



**INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

**TECHNIKI INFORMACYJNE  
TEORIA I ZASTOSOWANIA**

Wybrane problemy  
Tom 2 (14)

*poprzednio*

**ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH  
I ZARZĄDZANIU**

Pod redakcją  
Andrzeja MYŚLIŃSKIEGO

Warszawa 2012



**INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

**TECHNIKI INFORMACYJNE  
TEORIA I ZASTOSOWANIA**

Wybrane problemy  
Tom 2 (14)

*poprzednio*

**ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH  
I ZARZĄDZANIU**

Pod redakcją  
Andrzeja Myślińskiego

**Warszawa 2012**

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w  
niniejszym tomie:

Dr hab. inż. Andrzej MYŚLIŃSKI, prof. PAN

Dr hab. inż. Ryszard SMARZEWSKI, prof. KUL

Dr hab. Dominik ŚLĘZAK

Prof. dr hab. inż. Andrzej STRASZAK

Prof. dr hab. inż. Stanisław WALUKIEWICZ

Dr hab. Adam WIERZBICKI

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN  
Warszawa 2012

**ISBN 9788389475442**

# ALGORYTMIZACJA PROBLEMU RÓWNOWAGI ELEKTROSTATYCZNEJ

*Przemysław Rutka*

*Studia Doktoranckie IBS PAN  
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II  
e-mail: rootus@kul.lublin.pl*

**Streszczenie.** W niniejszej pracy zaprezentowany został wydajny algorytm rozwiązujący problem równowagi elektrostatycznej układu  $n$  dodatnich jednostkowych ładunków elektrostatycznych poruszających się swobodnie na przedziale  $(a, b)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego klasyczną wagą i odpychających się zgodnie z prawem potencjału logarymicznego. Ścisłej mówiąc algorytm ten znajduje położenie ładunków będących w stanie stabilnej równowagi elektrostatycznej oraz oblicza wartość całkowitej energii elektrostatycznej tego układu ładunków.

**Słowa kluczowe:** równowaga elektrostatyczna, równanie różniczkowe Pearsona, klasyczne wielomiany ortogonalne, potencjał logarymiczny, efektywne algorytmy.

## 1 WPROWADZENIE

Niech  $w(x)$  będzie dodatnią funkcją wagową określoną na skończonym lub nieskończonym przedziale  $(a, b)$ . Będziemy zakładać, że waga ta jest klasyczna, tzn. że spełnia ona równanie różniczkowe Pearsona

$$\frac{d}{dx} [A(x)w(x)] = B(x)w(x), \quad a < x < b,$$

z warunkami brzegowymi postaci

$$\lim_{x \downarrow a} A(x)w(x) = \lim_{x \uparrow b} A(x)w(x) = 0,$$

gdzie wielomiany rzeczywiste

$$A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{i} \quad B(x) = b_1x + b_0$$

są takie, że  $A(x) > 0$  na  $(a, b)$  i  $b_1 \neq 0$ .



Ponadto niech  $q_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , oznaczają ciąg wielomianów stopnia  $n$  ortogonalnych względem iloczynu skalarnego

$$(f, g)_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$$

w przestrzeni Hilberta  $L_w^2(a, b)$  z normą  $\|f\|_w = \sqrt{(f, f)_w}$ . Oznacza to, że zachodzą warunki

$$(q_j, q_k)_w = 0, \quad \text{gdy } j \neq k.$$

Jeżeli istnieje skończone lub nieskończone  $n_w$  takie, że wielomiany ortogonalne  $q_n(x)$ ,  $0 \leq n \leq n_w$ , są dodatkowo rozwiązaniami następującego równania różniczkowego Sturma-Liouville'a

$$\frac{d}{dx} \left[ A(x) w(x) \frac{d}{dx} q_n(x) \right] = \lambda_n w(x) q_n(x), \quad a < x < b, \quad (1)$$

ze współczynnikami  $\lambda_n$  równym

$$\lambda_n = n[(n-1)a_2 + b_1],$$

to wtedy ciąg  $q_n(x)$ ,  $0 \leq n \leq n_w$ , jest nazywany klasycznym [2, 7, 12, 20]. Na odwrót, liniowo niezależne wielomianowe  $L_w^2(a, b)$ -rozwiązania równania (1) są ortogonalne względem klasycznej wagi  $w(x)$  [1, 8, 9].

