



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

**STANISŁAW PIASECKI**

**ELEMENTY TEORII NIEZAWODNOŚCI  
I EKSPLOATACJI OBIEKTÓW  
O ELEMENTACH WIELOSTANOWYCH**

**dla inżynierów**

Warszawa 1995

**ELEMENTY TEORII NIEZAWODNOŚCI  
I EKSPLOATACJI OBIEKTÓW  
O ELEMENTACH WIELOSTANOWYCH**

dla inżynierów

**STANISŁAW PIASECKI**

Warszawa 1995

11  
12  
13  
14  
15

16  
17

## O NIEZAWODNOŚCI ELEMENTU

Przypomnijmy podstawowe założenia klasycznej, dwustanowej teorii niezawodności. Opiera się ona o pojęcie prawdopodobieństwa przejścia ze stanu "0" do stanu "1" lub przeciwnie, przy tym prawdopodobieństwo przejścia ze stanu "0" do stanu "1" nazywamy prawdopodobieństwem uszkodzenia. Wielkość tę oznaczamy symbolem  $P_{ij}(t, \tau)$  i odczytujemy jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $i = 0, 1$ , w jakim znajdował się element w chwili  $t$  do stanu  $j = 0, 1$  po upływie czasu  $\tau$  (w chwili  $t + \tau$ ). Przedział  $(0, t)$  jest dotychczasowym czasem pracy elementu. Dla elementu nowego mamy  $t = 0$ . Jeżeli proces uszkodzeń jest procesem jednorodnym w czasie, to wartość  $P_{ij}(t, \tau)$  nie zależy od  $t$ , co w skrócie zapisujemy w postaci  $P_{ij}(\tau)$  i interpretujemy jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  po upływie czasu  $\tau$ .

W tym miejscu teoria niezawodności styka się z teorią odnowy i teorią masowej obsługi. W klasycznej teorii niezawodności przyjmuje się bowiem, że elementy są nieanaprawialne, to znaczy  $p_{10}(t, \tau) = 0$ . W odróżnieniu od powyższego, w teorii masowej obsługi przejście ze stanu  $i = 1$  do stanu  $j = 0$  jest możliwe i następuje po pewnym czasie zwanym czasem obsługi. Zdarzeniu nazywanym w teorii niezawodności uszkodzeniem, w teorii masowej obsługi odpowiada zdarzenie polegające na zgłoszeniu klienta do obsługi. Z kolei, zdarzenie przeciwne w teorii masowej obsługi jest nazywane zakończeniem obsługi.

Teoria odnowy zakłada także możliwość przejścia ze stanu  $i = 1$  do stanu  $j = 0$  nazywając to zdarzenie odnową, z tym zastrzeżeniem, że klasyczna teoria odnowy zakłada, iż jest to zdarzenie natychmiastowe, tak że zdarzenie uszkodzenia pociąga za sobą natychmiastowe zdarzenie odnowienia. Próby rozszerzenia zastosowań teorii odnowy prowadzą do uwzględnienia faktu, że odnowa nie występuje natychmiast i wtedy różnica między teorią odnowy a teorią masowej obsługi sprowadza się do jednego, lecz istotnego faktu. W teorii masowej obsługi uwzględnia się skończone możliwości systemu obsługi, a więc że system obsługi nie może jednocześnie odnawiać nieskończenie wiele zgłoszeń.

Wracając do klasycznej teorii niezawodności wiemy, że będą nas interesowały dwie wielkości:  $p_{01}(t, \tau)$  oraz  $p_{00}(t, \tau) = 1 - p_{01}(t, \tau)$ , ponieważ  $p_{10}(t, \tau) = 0$  i  $p_{11}(t, \tau) = 1$ . Charakterystyczną cechą procesów teorii niezawodności jest więc to, że rozpatrujemy je przy warunku początkowym *element nieuszkodzony* (stan  $i = 0$ ).

Ważną charakterystyką procesu uszkodzeń jest *szybkość narastania wartości*  $p_{01}(t, \tau)$  w zależności od wzrostu  $\tau$ . Wielkość tę nazywamy *intensywnością uszkodzeń*, oznaczamy symbolem  $\lambda_{01}(t)$  oraz definiujemy następująco:

$$\lambda_{01}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(t, \tau) - p_{01}(t, 0)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} p_{01}(t, \tau) \Big|_{\tau = 0}$$

Definiuje się także intensywność przeciwną

$$\lambda_{00}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{00}(t, \tau) - p_{00}(t, 0)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} p_{00}(t, \tau) \Big|_{\tau=0}$$

Zauważmy, że biorąc pod uwagę warunki początkowe

$$p_{01}(t, 0) = 0$$

$$p_{00}(t, 0) = 1$$

możemy także napisać:

$$\lambda_{01}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(t, \tau)}{\tau}$$

$$\lambda_{00}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{00}(t, \tau) - 1}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-p_{01}(t, \tau)}{\tau} = -\lambda_{01}(t)$$

Z ostatniej równości wynika:

$$\lambda_{01}(t) + \lambda_{00}(t) = 0$$

co jest odpowiednikiem równości:

$$p_{01}(t) + p_{00}(t) = 1$$

Ponieważ, jak wiemy, proces uszkodzeń jest procesem Markowa, więc dla procesu dwustanowego ogólne równania Kolmogorowa będą miały postać:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{01}(t, \tau) = p_{00}(t, \tau) \cdot \lambda_{01}(t+\tau) + p_{01}(t, \tau) \cdot \lambda_{10}(t+\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{00}(t, \tau) = p_{00}(t, \tau) \cdot \lambda_{00}(t+\tau) + p_{01}(t, \tau) \cdot \lambda_{10}(t+\tau)$$

Ponieważ  $\lambda_{10}(t) = \lambda_{11}(t) = 0$ , to układ równań sprowadza się do dwóch (zależnych) równań różniczkowych.

Rozwiązując drugie równanie z określonym poprzednio warunkiem początkowym otrzymamy:

$$p_{00}(t, \tau) = \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda_{01}(u) du \right\} ,$$

a stąd

$$p_{01}(t, \tau) = 1 - p_{00}(t, \tau) = 1 - \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda_{01}(u) du \right\} .$$

Wielkość  $p_{01}(t, \tau)$  nazywamy *funkcją niezawodności* i oznaczamy symbolem  $R(t, \tau)$ . Wartość  $R(t, \tau)$  jest prawdopodobieństwem, że w odcinku czasu  $[t, t+\tau]$  nie nastąpi uszkodzenie (oczywiście, jeżeli element w chwili  $t$  był nieuszkodzony).

Wielkość  $p_{01}(t, \tau)$  nazywamy *prawdopodobieństwem uszkodzenia* i oznaczamy ją zwykle symbolem  $F(t, \tau)$ . Wartość  $F(t, \tau)$  jest prawdopodobieństwem uszkodzenia elementu w odcinku czasu  $(t, t+\tau)$  (oczywiście, w chwili  $t$  nieuszkodzonego).

Między wielkościami  $R(t, \tau)$  i  $F(t, \tau)$  zachodzą oczywiste związki:

$$R(t, \tau) = 1 - F(t, \tau)$$

oraz

$$\frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} = -f(t, \tau); \quad \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = f(t, \tau)$$

Jeżeli proces uszkodzeń jest jednorodny w czasie, to funkcje  $\lambda_{01}(t)$  oraz  $\lambda_{00}(t)$  oznaczamy często symbolami  $\lambda_1(t) = \lambda$  i  $\lambda_0(t) = -\lambda$ . Są one funkcjami stałymi, a więc liczbami. W takim przypadku proces uszkodzeń elementu scharakteryzowany jest jedną liczbą  $\lambda$ .

Zwróćmy uwagę na to, że każda dystrybuanta uszkodzeń  $F(t, \tau)$  jest w pełni zdefiniowana funkcją  $\lambda(t)$ , gdyż

$$f(t, \tau) = 1 - \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda(u) du \right\}$$

Przebieg funkcji  $f(0, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(0, \tau)$ ;  $R(0, \tau)$  oraz  $\lambda(t)$  dla rozkładu logarytmo-normalnego i Weibulla są pokazane na rys. 1 i 2.

## O NIEZAWODNOŚCI SYSTEMU

Rozpatrzmy system składający się z dwóch elementów A i B. Jak wiemy z klasycznej teorii niezawodności, w takim przypadku mogą występować tylko dwie sensowne struktury niezawodnościowe:

**równoległa:** system jest uszkodzony (w stanie 1) wtedy i tylko wtedy kiedy obydwa elementy są uszkodzone, a więc gdy para elementów jest w stanie (1, 1).

szeregowa: system jest zdalny (w stanie 0) wtedy i tylko wtedy kiedy obydwa elementy są nieuszkodzone, a więc gdy para elementów jest w stanie (0,0).

Znając więc niezawodność elementów i rodzaj struktury (równoległa czy szeregową) możemy wyznaczyć niezawodność systemu. Dla struktury:

- równoległej

$$F(\tau) = P_{01}^A(\tau) \cdot P_{01}^B(\tau)$$

oraz

$$R(\tau) = 1 - F(\tau) = 1 - P_{01}^A(\tau) \cdot P_{01}^B(\tau)$$

- szeregowej

$$R(\tau) = P_{00}^A(\tau) \cdot P_{00}^B(\tau)$$

oraz

$$F(\tau) = 1 - R(\tau) = 1 - P_{00}^A(\tau) \cdot P_{00}^B(\tau)$$

W szczególności, jeżeli

$$P_{01}^A(\tau) = F^A(\tau) = 1 - e^{-\lambda^A \cdot \tau}$$

$$P_{01}^B(\tau) = F^B(\tau) = 1 - e^{-\lambda^B \cdot \tau}$$

to otrzymamy dla struktury

- równoległej

$$F(t) = \left(1 - e^{-\lambda^A \cdot \tau}\right) \left(1 - e^{-\lambda^B \cdot \tau}\right) = \left(1 - e^{-\lambda \cdot \tau}\right)^2 \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \tau}\right)^2 \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

- szeregowej

$$R(\tau) = e^{-(\lambda^A + \lambda^B) \cdot \tau} = e^{-2\lambda \tau} \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

$$F(\tau) = 1 - R(\tau) = 1 - e^{-2\lambda\tau}$$

$$\text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

Jednakże tak proste rozważania wystarczą tylko w tym przypadku gdy uszkodzenia elementów są od siebie całkowicie niezależne. Jest to założenie w wielu przypadkach niemożliwe do przyjęcia. Wtedy niezbędnym staje się aparat procesów wielostanowych. Oczywiście, także niezbędna jest znajomość struktury uwarunkowań procesu uszkodzeń poszczególnych elementów. Fizycznie, uszkodzenie elementu może zależeć od stanu innych współpracujących elementów. Może się zdarzyć także sytuacja, że uszkodzenie elementów zależy od czynnika zewnętrznego: stresu. W takim przypadku czynnik zewnętrzny należy włączyć jako dodatkowy element systemu sprowadzając ten przypadek do poprzedniego, gdy uszkodzenie jednego elementu zależy od stanu innego (lub innych).

