funkcji autokorelacji cząstkowej

Najczęściej stosowaną metodą estymacji parametrów modelu autoregresyjnego jest Klasyczna Metoda Najmniejszych Kwadratów. Szacowane są parametry następującego modelu reszt uzyskanych z modelu trendu szeregu czasowego liczba strat operacyjnych:

$$u_t = \sum_{i=1}^{p} \beta_i u_{t-i} + \varepsilon_t \tag{11}$$

gdzie:

p – rząd autoregresji

β_i - parametr modelu reszt

ε_t - proces resztowy

Parametry modelu autregresyjnego szeregu czasowego liczba strat operacyjnych mogą być szacowane jednocześnie z parametrami modelu trendu. W takim przypadku szacowane są parametry modelu:

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{j=0}^{r} \alpha_j t^j + \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{12}$$

gdzie:

x_t - liczba strat operacyjnych w okresie t

$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j t^j$ - składnik trendu

$\sum_{i=1}^{p} \beta_i x_{t-i}$ - składnik autoregresyjny

ε_t - proces resztowy

Za pomocą wyżej określonego modelu opisać można proces liczby strat operacyjnych. Model opisuje wewnętrzną strukturę dynamiczną procesu obejmującą składowe trendu oraz autoregresji.

Wnioski

Wykorzystanie modeli AR do badania wewnętrznej struktury procesu stochastycznego pozwala na identyfikację autoregresyjnego charakteru procesu. Zastosowanie modeli AR umożliwia wykazanie zależności pomiędzy obserwowanymi wartościami zmiennej w okresie t, a obserwowanymi wartościami zmiennej w okresie $t-p$. Zastosowanie zaprezentowanego podejścia w odniesieniu do modelowania liczby strat operacyjnych pozwala na identyfikację zależności pomiędzy liczbą strat operacyjnych w okresie t, a liczba strat operacyjnych w poprzednich okresach. Wykazanie tego typu zależności oznacza, że liczba strat operacyjnych z poprzednich okresów wpływa na kształtowanie się liczby strat operacyjnych w bieżącym okresie. Brak autoregresyjnego charakteru wyżej wymienionego procesu oznaczać będzie brak zależności pomiędzy liczbą strat operacyjnych w obecnym okresie, a liczbą strat operacyjnych w poprzednich okresach.

Literatura

[1]. Wojciech W. Haremza, Derek F. Deadman (1997): *Nowa ekonometria.* Warszawa, PWE.

[2]. *Ekonometria współczesna* (2007): pod red. M. Osińskiej, Wydawnictwo „Dom Organizatora", Toruń.

[3]. Harry H. Panjer (2006): *Operational risk. Modeling analytics.* Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc.

[4]. Dorota Witkowska (2006): *Podstawy ekonometrii i teorii prognozowania.* Oficyna Ekonomiczna.

[5]. *Zarządzanie ryzykiem* (2007): pod red. Krzysztofa Jajugi, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

[6]. Silvan Ebnother, Paulo Panini, Alexander McNeil, Pierre Antolinez-Fehr (2001): *Modelling operational risk.*

ISBN 9788389475220