Zgodnie z powyższymi założeniami istnieje, z dokładnością do liniowej zmiany zmiennej, dokładnie sześć klas klasycznych wielomianów ortogonalnych [7, 8, 10]. Ściślej mówiąc istnieją trzy nieskończone ciągi  $q_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , klasycznych wielomianów ortogonalnych, którymi są:

- (i) wielomiany Hermite'a  $H_n(x)$ , gdy  $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ ,  $A(x) = 1$ ,  $B(x) = -2x$  oraz

$$w(x) = e^{-x^2},$$

- (ii) wielomiany Laguerre'a  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , jeśli  $(a, b) = (0, +\infty)$ ,  $A(x) = x$ ,  $B(x) = -x + \alpha + 1$ ,  $\alpha > -1$  oraz

$$w(x) = x^\alpha e^{-x},$$

- (iii) wielomiany Jacobiego  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , gdy  $(a, b) = (-1, 1)$ ,  $A(x) = -x^2 + 1$ ,  $B(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$  oraz

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

oraz trzy skończone ciągi  $q_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots, n_w$ , następujących klasycznych wielomianów ortogonalnych:

- (iv) uogólnionych wielomianów Bessel'a  $B_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , jeżeli  $(a, b) = (0, +\infty)$ ,  $A(x) = x^2$ ,  $B(x) = \alpha x + \beta$ ,  $\alpha < -1$ ,  $\alpha \notin \{-2, -3, \dots\}$ ,  $\beta > 0$  oraz

$$w(x) = x^{\alpha-2} e^{-\frac{\beta}{x}}, \quad n_w = \left\lfloor \frac{1-\alpha}{2} \right\rfloor,$$

gdzie  $\lfloor u \rfloor$  oznacza cechę liczby rzeczywistej  $u$ ,

- (v) wielomianów Jacobiego  $M_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  ortogonalnych na  $(0, +\infty)$ , gdy  $(a, b) = (0, +\infty)$ ,  $A(x) = x^2 + x$ ,  $B(x) = (2 - \alpha)x + \beta + 1$ ,  $\beta > -1$  oraz

$$w(x) = \frac{x^\beta}{(1+x)^{\alpha+\beta}}, \quad n_w = \left\lfloor \frac{\alpha-1}{2} \right\rfloor,$$

- (vi) wielomianów pseudo-Jacobiego  $J_n^{(\alpha, \beta, A, B, C, D)}(x)$ , jeśli  $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ ,

$$A(x) = x^2 + 2 \frac{AB + CD}{A^2 + C^2} x + \frac{B^2 + D^2}{A^2 + C^2},$$

$$B(x) = 2(1-\alpha)x + \frac{\beta(AD - BC) + 2(1-\alpha)(AB + CD)}{A^2 + C^2}$$

oraz

$$w(x) = \left[ \frac{(Ax + B)^2 + (Cx + D)^2}{A^2 + C^2} \right]^{-\alpha} e^{\beta \arctan \frac{(A^2 + C^2)x + AB + CD}{AD - BC}},$$

gdzie  $n_w = \lfloor \alpha - \frac{1}{2} \rfloor$ , zaś rzeczywiste parametry  $A, B, C, D$  są takie, że  $AD - BC > 0$  i  $A^2 + C^2 > 0$ .

Należy jeszcze podkreślić, że każdy ciąg klasycznych wielomianów ortogonalnych  $q_n(x)$ ,  $0 \leq n \leq n_w$ , spełnia pewną trójczłonową zależność rekurencyjną. W szczególności w przypadku monicznym, tzn. gdy współczynnik przy  $x^n$  wielomianu  $q_n(x)$  stopnia  $n$  wynosi 1, ta trójczłonowa zależność rekurencyjna ma następującą postać

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - c_0, \tag{2}$$

$$q_{n+1}(x) = (x - c_n) q_n(x) - d_n q_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Wiadomo [10], że współczynniki  $c_n$  i  $d_n$  we wzorze rekurencyjnym (2) są równe

$$c_n = -\frac{2na_1r_{n-1} - b_0(2a_2 - b_1)}{r_{2n-2}r_{2n}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$$d_n = nr_{n-2} \frac{s_{n-1}(r_{n-1}a_1 - a_2b_0) - a_0r_{2n-2}^2}{r_{2n-3}r_{2n-2}^2r_{2n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