Przykładem zależności uszkodzeń jest praca dwóch elementów na wspólne obciążenie (np. dwóch prądnic). Wtedy uszkodzenie jednego z nich powoduje, że drugi musi przyjąć na siebie całość obciążenia, co oczywiście zwiększa możliwość jego uszkodzenia.

Oznaczmy symbolem  $p_{00,1}^A(t,\tau)$  prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu A (przejście w stan  $j = 1$ ) po czasie  $\tau$ , jeżeli w chwili  $t$  obydwa elementy (A, B) były zdadne w stanie (0, 0). Podobnie  $p_{01,1}^A(t,\tau)$  odczytujemy jako prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu A po czasie  $\tau$ , jeżeli w chwili  $t$  element B był uszkodzony, zaś element A - nieuszkodzony.

W przypadku uszkodzeń zależnych mamy:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) \neq p_{01,1}^A(t,\tau)$$

natomiast dla uszkodzeń niezależnych:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) = p_{01,1}^A(t,\tau)$$

co umożliwia nam uproszczenie oznaczeń według następującej zasady:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) = p_{01,1}^A(t,\tau) = p_{0,1}^A(t,\tau)$$

W rezultacie, dla dwóch elementów możemy wyróżnić następujące cztery sensowne struktury uwarunkowań:

1. Uszkodzenie elementu A nie zależy od stanu B i przeciwnie - uszkodzenie B nie zależy od stanu A).
2. Uszkodzenie elementu A zależy od stanu elementu B, lecz uszkodzenie elementu B nie zależy od stanu elementu A.
3. Uszkodzenie elementu B zależy od stanu elementu A, lecz uszkodzenie elementu A nie zależy od stanu elementu B,
4. Uszkodzenie elementu A zależy od stanu elementu B i podobnie - B zależy od A.

Jeżeli system składa się z większej liczby elementów, to możliwe przypadki struktury uwarunkowań mogą być bardzo skomplikowane.

Przyjmując, przykładowo, czwartą strukturę uwarunkowań i szeregową strukturę niezawodności, otrzymamy:



$$P_{00,00}(t,\tau) = P_{00,0}^A(t,\tau) \cdot P_{00,0}^B(t,\tau) = R(t,\tau)$$

Zauważmy, że w przypadku gdy struktura niezawodnościowa systemu jest szeregową, nieważna jest struktura uwarunkowań. Prawdopodobieństwo uszkodzenia takiego systemu nie zależy od tego, czy uszkodzenia są zależne czy też nie. Dotyczy to każdego systemu szeregowego, niezależnie od liczby jego elementów.

Wracając do naszego przykładu systemu o strukturze równoległej i zależnych uszkodzeniach, zauważmy że wtedy dla wyznaczenia wartości

$$P_{00,11}(t,\tau) = F(t,\tau)$$

potrzebna jest znajomość zależności:

$$P_{00,10}(t,\tau) = P_{00,1}^A(t,\tau) \cdot P_{00,0}^B(t,\tau)$$

$$P_{10,11}(t,\tau) = P_{10,1}^A(t,\tau) \cdot P_{10,1}^B(t,\tau) = P_{10,1}^B \quad \text{gdyż } P_{10,1}^A(t,\tau) = 1$$

oraz

$$P_{00,01}(t,\tau) = P_{00,0}^A(t,\tau) \cdot P_{00,1}^B(t,\tau)$$

$$P_{01,11}(t,\tau) = P_{01,1}^A(t,\tau) \cdot P_{01,1}^B(t,\tau) = P_{01,1}^A(t,\tau) \quad \text{gdyż } P_{01,1}^B(t,\tau) = 1$$

Procedurą wyznaczania wartości  $F(t,\tau)$  dla takiego przypadku zajmiemy się nieco dalej. Obecnie zwróćmy uwagę, że dla opisu zachowania się dwuelementowego równoległego systemu, przy zależnych uszkodzeniach, konieczna i wystarczająca jest znajomość czterech funkcji:

$$P_{00,01}(t,\tau) ; \quad P_{00,1}^B(t,\tau) ;$$

$$P_{01,1}^A(t,\tau) ; \quad P_{10,1}^B(t,\tau) ;$$

lub odpowiednio funkcji intensywności:

$$\lambda_{00,1}^A(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_{00,1}^B(t) = \alpha^B(t)$$

$$\lambda_{01,1}^A(t) = \beta^A(t)$$

$$\lambda_{10,1}^B(t) = \beta^B(t)$$

Jeśli natomiast uszkodzenia są niezależne, to do opisu wystarcza znajomość tylko dwóch funkcji

$$P_{01}^A(t,\tau)$$

$$P_{01}^B(t,\tau)$$

lub odpowiednio funkcji

$$\lambda_0^A(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_0^B(t) = \alpha^B(t)$$

Jeżeli zaś procesy uszkodzeń są jednorodne w czasie, to - odpowiednio czterech liczb:  $\alpha^A$ ,  $\alpha^B$ ,  $\beta^A$ ,  $\beta^B$  (dla uszkodzeń zależnych) lub dwóch liczb  $\alpha^A$ ,  $\alpha^B$  (dla uszkodzeń niezależnych).

Celem wyznaczenia wartości  $F(t, \tau)$  dla takiego dwuelementowego systemu, widoczną staje się potrzeba wyróżnienia czterech stanów: (0,0); (0,1); (1,0) i (1,1) o intensywnościach przejścia:

$$\lambda_{00,10}(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_{00,01}(t) = \alpha^B(t)$$

$$\lambda_{01,11}(t) = \beta^A(t)$$

$$\lambda_{10,11}(t) = \beta^B(t)$$

przy czym

$$\alpha^A(t) \leq \beta^A(t);$$

$$\alpha^B(t) \leq \beta^B(t).$$

Jednakże trudności opisu procesu uszkodzeń systemu składającego się z dwóch fizycznych elementów komplikują się dalej, jeżeli zwrócimy uwagę, że uszkodzenia mogą być różnego rodzaju. Jednocześnie zauważmy, że jeżeli celem naszych wysiłków jest podniesienie niezawodności wyrobów, to istotną jest dla nas informacja o rodzaju uszkodzenia, a nie tylko stwierdzenia faktu, że nastąpiło uszkodzenie. Wynika to z tego, że znając rodzaj uszkodzenia możemy znaleźć przyczynę uszkodzenia, a ta informacja pozwala na przedsięwzięcie odpowiednich zabiegów technologicznych celem usunięcia przyczyn powstawania uszkodzeń. W rezultacie, praktycznie zawsze podczas badań niezawodności, mamy do czynienia z wieloma stanami - jednym stanem zdatności i wieloma, różniącymi się rodzajem uszkodzeń, stanami niezdatności. W rezultacie, w wyniku badań otrzymujemy oszacowanie wielu funkcji intensywności przejścia  $\lambda_1(t)$ ;  $\lambda_2(t)$ ;  $\lambda_3(t)$  ... ze stanu zdatności (0) do poszczególnych rodzajów stanów niezdatności 1, 2, 3, ... . Przy tym, w wielu przypadkach proste sumowanie tych intensywności dla wyznaczenia intensywności uszkodzeń w ogóle nie ma sensu.

Sytuację taką przedstawia nam następujący przykład:

#### PRZYKŁAD I. O NIEZAWODNOŚCI I STRUKTURZE NIEZAWODNOŚCIOWEJ SYSTEMU DWUELEMENTOWEGO

Żałómy, że prostownik, przekształcający prąd przemienny na prąd stały składa się z dwóch szeregowo połączonych ogniw półprzewodnikowych, które wraz z kondensatorami i dławikami tworzą układ prostowniczy. Układ ten jest w małym stopniu obciążony, natomiast pracuje pod dużym napięciem (jak, na przykład, w układzie zasilania lampy kineskopowej w odbiorniku telewizyjnym). W celu

zwiększenia niezawodności układu, połączono szeregowo dwa wspomniane ogniwa półprzewodnikowe A i B obniżając w ten sposób dwukrotnie napięcie pracy każdego z nich.

Jeżeli symbolem  $\lambda(v)$  oznaczamy zmierzoną laboratoryjnie intensywność uszkodzenia ogniwa, która jest zależna od napięcia pracy  $v$ , to opisany sposób podwyższenia niezawodności zasilania ma tylko wtedy sens gdy zachodzi nierówność:

$$\lambda(v) > 2 \cdot \lambda\left(\frac{v}{2}\right)$$

gdzie:  $v$  - jest napięciem pracy prostownika. Załóżmy, że równość ta jest spełniona.

W celu uproszczenia zapisu dalej będziemy stosowali oznaczenia

$$\lambda(v) = \alpha \quad \lambda\left(\frac{v}{2}\right) = \beta$$

Ponieważ połączenie ogniw jest szeregowo, więc funkcja niezawodności  $R(t)$  prostownika (pomijając uszkodzenia innych elementów) będzie wyrażała się wzorem:

$$R(t) = P_{00,00}(t) = P_{00,0}^A(t) \cdot P_{00,0}^B(t) = e^{-2\beta t}$$

i to niezależnie od tego czy uszkodzenia ogniw są zależne, czy też nie.

Jednakże zagadnienie określenia struktury niezawodnościowej komplikuje się, gdy zwrócimy uwagę, że uszkodzenia ogniw półprzewodnikowych mogą być dwójakiego rodzaju, bowiem intensywność uszkodzeń  $\lambda(v)$  w rzeczywistości jest sumą dwóch składników:

$\lambda_1(v)$  - intensywności uszkodzeń polegających na zniszczeniu (przebicciu) warstwy izolacyjnej półprzewodnika, co prowadzi do zwarcia ogniwa,

$\lambda_2(v)$  - intensywności uszkodzeń polegających na całkowitej utracie zdolności przewodzenia co prowadzi do powstania przerwy w obwodzie ogniwa.

Przy tym, oczywiście:

$$\lambda(v) = \lambda_1(v) + \lambda_2(v)$$

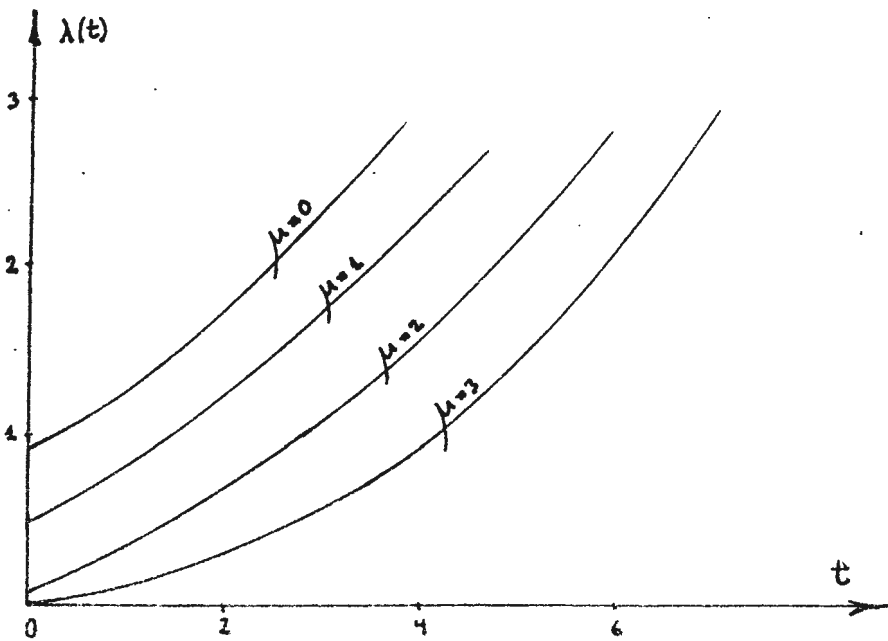
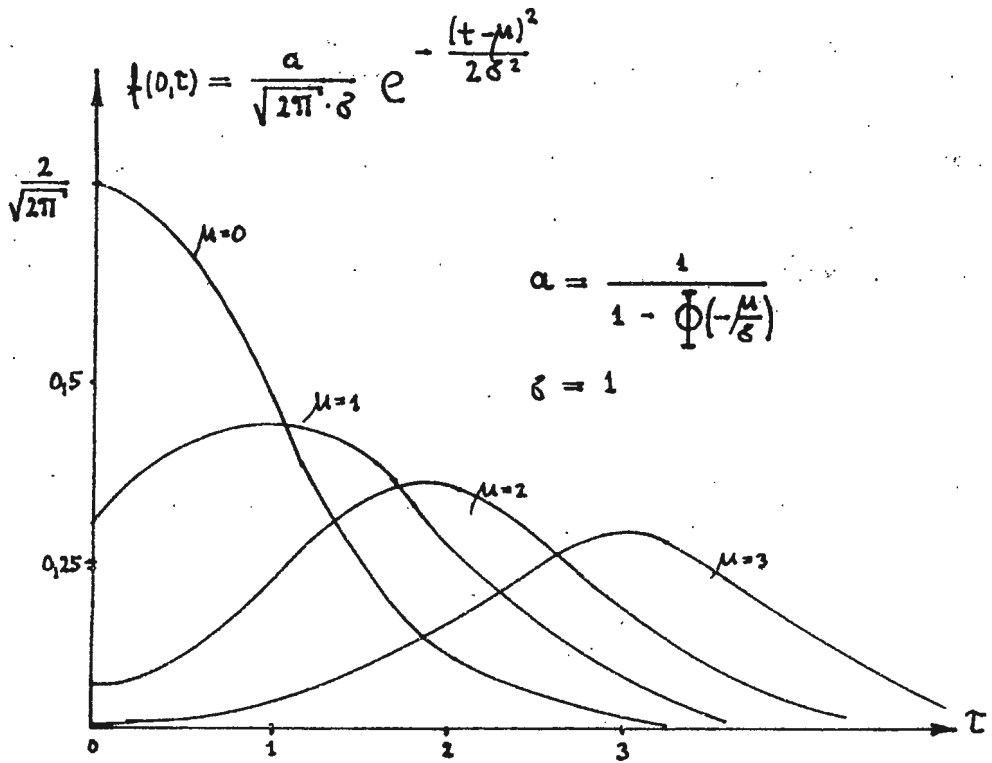
Jeżeli będziemy rozpatrywali tylko pierwszą składową (zakładając, że druga składowa jest pomijalnie mała), to niezawodnościowa struktura układu jest równoległa. Jeżeli ponadto nie uwzględnimy, że wartość  $\lambda_1$  zależy od  $v$ , a więc jeżeli założymy, że

$$\lambda_1(v) = \alpha_1 = \text{const.}$$

to przy niezależnych uszkodzeniach ogniw otrzymamy funkcję niezawodności układu o postaci:

$$R(t) = 1 - P_{00,11}(t) = 1 - \left[1 - P_{00}^A(t)\right] \cdot \left[1 - P_{00}^B(t)\right] = 1 - \left(1 - e^{-\alpha_1 t}\right)^2$$

Założmy obecnie, że wartość  $\lambda_1$  zależy od  $v$ , tak jak to jest w rzeczywistości. Wtedy nie możemy już przyjąć, że uszkodzenia są niezależne, gdyż uszkodzenie



Rys.1 Uciety rozkład normalny

ogniwa zależy od tego, czy drugie ogniwo jest uszkodzone (wtedy pracuje pod napięciem  $v$ ), czy też nie (wtedy pracuje pod napięciem  $\frac{v}{2}$ ).

Aby wyznaczyć  $R(t)$  gdy  $\lambda_2 \approx 0$ , a więc dla struktury równoległej, należy zauważyć, że uszkodzenie układu prostowniczego jest określone sumą następujących elementarnych, wzajemnie wykluczających się zdarzeń.

- że w chwili  $\tau$  ( $0 < \tau \leq t$ ) uszkodzi się jedno z dwóch ogniw (i żadne nie uszkodziło się do tej chwili), a następnie, że w pozostałym odcinku czasu  $(\tau, t)$  uszkodziło się pozostałe ogniwo.

Prawdopodobieństwo takiego, elementarnego zdarzenia jest równe:

$$2\beta_1 \cdot e^{-2\beta_1\tau} \cdot \left[ 1 - e^{-\alpha_1 \cdot (t-\tau)} \right] d\tau$$

Sumując elementarne prawdopodobieństwa w odcinku czasu od  $\tau = 0$  do  $\tau = t$  i odejmując od jedności otrzymamy:

$$R(t) = 1 - 2\beta_1 \int_0^t e^{-2\beta_1\tau} \left[ 1 - e^{-\alpha_1(t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= \frac{\alpha_1 e^{-2\beta_1 t} - 2\beta_1 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1 - 2\beta_1}$$

Zauważmy, że gdy podstawiamy

$$\alpha_1 = \beta_1 = \lambda_1$$

to otrzymamy poprzedni wzór na wartość  $R(t)$ , gdy uszkodzenia były niezależne. Pozostaje jednak dalej problem, co zrobić, gdy obie składowe ( $\lambda_1$  oraz  $\lambda_2$ ) są współmierne? Jaka jest struktura niezawodnościowa prostownika - szeregowy czy równoległy?

Przeanalizujemy ten przypadek. Początkowo określimy zbiór elementarnych zdarzeń, wzajemnie wykluczających się, które powodują uszkodzenia prostownika. Zauważmy, że w tym przypadku mamy dwa rodzaje uszkodzeń.

Pierwszego rodzaju zdarzeniem będzie występowanie przerwy w którymkolwiek z ogniw przed wystąpieniem zwarcia. Drugiego rodzaju zdarzenie to wystąpienie zwarcia w którymkolwiek ogniwie przed wystąpieniem przerwy, a następnie wystąpienie zwarcia lub przerwy w pozostałym ogniwie.

Prawdopodobieństwo elementarnego zdarzenia pierwszego rodzaju, jeżeli przerwa wystąpiła dokładnie w chwili  $\tau$ , będzie równe:

$$2\beta_2 e^{-2\beta_2\tau} e^{-2\beta_1 t}$$

Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia pierwszego rodzaju będzie równe wartości wyrażenia:

$$2\beta_2 \int_0^t e^{-2(\beta_1 + \beta_2)\tau} d\tau = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \left[ 1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} \right]$$

Zdarzenie drugiego rodzaju składa się z dwóch kolejnych zdarzeń elementarnych:

- zwarcia jednego z ogniw w chwili  $\tau$  przy czym  $0 < \tau \leq t$

oraz

- zwarcia lub przerwy drugiego ogniwa w chwili  $x$  przy czym  $\tau < x \leq t$ .

Prawdopodobieństwo drugiego w kolejności zdarzenia elementarnego jest równe:

$$\alpha_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(x - t)} dx + \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(x - \tau)} dx$$

Stąd, całkując po  $x$  otrzymamy prawdopodobieństwo drugiego w kolejności zdarzenia

$$1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)}$$

Jest to prawdopodobieństwo, że w odcinku czasu  $(t - \tau)$  nastąpi uszkodzenie pozostałego ogniwa, bądź z powodu zwarcia, bądź przerwy. Ostatecznie prawdopodobieństwo elementarnego zdarzenia drugiego rodzaju będzie określone wyrażeniem:

$$2\beta_1 e^{-2(\beta_1 + \beta_2)\tau} \left[ 1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right] d\tau$$

Całkując to wyrażenie względem  $\tau$  otrzymamy:

$$\beta_1 \frac{1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t}}{\beta_1 + \beta_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2}$$

Sumując prawdopodobieństwo zdarzeń pierwszego i drugiego rodzaju oraz odejmując tę sumę od jedności, otrzymamy następującą postać funkcji niezawodności.

$$R(t) = e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - 2\beta_1 \frac{e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2}$$

W przypadku gdy  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$  otrzymamy wzór poprzedni. Jeżeli dodatkowo  $\alpha_1 = \beta_1 = \text{const.}$ , to otrzymamy znany wzór dla struktury równoległej i niezależnych uszkodzeń. W przypadku gdy  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  otrzymamy znany wzór dla struktury szeregowej.

Rozważmy teraz przypadek, gdy celem zwiększenia niezawodności prostownika połączono równolegle dwa ogniwa półprzewodnikowe A i B. Ponieważ obciążenie prądowe prostownika wysokiego napięcia jest niewielkie, to chociaż prądowe obciążenie każdego z dwóch ogniw zmniejszyło się dwukrotnie, to nie wpłynęło to znacząco na zmianę ich niezawodności. Załóżmy, że w przybliżeniu niezawodność każdego z nich nie zmieniła się. Przyjmijmy, tak jak poprzednio, że występują uszkodzenia ogniwo dwójakiego rodzaju - typu zwarcie lub przerwa.