o ile

$$r_k = ka_2 + b_1 \quad \text{i} \quad s_k = ka_1 + b_0.$$

W niniejszej pracy zaprezentowany został efektywny algorytm rozwiązujący problem równowagi elektrostatycznej układu  $n$  dodatnich jednostkowych ładunków elektrostatycznych poruszających się swobodnie na skończonym lub nieskończonym przedziale  $(a, b)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego nieruchomymi ładunkami gwarantowanymi obecnością dowolnej klasycznej wagi  $w(x)$ . Precyzyjniej mówiąc algorytm ten znajduje przybliżone położenie ładunków elektrostatycznych będących w stanie stabilnej równowagi oraz oblicza wartość całkowitej energii elektrostatycznej tego układu ładunków. Konstrukcja algorytmu opiera się na rezultatach przedstawionych ostatnio w publikacji [13], gdzie podano jednolite i kompletne rozwiązanie problemu równowagi elektrostatycznej. Należy podkreślić, że to rozwiązanie pokrywa się ze znalezionymi wcześniej przez Stieltjesa [16–18], Scheonberga [14] oraz Szegő [21] rozwiązaniami problemu równowagi elektrostatycznej w szczególnym przypadku klasycznych wag Jacobiego, Hermite'a i Laguerre'a. W związku z tym należy także wspomnieć o ważnych osiągnięciach w tym kierunku zreferowanych w monografiach [6] oraz [5] i zauważyć, że nowe ujednocnione podejście do problemu pozwoliło na znaczne skrócenie i uproszczenie klasycznych dowodów.

## 2 ORTOGONALNOŚĆ A RÓWNOWAGA ELEKTROSTATYCZNA ŁADUNKÓW

Pod koniec XIX wieku T. J. Stieltjes [16–18] zaproponował jedną z najciekawszych i najładniejszych w historii interpretacji łączącą klasyczne wielomiany ortogonalne z elektrostatyką. Odkrył on mianowicie, iż zera ortogonalnego wielomianu Jacobiego wskazują miejsce, w którym pewien układ ładunków elektrostatycznych osiąga punkt stabilnej równowagi

elektrostatycznej. Ściślej mówiąc chodzi o układ elektrostatyczny, w którym w przedziale  $(-1, 1)$  porusza się swobodnie  $n$  dodatnich jednostkowych ładunków elektrostatycznych w obecności dodatkowego zewnętrznego potencjału generowanego przez dwa dodatnie ładunki. Te zewnętrzne ładunki mają masy równe  $(\beta + 1)/2$  oraz  $(\alpha + 1)/2$  i są ustalone odpowiednio w punktach  $-1$  i  $1$ . Co więcej wszystkie ładunki, zarówno swobodne jak i stałe, odpychają się zgodnie z prawem potencjału logarytmicznego, co oznacza że siła ich oddziaływania jest odwrotnie proporcjonalna do ich odległości. W takiej sytuacji okazało się, że swobodnie poruszające się ładunki spoczną, osiągając stabilną równowagę elektrostatyczną, dokładnie w zerach  $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$  wielomianu Jacobiego  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  stopnia  $n$ . Dowód tego faktu wymagał znalezienia minimum całkowitej energii elektrostatycznej układu ładunków, stanowiącej sumę energii wzajemnych oddziaływań ładunków swobodnych i energii związanej z zewnętrznym potencjałem tworzonym przez ładunki stałe. Przy okazji jednocześnie okazało się, że minimalna wartość tej całkowitej energii jest ściśle powiązana z dyskryminantem wielomianu Jacobiego  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .

Problem równowagi elektrostatycznej układu ładunków był później jeszcze wielokrotnie badany przez licznych autorów. Został on na przykład rozwiązany także dla swobodnych ładunków poruszających się na prostej i półprostej w obecności zewnętrznego potencjału generowanego stałymi ładunkami gwarantowanymi obecnością klasycznych wag Hermite'a i Laguerre'a [14, 21]. Znalezione również zostały formuły pozwalające obliczać wartość całkowitej energii układu ładunków w punkcie ich stabilnej równowagi elektrostatycznej, bez jawnej znajomości zer klasycznych wielomianów ortogonalnych Jacobiego, Hermite'a i Laguerre'a [6, 14]. Dalsze twórcze rozwinięcie problemu równowagi elektrostatycznej zostało przedstawione w monografii [6], gdzie cytuje się szereg publikacji związanych z tą tematyką (zobacz także [5, 11, 22]).

Bazując na wspomnianych rezultatach sformułowane zostało ostatnio w pracy [13] kompletne i ujednoczone rozwiązanie problemu równowagi elektrostatycznej, uwzględniające także układy ładunków poruszających się swobodnie na przedziale  $(0, +\infty)$  lub  $(-\infty, +\infty)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego klasycznymi wagami, związanymi ze skończonymi ciągami wielomianów ortogonalnych, tzn. uogólnionymi wielomianami Bessel'a, Jacobiego na  $(0, +\infty)$  i pseudo-Jacobiego. W szczególności zauważono najpierw, że rozwiązanie problemu równowagi elektrostatycznej wymaga znalezienia punktów  $x_1 < \dots < x_n$ , w których

funkcja

$$T_{w_1}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^n w_1(z_j) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (z_j - z_k)^2, \quad a < z_1 < \dots < z_n < b,$$

gdzie  $w_1(x) = A(x)w(x)$ , osiąga swoje maksimum globalne oraz wymaga podania jawnego wzoru na tę wartość maksymalną. Wiadomo bowiem [5, 6, 21], że układ  $n$  swobodnych ładunków elektrostatycznych poruszających się w obecności zewnętrznego potencjału generowanego klasyczną wagą osiąga stabilną równowagę, wtedy gdy jego całkowita energia elektrostatyczna przyjmuje wartość minimalną równą

$$L_{w_1}(x_1, \dots, x_n) = \ln T_{w_1}^{-1/2}(x_1, \dots, x_n).$$

Wykorzystując następnie klasyczny fakt [21], iż pochodne cząstkowe  $\frac{\partial T_{w_1}(x_1, \dots, x_n)}{\partial z_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zerują się w tych samych punktach  $x_1, \dots, x_n$  co rozwiązania równania różniczkowego Sturm-Liouville'a (1) wykazano, że problem elektrostatyczny

$$\max_{a < z_1 < \dots < z_n < b} T_{w_1}(z_1, \dots, z_n) = T_{w_1}(x_1, \dots, x_n), \quad 0 < n \leq n_w,$$

ma jednoznaczne rozwiązanie  $x_1 < \dots < x_n$  w przedziale  $(a, b)$ , które stanowią punkty  $x_1, \dots, x_n$  będące zerami klasycznego wielomianu  $q_n(x)$ , ortogonalnego względem wagi  $w(x)$ . Wartość maksymalna

$$T_n = T_{w_1}(x_1, \dots, x_n)$$

została natomiast obliczona stosując metodę pochodzącą od Schur'a [15] i Hilbert'a [4], która dała w wyniku

$$T_n = (-1)^n [(2n-1)a_2 + b_1]^n \prod_{k=1}^n d_k^k w(x_k),$$

gdzie współczynniki  $d_k$  są zdefiniowane tak samo jak we wzorze (3). Niezwykle ciekawym okazał się przy tym fakt, iż dla każdego z sześciu klasycznych wielomianów ortogonalnych istnieje sposób [6, 13, 14] wyeliminowania zer  $x_1, \dots, x_n$  z iloczynu  $\prod_{k=1}^n w(x_k)$ . Dzięki temu wszystkie wartości ekstremalne  $T_n$  mogły zostać przedstawione w następujących postaciach nie zależących jawnie od tych zer.

(a) Waga Hermite'a:

$$T_n = (2e)^{-n(n-1)/2} \prod_{k=1}^n k^k,$$

(b) Waga Laguerre'a:

$$T_n = e^{-n(n+\alpha)} \prod_{k=1}^n k^k (k+\alpha)^{k+\alpha},$$

(c) Waga Jacobiego:

$$T_n = 2^{n(n+\alpha+\beta+1)} \prod_{k=1}^n \frac{k^k (k+\alpha)^{k+\alpha} (k+\beta)^{k+\beta}}{(n+k+\alpha+\beta)^{n+k+\alpha+\beta}},$$

(d) Uogólniona waga Bessel'a:

$$T_n = (-1)^{n(n+2\alpha-1)/2} (\beta e)^{n(n+\alpha-1)} \prod_{k=1}^n \frac{k^k}{(n+k+\alpha-2)^{n+k+\alpha-2}},$$

(e) Waga Jacobiego na  $(0, +\infty)$ :

$$T_n = (-1)^{n(1-\alpha)} \prod_{k=1}^n \frac{k^k (k+\beta)^{k+\beta} (k-\alpha-\beta)^k}{(n+k-\alpha)^{n+k-\alpha} (\alpha+\beta-n+k-1)^{\alpha+\beta}},$$