Zauważmy, że - podobnie jak poprzednio - w przypadku uszkodzenia typu przerwa, jak również w przypadku uszkodzenia typu zwarcie, prawdopodobieństwo takiego uszkodzenia elementarnego będzie równe:

$$2\alpha_1 e^{-2\alpha_1 \tau} + 2\alpha_2 e^{-2\alpha_2 \tau} dt$$

Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia typu zwarcie będzie równe:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[ 1 - e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right]$$

Dla elementarnego, podwójnego zdarzenia typu przerwa, a następnie zwarcie lub przerwa, prawdopodobieństwo takiego zdarzenia będzie równe:

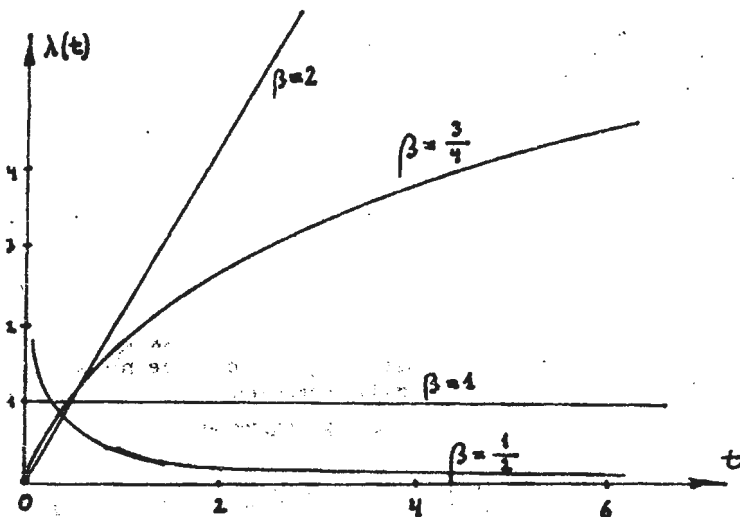
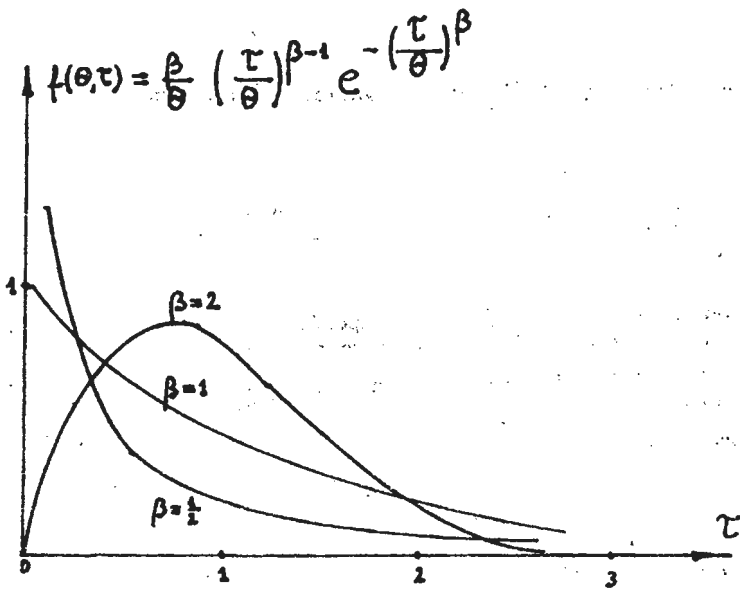
$$2\alpha_2 e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} \left[ 1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right] dt$$

Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia typu przerwa będzie równe:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[ 1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right]$$

Odejmując sumę prawdopodobieństw obu typów uszkodzeń od jedności otrzymamy funkcję niezawodności takiego układu:

$$R(t) = \frac{e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[ 2\alpha_2 - (\alpha_2 - \alpha_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right]$$



Rys.2 Rozkład Weibulla



Zauważmy, że w przypadku gdy  $\alpha_2 = 0$  otrzymamy funkcję niezawodności dla układu szeregowego:

$$R(t) = e^{-2\alpha_1 t}$$

choć ogólnie są połączone równolegle. Przeciwnie, jeżeli  $\alpha_1 = 0$ , to otrzymamy:

$$R(t) = 2e^{-\alpha_2 t} - e^{-2\alpha_2 t} = 1 - [1 - e^{-\alpha_2 t}]^2$$

Można także zauważyć, że taki sposób zwiększania niezawodności układu ma sens tylko wtedy, kiedy zachodzi nierówność  $\alpha_1 < \alpha_2$ .

To, który z tych dwóch sposobów zwiększania niezawodności układu należy wybrać zależy od stosunku wartości  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $2\beta_1$ ,  $2\beta_2$ . Decyduje o tym porównanie wartości dwóch wyrażeń:

$$R(t) = e^{-2\beta_1 t} - \frac{e^{-2\beta_1 t} - e^{-at}}{a - 2\beta_1}, \quad a - 2\beta_1 > 0$$

dla szeregowo połączonych ogniw oraz

$$R(t) = \frac{e^{-at}}{a} [2\alpha - ae^{-at}], \quad \alpha_1 < \alpha_2$$

dla równolegle połączonych ogniw, przy tym:

$$a = \alpha_1 + \alpha_2$$

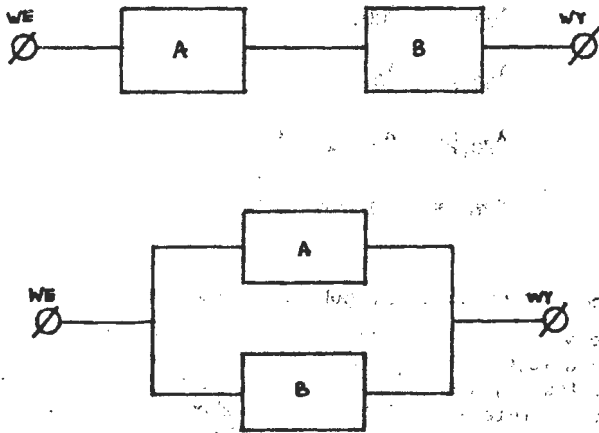
$$b = \beta_1 + \beta_2$$

Rozważony przykład poucza nas, jak wielką lekkomyślnością jest traktowanie różnych uszkodzeń jako uszkodzeń w ogólności i że nie ma sensu suma intensywności  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  różnego rodzaju uszkodzeń.

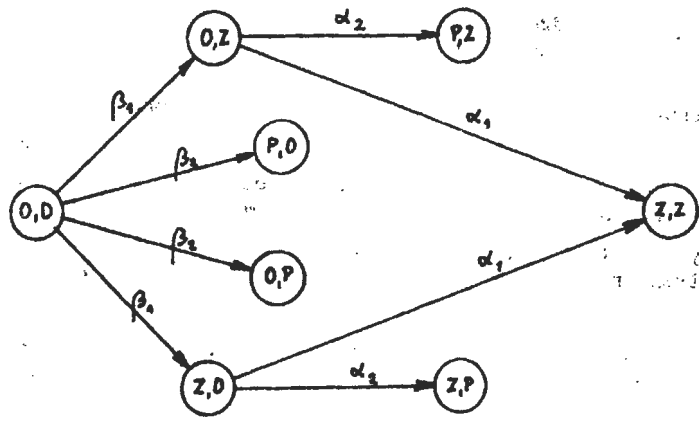
#### KONIEC PRZYKŁADU

Z przykładu wynika, że istnieje wyraźna zależność struktury niezawodnościowej nie tylko od budowy układu, ale także od rodzaju rozpatrywanego uszkodzenia. W przypadku gdy występują różnego rodzaju (pod względem fizycznym) uszkodzenia, pojęcie struktury niezawodnościowej staje się nieprzydatne. W takich sytuacjach zmuszeni jesteśmy do analizy bardzo złożonych zdarzeń, co znakomicie powiększa możliwość popełnienia pomyłki. Ułatwieniem w takich przypadkach jest rozszerzenie zbioru rozpatrywanych stanów.

Oznaczając symbolem Z - zwarcie, a symbolem P - przerwę, w przypadku szeregowego połączenia prostowników należałoby wyróżnić następujące stany: (0,0) - pełnej zdatności, (Z,0) i (0,Z) - niepełnej zdatności oraz (Z,P); (Z,Z); (P,0)



Rys.3 "Szeregowa" a) oraz "równoległa" struktura niezawodnościowa systemu (obiekту) dwuelementowego



Rys.4 Struktura procesu uszkodzeń dwuelementowego prostownika o szeregowej strukturze niezawodnościowej

1 (0,P) - niezdatności. Intensywności przejścia byłyby równe:

$$\lambda_{00,Z0} = \lambda_{00,OZ} = \beta_1$$

$$\lambda_{00,PO} = \lambda_{00,OP} = \beta_2$$

$$\lambda_{Z0,ZZ} = \lambda_{OZ,ZZ} = \alpha_1$$

$$\lambda_{Z0,ZP} = \lambda_{OZ,PZ} = \alpha_2$$

Struktura takiego procesu uszkodzeń jest pokazana na rys. 4.

Następnie należy rozwiązać zadanie polegające na wyznaczeniu prawdopodobieństw przejść ze stanu (0,0) do poszczególnych interesujących nas stanów. Zauważmy przy tym, że takie przedstawienie procesu umożliwia nam wyznaczenie prawdopodobieństwa szczególnie niebezpiecznego uszkodzenia - zwarcia całego układu. Będzie ono równe prawdopodobieństwu osiągnięcia stanu ZZ.

#### STRUKTURA SYSTEMU I PROCESU

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na konieczność ścisłego odróżnienia:

- struktury procesu uszkodzeń (rys. 4) oraz
- struktury niezawodnościowej systemu (rys. 3)

W strukturze procesu

- elementami struktury są stany obiektu fizycznego (systemu)

natomiast

- relacjami wiążącymi te stany są możliwości (procesy) przejścia (ze stanu na stan) wyrażone ilościowo intensywnościami lub prawdopodobieństwami przejścia.

W strukturze systemu (obiektu) fizycznego.

- elementami struktury są fizyczne elementy (składniki) systemu (obiektu)

natomiast

- relacjami wiążącymi te elementy są możliwości przepływu czynnika wiążącego je w całość (zwykle jest nim prąd elektryczny, ciecz lub inne czynniki).

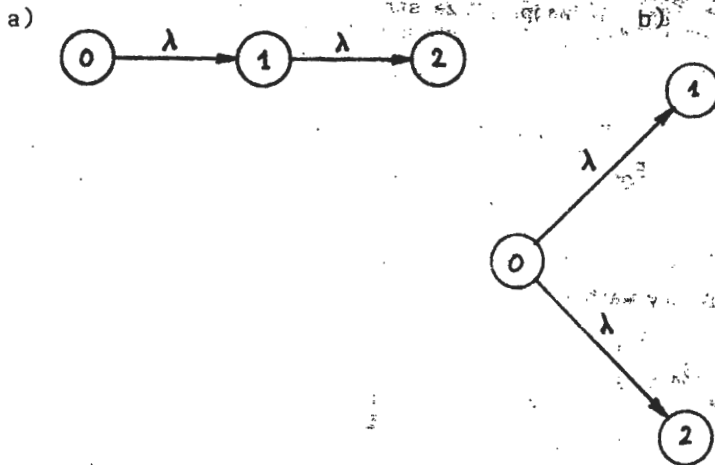
W ostatnim przypadku uszkodzenie równoznaczne jest z przerwaniem możliwości przepływu czynnika z wejścia do wyjścia.

Różnicę między tymi pojęciami pokażemy na najprostszym przykładzie systemu dwuelementowego oraz procesu o dwóch relacjach.