(f) Waga pseudo-Jacobiego:

$$T_n = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \left( \frac{AD - BC}{A^2 + C^2} \right)^{n(n+1-2\alpha)} \\ \times \prod_{k=1}^n \frac{e^{-\beta \arctan \frac{\beta}{2(k-\alpha)}} k^k [4(k-\alpha)^2 + \beta^2]^{k-\alpha}}{(n+k-2\alpha)^{n+k-2\alpha}}.$$

### 3 ALGORYTM

Przytoczone w poprzedniej sekcji rezultaty pozwalają na sformułowanie numerycznego algorytmu rozwiązującego problem równowagi elektrostatycznej układu  $n$  dodatnich jednostkowych ładunków elektrostatycznych poruszających się na przedziale  $(a, b)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego klasyczną wagą  $w(x)$ . Ścisłej mówiąc algorytm ten znajduje położenie ładunków elektrostatycznych, w którym osiągają one stan stabilnej równowagi elektrostatycznej oraz oblicza wartość całkowitej energii elektrostatycznej tego zrównoważonego układu ładunków.

Zgodnie z [13] szukane położenie ładunków elektrostatycznych znajduje się w zerach odpowiedniego klasycznego wielomianu ortogonalnego

$q_n(x)$ . Zatem w pierwszej kolejności algorytm oblicza przybliżone wartości zer tego klasycznego wielomianu ortogonalnego. Najprościej można to zrealizować za pomocą zmodyfikowanej bisekcji [3, 19], działającej w oparciu o badanie liczby zmian znaku  $\sigma(x)$  w ciągu Sturm'a postaci

$$q_0(x) = 1, -q_1(x), q_2(x), \dots, (-1)^n q_n(x). \quad (4)$$

Przy tym bisekcję należy rozpocząć od dowolnego ograniczonego przedziału  $[\hat{a}, \hat{b}]$  zawierającego wszystkie zera wielomianu  $q_n(x)$ . Końce tego przedziału można wyznaczyć posługując się chociażby twierdzeniem Gerzgorina [19].

Jeśli zaś chodzi o obliczanie wartości całkowitej energii elektrostatycznej  $L_{w_1} = \ln T_n^{-1/2}$  układu  $n$  ładunków elektrostatycznych pozostających w stanie stabilnej równowagi, to najlepiej jest w tym celu wykorzystać wzory zebrane w Tabeli 1, które wynikają bezpośrednio ze wzorów podanych w podpunktach (a) – (f).

**Tabela 1.** Wartości całkowitej energii elektrostatycznej  $L_{w_1}$  pozostających w stanie stabilnej równowagi układów  $n$  dodatnich jednostkowych ładunków elektrostatycznych powiązanych z poszczególnymi klasycznymi wagami.

Waga klasyczna	Wartość całkowitej energii elektrostatycznej
Hermite'a	$\frac{1+\ln 2}{4}n(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n k \ln k$
Laguerre'a	$\frac{n(n+\alpha)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n [k \ln k + (k+\alpha) \ln(k+\alpha)]$
Jacobiego	$-\frac{\ln 2}{2}n(n+\alpha+\beta+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n [k \ln k + (k+\alpha) \ln(k+\alpha) + (k+\beta) \ln(k+\beta) - (n+k+\alpha+\beta) \ln(n+k+\alpha+\beta)],$
Uogólniona waga Bessel'a	$-\frac{1+\ln \beta}{2}n(n+\alpha-1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n [k \ln k - (n+k+\alpha-2) \ln(2-n-k-\alpha)]$
Jacobiego na $(0, +\infty)$	$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n [k \ln k + (k+\beta) \ln(k+\beta) + k \ln(\alpha+\beta-k) - (n+k-\alpha) \ln(\alpha-n-k) - (\alpha+\beta) \ln(\alpha+\beta-n+k-1)]$
Pseudo-Jacobiego	$-\frac{1}{2} \ln \left( \frac{AD-BC}{A^2+C^2} \right) n(n+1-2\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \beta \arctan \frac{\beta}{2(k-\alpha)} - k \ln k - (k-\alpha) \ln [4(k-\alpha)^2 + \beta^2] + (n+k-2\alpha) \ln(2\alpha-n-k) \right\}$

Pełne sformułowanie numerycznego algorytmu rozwiązującego problem równowagi elektrostatycznej układu ładunków elektrostatycznych powiązanego z klasyczną wagą można przedstawić w postaci następującego Algorytmu 3.1.

**Algorytm 3.1.** Problem równowagi elektrostatycznej układu  $n$  dodatnich jednostkowych ładunków elektrostatycznych poruszających się swobodnie na przedziale  $(a, b)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego klasyczną wagą  $w(x)$  i odpychających się zgodnie z prawem potencjału logarytmicznego.

**Wejście:** Liczby rzeczywiste  $a_2, a_1, a_0, b_1, b_0$  definiujące klasyczną wagę  $w(x)$ , liczba całkowita  $n > 0$  określająca liczbę ładunków swobodnych oraz liczba rzeczywista  $prec$  określająca dokładność obliczeń.

**Wyjście:** Punkty  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wyznaczające przybliżone, z dokładnością  $prec$ , położenie ładunków swobodnych pozostających w stanie równowagi elektrostatycznej oraz wartość  $L_{w_1}$  całkowitej energii elektrostatycznej tego układu.

1. Dla każdego  $k = 1, 2, \dots, n$  wykonaj:

1.1. Oblicz korzystając z formuły (3) liczby  $\hat{a}$  i  $\hat{b}$  takie, że

$$\hat{b} = -\hat{a} = \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \left| \sqrt{d_j} \right| + |c_j| + \left| \sqrt{d_{j+1}} \right| \right\}, \quad d_0 = d_n = 0.$$

1.2. Dopóki  $\hat{b} - \hat{a} > prec$  wykonaj:

1.2.1.  $x_k = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}$ .

1.2.2. Jeżeli  $\sigma(x_k) < k$ , to

1.2.2.1.  $\hat{a} = x_k$

1.2.3. w przeciwnym wypadku

1.2.3.1.  $\hat{b} = x_k$

1.3.  $x_k = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}$ .

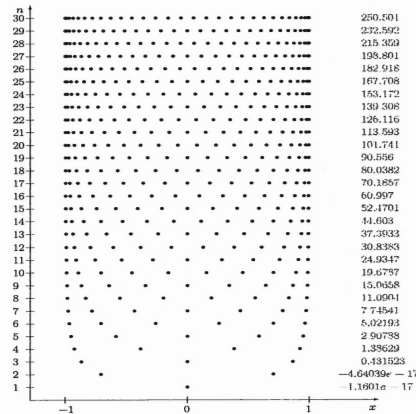
2. Zwróć punkty  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

3. Oblicz wartość  $L_{w_1}$  wykorzystując odpowiednią, w zależności od współczynników  $a_2, a_1, a_0, b_1, b_0$ , formułę z Tabeli 1 i zwróć wartość  $L_{w_1}$ .

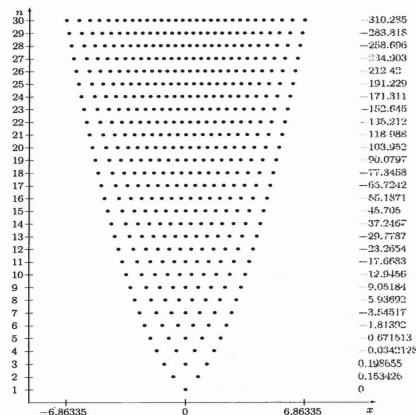
Podajmy jeszcze krótkiej analizie złożoność obliczeniową Algorytmu 3.1. Łatwo mianowicie zauważyć, że jego koszt jest proporcjonalny do  $n^2$ , przy czym współczynnik tej proporcjonalności zależy jedynie od żądanej dokładności  $prec$  obliczeń. Na koszt ten wpływa najbardziej konieczność powtarzania bisekcji, której złożoność obliczeniowa jak wiadomo jest rzędu  $O(n)$ , dla każdego z  $n$  zer monicznego wielomianu ortogonalnego  $q_n(x)$ . Wszystkie pozostałe elementy algorytmu, w szczególności znajdowanie skończonych granic przedziału  $[\hat{a}, \hat{b}]$  zawierającego wszystkie szukane zera oraz obliczanie liczby zmian znaku  $\sigma(x)$  w ciągu Sturm (4), można już zrealizować kosztem  $O(n)$  operacji elementarnych.