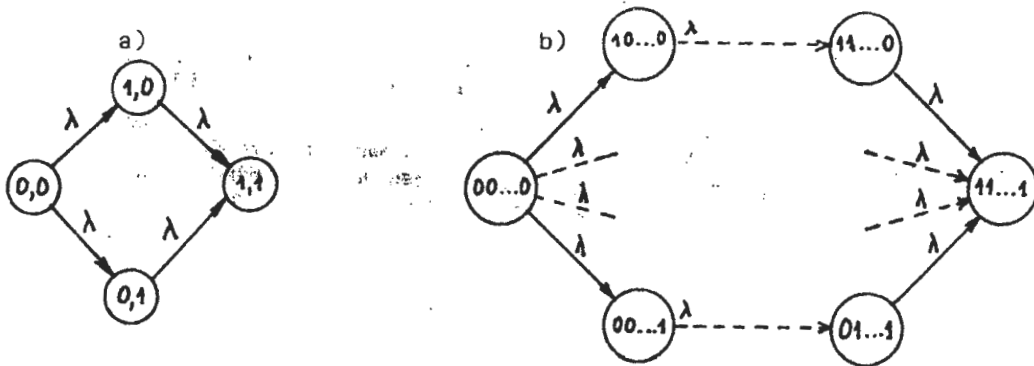
Na rys. 3 mamy pokazane dwie struktury systemu: a) szeregową i b) równoległą.

Jak wiemy, jeśli intensywności uszkodzeń są równe, to dla przypadku a) mamy

$$F(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$$



Rys.5 Struktura a) "łańcuchowa" oraz b) "wachlarzowa" procesu uszkodzeń



Rys.6 Struktura procesu uszkodzeń dla: a) systemu dwuelementowego b) systemu wieloelementowego o strukturze równoległej

oraz

$$f(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^2$$

dla przypadku b) i niezależnych uszkodzeniach.

Dla struktury szeregowej relacjami są pary: (WE,A) (A,B) (B,WY).

Dla struktury równoległej relacjami są pary: (WE,A) (WE,B), (A,WY) (B,WY).

Na rysunku 5 pokazane są dwie najprostsze struktury procesu uszkodzeń. Na rys.

5a struktura łańcuchowa, na rys. 5b struktura typu wachlarz.

Dla struktury łańcuchowej:

$$P_{02}(t) = F(t) = 1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}$$

natomiast dla struktury wachlarzowej mamy:

$$P_{01}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}] \quad P_{02}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}]$$

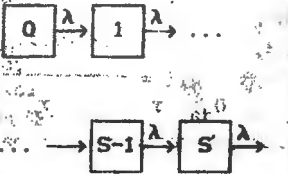
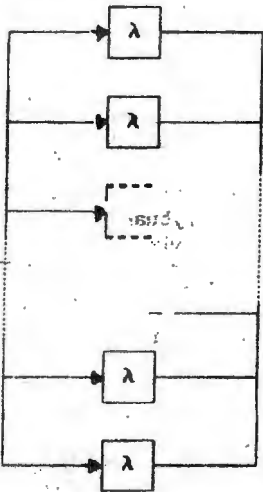
Przyjmując, że obiekt jest uszkodzony jeżeli jest w stanie: 1 lub 2 otrzymamy

$$F(t) = P_{01}(t) + P_{02}(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$$

Dla struktury łańcuchowej relacjami są pary: (0,1) (1,2), a dla wachlarzowej - pary: (0,1) (0,2).

Zauważmy, że o ile dystrybuenta  $F(t)$  czasu poprawnej pracy do uszkodzenia jest taka sama dla systemu szeregowego oraz procesu wachlarzowego, to nie zachodzi takie podobieństwo dla systemu równoległego i procesu łańcuchowego.

TABLICA I

Rozkład Erlanga	Rozkład potęgowo-wykładniczy
$m = \frac{S}{\lambda}$	$m = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$
$\sigma^2 = \frac{S}{\lambda^2}$	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[ 2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n^3(n-1)!} - \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \right]$
$\Lambda(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{S-1}}{(S-1)! \sum_{s=0}^{S-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!}}$	$\Lambda(t) = N\lambda e^{-\lambda t} \frac{[1 - e^{-\lambda t}]^{N-1}}{1 - [1 - e^{-\lambda t}]^N}$
	
$\Lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt} F(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)}$	
$\int_0^t \Lambda(x) dx = - \int_0^t \frac{\frac{d}{dx} R(x)}{R(x)} dx = - \ln R(t)$	$R(t) = 1 - F(t)$

Weźmy dla przykładu system N-elementowy o strukturze równoległej i niezależnych uszkodzeniach, dla którego dystrybuanta ma postać rozkładu potęgowo-wykładniczego

$$F(t) = [F_1(t)]^N$$

gdzie  $F_1(t)$  - dystrybuanta pojedynczego elementu.

W przypadku gdy

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

otrzymamy

$$F(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^N$$

Podobnie weźmy proces łańcuchowy składający się z S podprocesów o stanach  $s = 0, 1, 2, \dots, S$ . Wtedy dystrybuanta dla końcowego stanu S będzie miała postać rozkładu Erlanga

$$P_{OS}(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!}$$

Jeżeli intensywności przejścia mają te same wartości  $\lambda$ , a dystrybuanta czasu każdego podprocesu ma postać wykładniczą. Pełniejszą charakterystykę tych rozkładów znajdzie Czytelnik w TABELI I i na rys. 7.

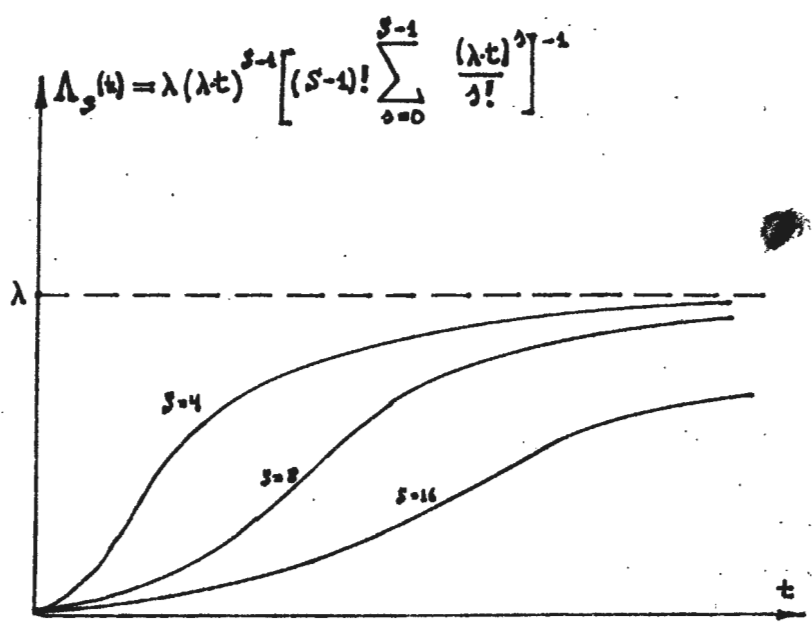
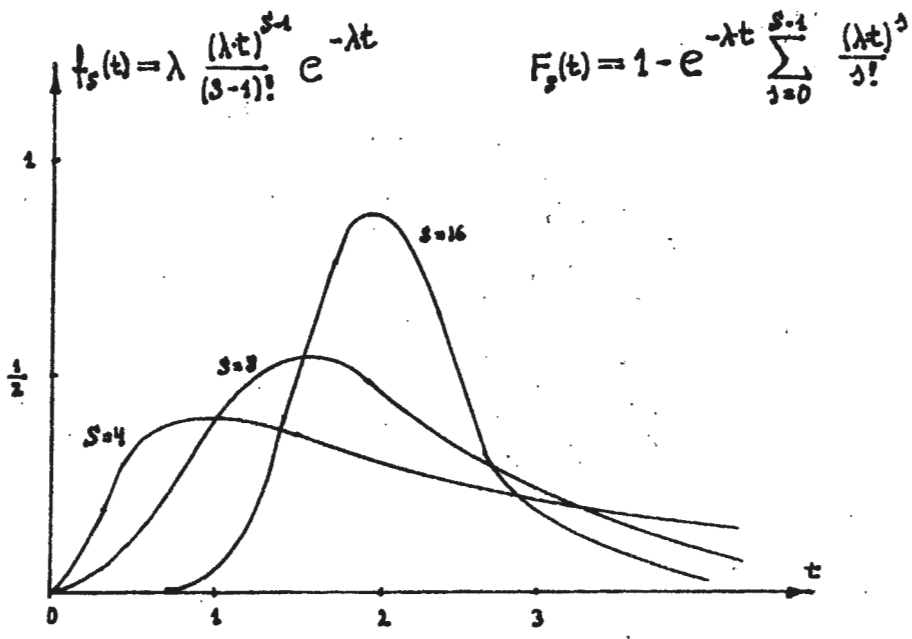
Dystrybuanty te są różne, gdyż mechanizmy procesu uszkodzeń są różne. Zwróćmy uwagę na to, że w systemie o strukturze równoległej zakłada się, że wszystkie elementy rozpoczynają swoją pracę z chwilą rozpoczęcia pracy systemu. System jest uszkodzony, jeżeli wszystkie elementy się uszkodzą. Jeżeli więc symbolami  $\tau_n$  oznaczylibyśmy losowy czas pracy elementu  $n = 1, 2 \dots N$  do chwili uszkodzenia, to czas pracy systemu do chwili uszkodzenia byłby określony wyrażeniem

$$\tau = \max \tau_n$$

W procesie łańcuchowym mechanizm jest inny. Tam każdy ze składowych procesów rozpoczyna się, gdy skończy się poprzedni (to znaczy, gdy proces osiągnie odpowiedni stan zapoczątkowujący następne przejścia). W tym więc przypadku dystrybuanta  $F(t)$  jest rozkładem wielkości

$$\tau = \sum_{s=0}^{S-1} \tau_{s,s+1}$$

gdzie  $\tau_{s,s+1}$  jest czasem przejścia ze stanu s do stanu s + 1.



Rys.7 Rozkład Erlanga



Można zadać pytanie: Jaka struktura procesu uszkodzeń odpowiada mechanizmowi uszkodzeń w systemie o strukturze równoległej? Na rys. 6 znaleźliśmy odpowiedź na to pytanie, gdzie pary (a,b) określają stan z rys. 3 elementu A - "a" oraz elementu B - "b", przy tym a,b = 0 - element nieuszkodzony, a,b = 1 - uszkodzony.

### O POJĘCIU STANU OBIEKTU

Pod pojęciem stanu obiektu będziemy rozumieli jego stan fizyczny określony wartościami odpowiednich wielkości fizycznych. W przypadku przeliczalnego zbioru stanów przez stan o numerze  $s = 0, 1, 2, \dots$  S rozumiemy pewien zbiór wartości tych wielkości fizycznych. Jeżeli obiekt jest w stanie s oznacza to, że zmierzone wartości wielkości fizycznych mieszczą się w granicach jakie wyznacza nam zbiór definiujący stan s.

Niekiedy stan fizyczny obiektu nie może być bezpośrednio zidentyfikowany ze względu na trudności pomiarowe. W takich przypadkach możemy rozszerzać pojęcie stanu uciekając się do następującej konstrukcji myślowej. Mianowicie, bardzo często możemy założyć, że między stanem fizycznym obiektu a jego dotychczasowym *napracowaniem*  $\tau$  (liczonym w godzinach pracy lub przebytych kilometrach lub liczbie zdarzeń lub ... itd) istnieje dość ścisły związek. Ponieważ *napracowanie* obiektu może być łatwo obserwowane i mierzone, to możemy uznać, że pomiar wartości  $\tau$  może zastąpić właściwą identyfikację stanu fizycznego.

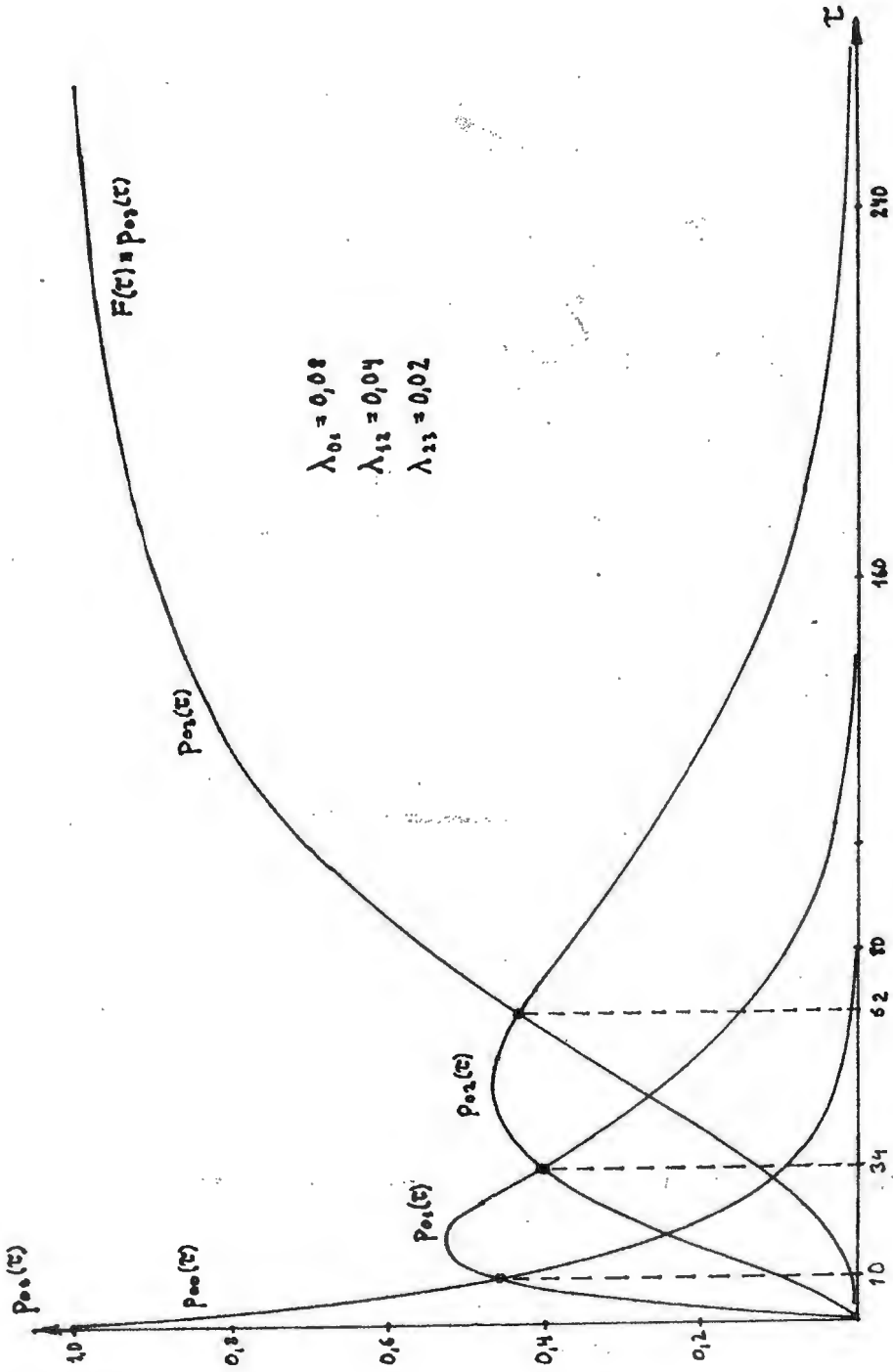
W ten sposób zakładamy istnienie i znajomość funkcji  $s(\tau)$  określającej stan obiektu na podstawie jego *napracowania*. Przykład określania takiej funkcji jest pokazany na rys. 8. Mamy na nim wykresy wartości:  $P_{00}(\tau)$ ;  $P_{01}(\tau)$ ;  $P_{02}(\tau)$  oraz  $P_{03}(\tau)$  dla procesu łańcuchowego, w którym intensywności  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{1,2}$ ,  $\lambda_{2,3}$  mają interpretacje intensywności wzrostu luzu na wale na godzinę pracy obiektu, zaś stany określone są minimalnym i maksymalnym luzem na wale w danej klasie. Ponieważ faktyczne zużycie i wzrost luzu na wale jest wielkością losową, więc wyznaczone zakresy godzin pracy odpowiadające poszczególnym stanom będą tylko pewnym statystycznym przybliżeniem funkcji  $s(\tau)$ . Wyznaczając punkty krytyczne rozgraniczające obszary na zasadzie równych prawdopodobieństw otrzymamy z rys. 8 następujące przyporządkowania

$S = 0$	$0 \leq \tau < 10$
$S = 1$	$10 \leq \tau < 34$
$S = 2$	$34 \leq \tau < 62$
$S = 3$	$62 \leq \tau$

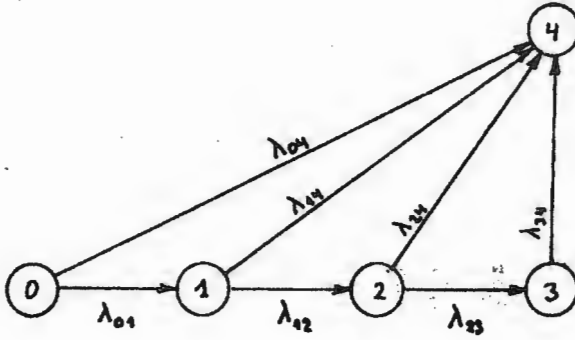
Znając funkcję  $s(\tau)$  możemy następnie skonstruować graf procesu uszkodzeń. Mianowicie, oznaczając w naszym przykładzie symbolem  $S = 4$  stan uszkodzenia obiektu możemy przyporządkować intensywności nagłych uszkodzeń  $\lambda_{04}$ ,  $\lambda_{1,4}$ ,  $\lambda_{2,4}$ ,  $\lambda_{3,4}$  zależne od stanu fizycznego obiektu w sposób widoczny na rysunku 9.

Zwróćmy uwagę na intensywności  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{12}$  i  $\lambda_{23}$ . Określają one proces losowy narastania luzu, a stany: 0, 1, 2, 3 są stanami sprawności (malejącej). Natomiast intensywności  $\lambda_{04}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{24}$ ,  $\lambda_{34}$  określają intensywności uszkodzeń nagłych, w tym przypadku pęknięcia łożyska. Oczywiście, zachodzi nierówność  $\lambda_{04} < \lambda_{14} < \lambda_{24} < \lambda_{34}$  - wraz z pogorszeniem się stanu rośnie możliwość pęknięcia.

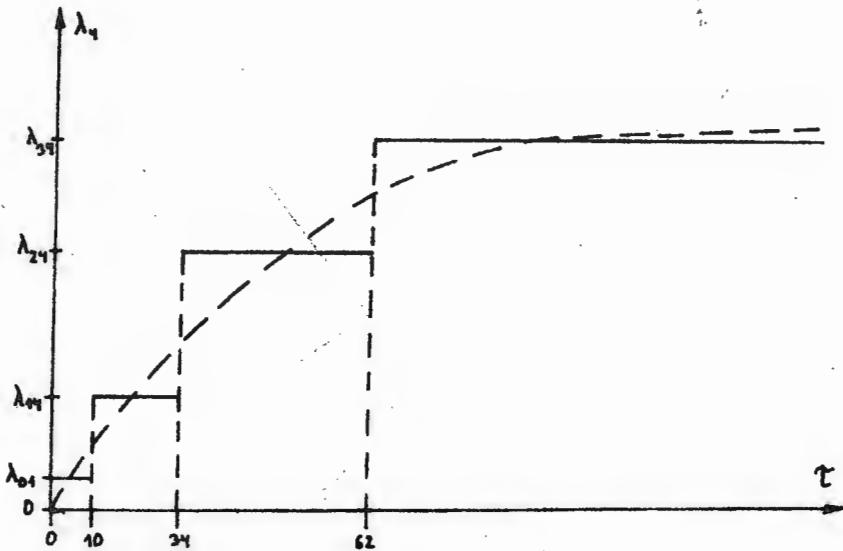
Zauważmy następnie, że ponieważ każdemu stanowi przyporządkowaliśmy odpowiedni odcinek czasu pracy  $\tau$ , to tym samym przyporządkowaliśmy w postaci funkcji schodkowej wartości  $\lambda$  każdemu zakresowi wartości  $\tau$  (patrz rys. 10).