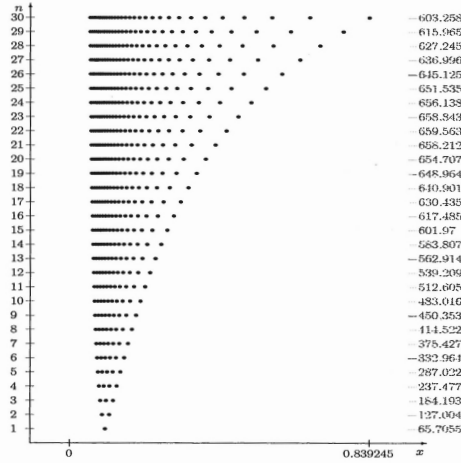
Na koniec przytaczamy w postaci rysunków Rys. 1 – 5 eksperymenty numeryczne przeprowadzone dla Algorytmu 3.1 w przypadku wagi Jacobiego, wagi Hermite'a, uogólnionej wagi Bessel'a, wagi pseudo-Jacobiego oraz wagi Jacobiego na  $(0, +\infty)$ . Poszczególne ilustracje prezentują położenia na przedziale  $(a, b)$  układów złożonych z  $n = 1, 2, \dots, 30$  ładunków elektrostatycznych znajdujących się w stanie stabilnej równowagi elektrostatycznej. Dodatkowo po prawej stronie każdego układu ładunków podana jest wartość jego całkowitej energii elektrostatycznej.



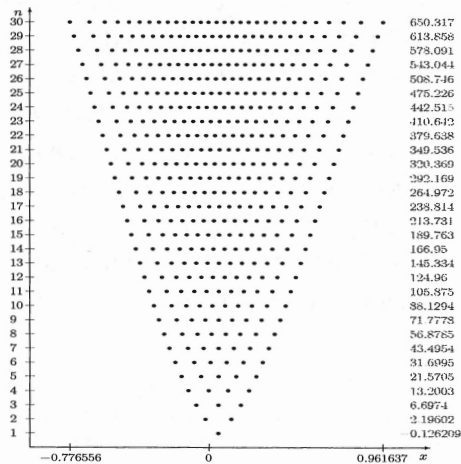
**Rys. 1.** Położenia stabilnej równowagi elektrostatycznej, wraz z odpowiadającymi wartościami  $L_{w_1}$  całkowitej energii elektrostatycznej układów  $n = 1, \dots, 30$  ładunków elektrostatycznych poruszających się na przedziale  $(-1, 1)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego wagą Czebyszewa I rodzaju (tzn. wagą Jacobiego z parametrami  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ).



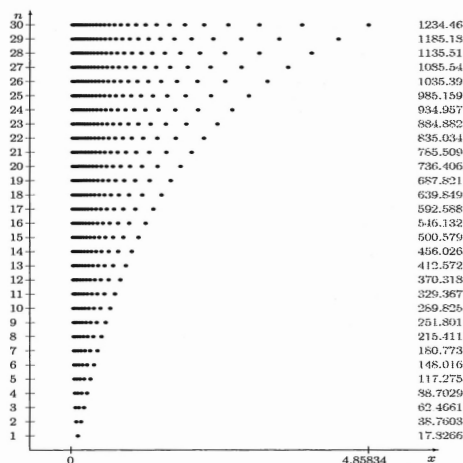
**Rys. 2.** Położenia stabilnej równowagi elektrostatycznej, wraz z odpowiadającymi wartościami  $L_{w_1}$  całkowitej energii elektrostatycznej układów  $n = 1, \dots, 30$  ładunków elektrostatycznych poruszających się na przedziale  $(-\infty, +\infty)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego wagą Hermite'a.



**Rys. 3.** Położenia stabilnej równowagi elektrostatycznej, wraz z odpowiadającymi wartościami  $L_{w_1}$  całkowitej energii elektrostatycznej układów  $n = 1, \dots, 30$  ładunków elektrostatycznych poruszających się na przedziale  $(0, +\infty)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego uogólnioną wagą Bessel'a z parametrami  $\alpha = -100.5$  i  $\beta = 10$ .



**Rys. 4.** Położenia stabilnej równowagi elektrostatycznej, wraz z odpowiadającymi wartościami  $L_{w_1}$  całkowitej energii elektrostatycznej układów  $n = 1, \dots, 30$  ładunków elektrostatycznych poruszających się na przedziale  $(-\infty, +\infty)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego wagą pseudo-Jacobiego z parametrami  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 10$ ,  $A = D = 1$  i  $B = C = 0$ .