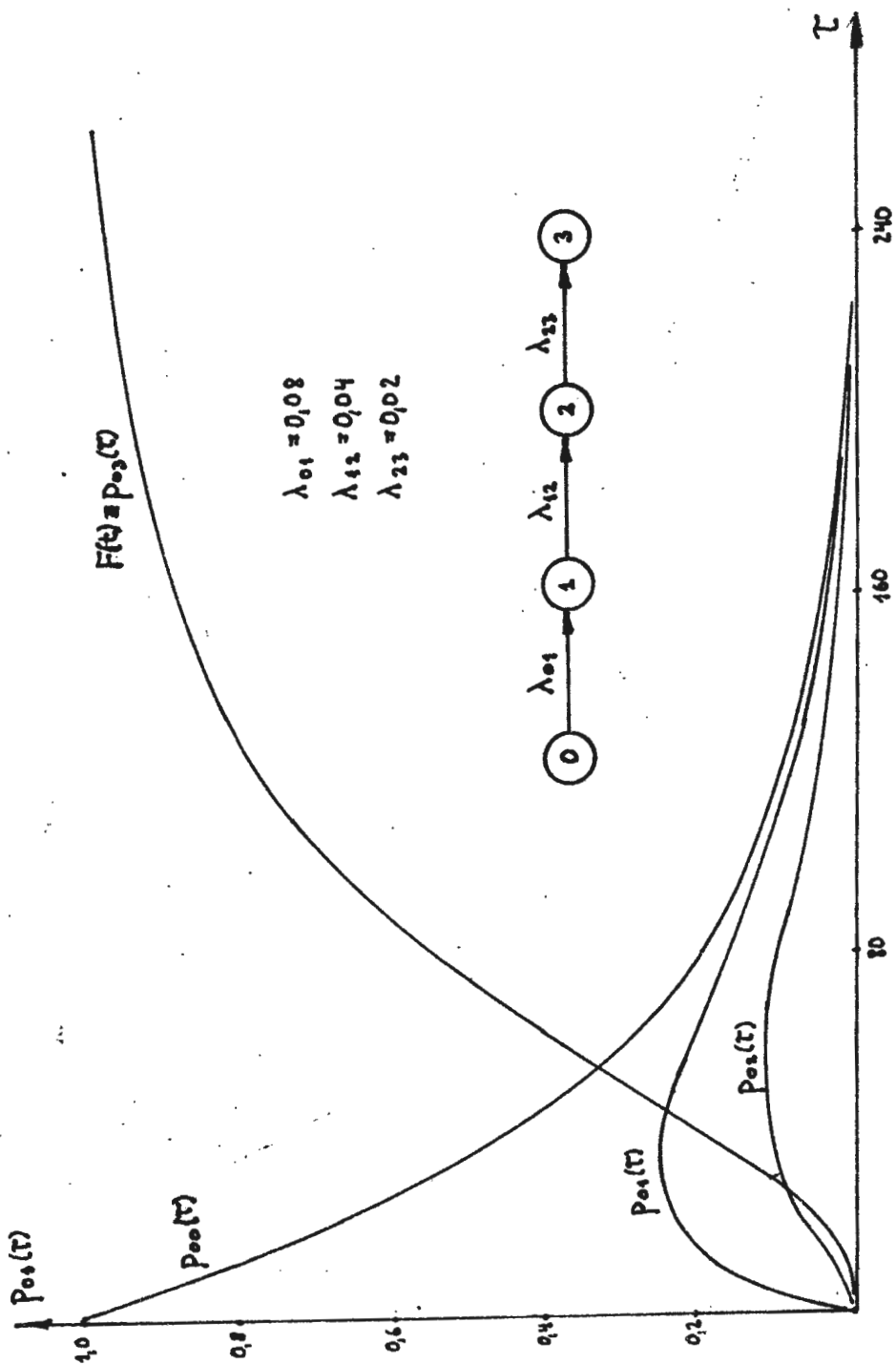
Rys. 8 Wyznaczanie funkcji  $S(\tau)$



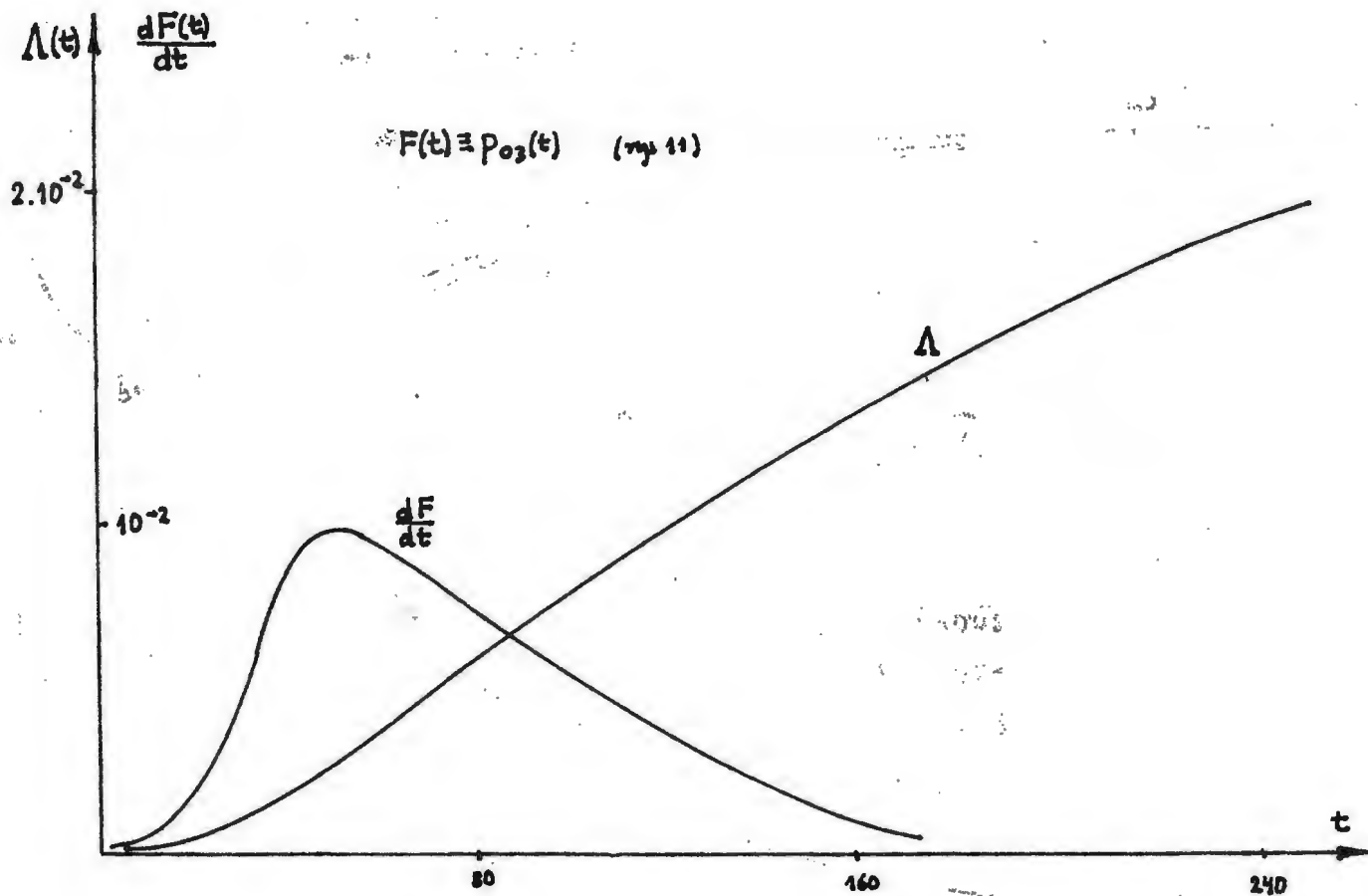
Rys.9 Struktura procesu zużycia ( $\lambda_{01}, \lambda_{12}, \lambda_{23}$ ) oraz uszkodzeń ( $\lambda_{04}, \lambda_{1,4}, \lambda_{24}, \lambda_{34}$ )



Rys.10 Przebieg narastania intensywności uszkodzeń w miarę zużycia łożyska



Rys. 11 Dystylna  $F(t)$  procesu łańcuchowego



Rys.12 Przebieg intensywności uszkodzeń procesu łańcuchowego z rys.11

Zauważmy następnie, że ponieważ każdemu stanowi przyporządkowaliśmy odpowiedni odcinek czasu pracy  $\tau$ , to tym samym przyporządkowaliśmy w postaci funkcji schodkowej wartości  $\lambda$  każdemu zakresowi wartości  $\tau$  (patrz rys. 10).

Jak nietrudno zauważyć, przebieg funkcji  $\lambda$  można uważać za aproksymację ciągłej funkcji  $\lambda(\tau)$  zaznaczonej na rys. 10 linią kreskowaną. Powiększając liczbę stanów zdatności możemy dla dostatecznie dużych wartości  $S-1$  dostatecznie dokładnie przybliżyć ciągłą funkcję  $\lambda(\tau)$  - funkcją schodkową. Należy przy tym podkreślić, że dla elementów mechanicznych zwykle wartości  $\lambda_{s,S}$  dla  $s$  małych są bliskie zera, natomiast istotna jest wartość  $\lambda_{S-1,S}$ . W takim przypadku otrzymamy czystą strukturę łańcuchową procesu, w którym tylko ostatnia intensywność jest intensywnością uszkodzeń; wszystkie inne dotyczą tylko intensywności zużycia. Dobierając dostatecznie dużą wartość  $S-1$  możemy uzyskać wystarczająco dokładne przybliżenie rozkładu normalnego czasu osiągnięcia stanu  $S-1$ , którego osiągnięcie zagraża uszkodzeniem obiektu. Wynika to z tego, że dla  $\lambda_{s,s+1} = \lambda = \text{const}$  (dla  $s = 0, 1, 2, \dots, S-2$ ) dystrybuanta czasu osiągnięcia stanu  $S-1$  będzie miała postać rozkładu Erlanga, który ma tę własność, że dąży (ze wzrostem  $S$ ) do rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej  $1/\lambda \cdot (S-1)$  i odchyleniu standardowym  $1/\lambda \cdot \sqrt{S-1}$  (patrz rys. 7)

W ten sposób teoria niezawodności obiektów wielostanowych może być wykorzystana, w przypadku gdy stanu fizycznego obiektu nie można zidentyfikować. Zawsze jednak należy mieć na uwadze fakt, że teoria niezawodności obiektów wielostanowych ma zasadnicze zastosowanie w przypadku istnienia możliwości identyfikacji stanu fizycznego obiektu.

Na zakończenie, na rys 11 i 12 pokazano przebiegi dystrybuanty  $F(t)$  czasu pracy do uszkodzenia (stan  $S = 3$ ) oraz  $\Lambda(t)$  intensywności uszkodzeń, w funkcji czasu dla procesu łańcuchowego. Przebieg tej ostatniej funkcji  $\Lambda(t)$  można porównać z przebiegiem funkcji  $\lambda(t)$  z rysunku 1 dla normalnego rozkładu uciętego oraz z przebiegiem funkcji  $\lambda(t)$  na rysunku 2 dla rozkładu Weibulla.

Nietrudno się domyśleć, że dla procesów o bardziej złożonej strukturze (nie łańcuchowej) można uzyskać różne przebiegi funkcji  $\Lambda(t)$ . Pozwala to domniemywać, że zmierzone eksperymentalnie przebiegi funkcji  $\Lambda(t)$  nie koniecznie wynikają stąd, że występujące rozkłady nie są wykładnicze. Być może występują tylko rozkłady wykładnicze, lecz dotyczą one składowych podprocesów tworzących złożoną strukturę obserwowanego procesu wielostanowego.

## 5. Proces eksploatacji

### 5.1 Charakterystyki procesu eksploatacji

Założmy, że znany jest rozkład prawdopodobieństwa stanów obiektu

$$p^0(\hat{U}, t^0)$$

po jego instalacji. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że, instalowane urządzenie jest nowe, a w związku z tym można także założyć, że rozkład ten ma postać

$$p^0(\hat{U}, t^0) = \prod_{n=1}^N p_n(u_n, t^0);$$

ponieważ elementy urządzenia były wykonane niezależnie.