**Rys. 5.** Położenia stabilnej równowagi elektrostatycznej, wraz z odpowiadającymi wartościami  $L_{w_1}$  całkowitej energii elektrostatycznej układów  $n = 1, \dots, 30$  ładunków elektrostatycznych poruszających się na przedziale  $(0, +\infty)$  w obecności zewnętrznego potencjału generowanego wagą Jacobiego na  $(0, +\infty)$  z parametrami  $\alpha = 100$  i  $\beta = 10$ .

#### 4 PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowany został wydajny numeryczny algorytm rzędu  $O(n^2)$  rozwiązujący problem równowagi elektrostatycznej dla wszystkich klasycznych wag. Algorytm ten znajduje z zadaną dokładnością położenie na przedziale  $(a, b)$  układu  $n$  ładunków elektrostatycznych, które pozostają w stanie stabilnej równowagi elektrostatycznej w obecności zewnętrznego potencjału generowanego klasyczną wagą oraz oblicza wartość całkowitej energii elektrostatycznej tego układu ładunków. Konstrukcja algorytmu bazuje na jednolitym i kompletnym rozwiązaniu problemu równowagi elektrostatycznej zaprezentowanym ostatnio w [13].

#### Literatura

1. Bochner, S. (1929) Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. *Mathematische Zeitschrift*, **29**, 730–736.
2. Chihara, T. S. (1978) *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, vol. 13 of *Mathematics and its Applications*. Gordon and Breach.
3. Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1983) *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press.
4. Hilbert, D. (1888) Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **103**, 337–345.
5. Ismail, M. E. H. (2005) *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, vol. 98 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press.

6. Karlin, S. and Studden, W. J. (1966) *Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics*. Interscience Publishers.
7. Koekoek, R., Lesky, P. A., and Swarttouw, R. F. (2010) *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their  $q$ -Analogues*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag.
8. Koepf, W. and Masjed-Jamei, M. (2006) A generic polynomial solution for the differential equation of hypergeometric type and six sequences of orthogonal polynomials related to it. *Integral Transforms and Special Functions*, **17**, 559–576.
9. Lesky, P. (1962) Die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome durch Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **10**, 341–351.
10. Lesky, P. A. (2005) *Eine Charakterisierung der klassischen kontinuierlichen-, diskreten- und  $q$ -Orthogonalpolynome*. Shaker Verlag.
11. Marcellán, F., Martínez-Finkelshtein, A., and Martínez-González, P. (2007) Electrostatic models for zeros of polynomials: Old, new, and some open problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **207**, 258–272.
12. Mastroianni, G. and Milovanović, G. V. (2008) *Interpolation Processes, Basic Theory and Applications*. Springer-Verlag.
13. Rutka, P. and Smarzewski, R. (2012) Complete solution of the electrostatic equilibrium problem for classical weights. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 6027–6037.
14. Schoenberg, I. J. (1959) On the maxima of certain Hankel determinants and the zeros of the classical orthogonal polynomials. *Indagationes Mathematicae*, **62**, 282–290.
15. Schur, I. (1931) Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **165**, 52–58.
16. Stieltjes, T. J. (1885) Sur les polynômes de Jacobi. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, **100**, 620–622.
17. Stieltjes, T. J. (1885) Sur quelques théorèmes d'Algèbre. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, **100**, 439–440.
18. Stieltjes, T. J. (1887) Sur les racines de l'équation  $X_n = 0$ . *Acta Mathematica*, **9**, 385–400.
19. Stoer, J. and Bulirsch, R. (1987) *Wstęp do Analizy Numerycznej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
20. Suetin, P. K. (1979) *Classical Orthogonal Polynomials (in Russian)*. Nauka.
21. Szegő, G. (1975) *Orthogonal Polynomials*, vol. XXIII of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, fourth ed.
22. Valent, G. and Van Assche, W. (1995) The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional material. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **65**, 419–447.

## ALGORITHMIZATION OF THE ELECTROSTATIC EQUILIBRIUM PROBLEM

**Abstract.** In this paper we present an efficient algorithm which solves the electrostatic equilibrium problem of the system of  $n$  positive unit charges. This system contains charges moving freely on interval  $(a, b)$  in the presence of additional external potential generated by classical weight and repelling each other according to the logarithmic potential law. More precisely the algorithm finds a position of charges being in a state of stable electrostatic equilibrium and calculates a value of the total electrostatic energy of this system of charges.



ISBN 9788389475442