W okresie od  $t^0$  (ukończenia instalacji) do  $t^1$  (rozpoczęcia pierwszej obsługi) urządzenie jest użytkowane, w rezultacie czego mamy:

$$p^0(\hat{S}, t) = \sum_{\hat{U} \in \Omega} p^0(\hat{U}, t^0) P(\hat{U}, \hat{S}; t^0, t) = \prod_{n=1}^N \sum_{u_n \in \Omega_n} p_n(u_n, t^0) p_n(u_n, s_n; t-t^0)$$

wykorzystując założenie o niezależności procesów zużycia i szczególnej postaci funkcji  $p^0(\hat{U}, t^0)$ . Znajac  $P^0(\hat{S}, t)$  możemy wyznaczyć

$$\Delta \Lambda^0 = \sum_{s=1}^S a_s \int_{t^0}^{t^1} G_s^0(t) dt$$

$$\Pi_s^0 = G_s^0(t^1_0)$$

gdzie:

$$G_s^0(t) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} p^0(\hat{S}, t)$$

jest prawdopodobieństwem zdarzenia, że urządzenie w chwili  $t$  będzie w stanie  $s$ . Przy tym, ponieważ stan  $s = S$  jest stanem pochłaniającym, więc  $G_S^0(t)$  jest prawdopodobieństwem, że do chwili  $t$  urządzenie zostanie uszkodzone.

W szczególności, z prawdopodobieństwem

$$G_s^0 = G_s^0(t^1_0)$$

urządzenie trafi do pierwszej obsługi w stanie  $s$ . W rezultacie takie urządzenie będzie podlegało obsłudze rodzaju

$$p = p(1, s)$$

Podczas tej obsługi zostaną wymienione na nowe te elementy, których numery należą do zbioru:

$$N_p^{\text{odp}}(V_p) = N_p^{\text{odn}} \cup \Delta N_p^{\text{odn}}(V_p)$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Delta N_p^{\text{odn}}(V_p) &= \left\{ n \in N_p^{\text{kontr}} ; v_p^n = 1 \right\} \\ &= \left\{ n \in N_p^{\text{kontr}} ; s_n \in S_n^p \right\} \end{aligned}$$

a wektor  $V_p$  o składowych  $v_p^n$  ( $n \in N_p^{\text{kontr}}$ ) jest rezultatem kontroli. Jeżeli symbolem

$$\| N_p^{\text{kontr}} \|$$

oznaczymy licznosc zbioru  $N_p^{\text{kontr}}$ , to pamietajac, ze

$$v_p^n = \{1, 0\}$$

otrzymujemy liczbę możliwych wartości wektora  $V_p$  która jest równa dwójce podniesionej do potęgi "licznosc"  $N_p^{\text{kontr}}$ .

Zbiór możliwych wartości  $V_p$  będziemy oznaczali symbolem  $V_p$ .

Prawdopodobienstwo zdarzenia, że urządzenie skierowane do obsługi w chwili  $t_0^1$  będzie w stanie  $s$  i wynikiem kontroli będzie  $V_p$  i że w związku z tym obsługa zakończy się w chwili

$$t^1 = t_0^1 + \phi_p(V_p)$$

będzie równe

$$H^0(s, V_p) = \sum_{S_n^p(V_p)} p^0(\hat{S}, t_0^1)$$



przy czym

$$\Omega_s^p(V_p) = \left\{ \hat{S} \in \Omega_s: \bigwedge_{n \in \Delta N^p(V_p)} s_n \in S_n^p \quad \bigwedge_{n \in \text{kontr}_p \Delta N^p(V_p)} s_n \in S_n^p \right\}$$

Rozkład stanów elementów urządzenia w chwili  $t_0^1$  rozpoczęcia pierwszej obsługi, które było w stanie  $s$ , a wynikiem kontroli było  $V_p$ , jest określony wyrażeniem

$$p^0(\hat{S}, t_0^1 | s, V_p) = \frac{p^0(\hat{S}, t_0^1)}{H^0(s, V_p)}$$

dla  $\hat{S} \in \Omega_s^p(V_p)$  (dla pozostałych  $\hat{S}$  wartość  $p^0$  jest równa zero).

Zgodnie z poprzednimi wywodami urządzenie to w chwili  $t^1$  ukończenia pierwszej obsługi będzie miało rozkład (patrz rys 35)

$$p^1(\hat{U}, t^1 | s, V_p) = \frac{1}{C^1} \prod_{n \in \Delta N^p(V_p)} \delta_{u_n r_n} \prod_{n \in \Delta N^p(V_p)} p_n(u_n, t_0^1)$$

dla  $\hat{U} \in U_s^p(V_p)$  (dla pozostałych  $\hat{U}$ , wartości  $p^1$  jest równa zero).

Przy tym

$$p_n(u_n, t_0^1) = \sum_{v_n \in S_n} p_n(v_n, t_0^0) p_n(v_n, u_n; t_0^1 - t_0^0)$$

$$r_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \in N_I \\ 1 & \text{dla } n \in N_{II} \\ S_n & \text{dla } n \in N_{III} \end{cases}$$

$$C^1 = \sum_{\hat{U} \in U_s^p(V_p)} \prod_{n \in \Delta N^p(V_p)} \delta_{u_n r_n} \prod_{n \in \Delta N^p(V_p)} p_n(u_n, t_0^1)$$

Poszczególne elementy zbioru  $U_s^p(V_p)$  tym różnią się od odpowiednich elementów zbioru  $\Omega_s^p(V_p)$ , że składowe o numerach  $n \in N(V_p)$  wektora należącego do  $U_s^p(V_p)$  są równe  $r_n$ , natomiast pozostałe są identyczne z odpowiednimi składowymi wektora należącego do  $\Omega_s^p(V_p)$ .

W rezultacie, rozkład prawdopodobieństwa stanów  $p^1$  będzie także miał postać iloczynową

$$p^1(\hat{U}, t^1 | s, v_p) = \frac{1}{C^1} \prod_{n=1}^N p_n(u_n, t^1)$$

Ponieważ koszt wykonania obsługi rodzaju  $p = p(k, s)$ , gdy urządzenie było w stanie  $s$  i rezultatem kontroli  $v_p$ , jest równy  $\Delta B_s^p(v_p)$ , więc oczekiwany koszt pierwszej obsługi będzie równy

$$\Delta B^1 = \sum_{s=1}^S \sum_{v_p \in V_p} \Delta B_s^p(v_p) H^0(s, v_p); \quad p = p(1, s)$$

Kontynuując eksploatację w okresie od  $t^1$  do  $t_o^2$  (rozpoczęcia następnej obsługi) otrzymamy:

$$\begin{aligned} p^1(\hat{S}, t | s, v_p) &= \sum_{\hat{U} \in \Omega} p^1(\hat{U}, t^1 | s, v_p) P(\hat{U}, \hat{S}, t_o^1 - \phi_p(v_p), t) = \\ &= \frac{1}{C^1} \sum_{\hat{U} \in \Omega_s^p(v_p)} \prod_{n=1}^N p_n(u_n, t^1) p_n(u_n, s_n, t - t_o^1 - \phi_p(v_p)) \end{aligned}$$

$$\Delta A_s^1(v_p) = \sum_{r=1}^S a_r \int_{t_o^1 + \phi_p(v_p)}^{t_o^2} G_r^1(t | s, v_p) dt$$

gdzie:

$$G_r^1(t | s, v_p) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_r} p^1(\hat{S}, t | s, v_p)$$

Wykorzystując rozkład  $H^0(s, v_p)$  mamy

$$\Delta A^1 = \sum_{s=1}^S \sum_{v_p \in V_p} \Delta A_s^1(v_p) H^0(s, v_p); \quad p = p(1, s)$$

Podobnie otrzymamy rozkład stanów elementów urządzenia w chwili  $t_0^2$  zgłoszenia urządzenia do drugiej, kolejnej obsługi

$$p^1(\hat{S}, t_0^2) = \sum_{s=1}^S \sum_{v_p \in V_p} p^1(\hat{S}, t_0^2 | s, v_p) \cdot H^0(s, v_p); \quad p = p(1, s),$$

prawdopodobieństwo uszkodzenia

$$\Pi^1 = G_S^1(t_0^2) = \sum_{S \in \Omega_S} p^1(\hat{S}, t_0^2)$$

oraz ogólnie

$$G_S^1 = G_S^1(t_0^2) = \sum_{S \in \Omega_S} p^1(\hat{S}, t_0^2)$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że urządzenie zgłoszone do drugiej obsługi będzie w stanie  $s$  i wynikiem kontroli będzie  $v_p$  jest równe:

$$H^1(s, v_p) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_S^p(v_p)} p^1(\hat{S}, t_0^2); \quad p = p(2, s)$$

Rozkład stanów elementów takiego urządzenia w chwili rozpoczęcia obsługi drugiej będzie równy:

$$p^1(\hat{S}, t_0^2 | s, v_p) = \frac{p^1(\hat{S}, t_0^2)}{H^1(s, v_p)}$$

Oczekiwany koszt drugiej obsługi będzie określony wzorem:

$$\Delta B^2 = \sum_{s=1}^S \sum_{v_p \in V_p} \Delta B_s^p(v_p) H^1(s, v_p)$$

Wyznaczenie rozkładu

$$p^2(\hat{U}, t^2 \mid s, v_p)$$

stanu elementów urządzenia w chwili

$$t^2 = t_o^2 + \theta_p(v_p); \quad p = p(2, s)$$

nie może być przeprowadzone, tak jak poprzednio, w pierwszej obsłudze, ponieważ rozkład  $p^1(\hat{s}, t_o^2 \mid s, v_p)$  nie ma już postaci iloczynu. Rozkład będzie miał postać dla  $\hat{U} \in U_s^p(v_p)$ :

$$p^2(\hat{U}, t^2 \mid s, v_p) = \frac{1}{c^2} g^1(\hat{u}, t_o^2 \mid s, v_p) \prod_{n \in N_p(v_p)} \delta_{u_n r_n}$$

gdzie:

$$g^1(\hat{u}, t_o^2 \mid s, v_p) = \sum_{u_n \in S_n} \dots \sum_{n \in N_p(v_p)} p^1(\hat{U}, t_o^2 \mid s, v_p)$$

Jest rozkładem brzegowym zredukowanego pod względem ilości składowych wektora  $\hat{u}$  ( w stosunku do wektora  $\hat{U}$ ), posiadającego te składowe, których numery nie należą do zbioru  $N_p(v_p)$ .

Stała  $c^2$  jest określona, tak jak poprzednio dla  $k = 1$  wzorem:

$$c^2 = \sum_{\hat{U} \in U_s^p(v_p)} g^1(\hat{u}, t_o^2 \mid s, v_p) \prod_{n \in N_p(v_p)} \delta_{u_n r_n}$$

W szczególnym przypadku gdyby  $p^1$  miał postać iloczynu

$$p^1(\hat{S}, t_o^2 \mid s, v_p) = \prod_{n=1}^N p_n(s_n, t_o^2 \mid s, v_p)$$

otrzymalibyśmy

$$g^1(u, t_o^2 \mid s, v_p) = \prod_{n \in N_p(v_p)} p_n(u_n, t_o^2 \mid s, v_p)$$

a więc postać poprzednią (dla obsługi  $k=1$ ):

$$p^2(\hat{U}, t_o^2 | s, v_p) = \frac{1}{c^2} \prod_{n \in N^p(v_p)} \delta_{u_n r_n} \prod_{n \in N^p(v_p)} p_n(u_n, t_o^2 | s, v_p)$$

Rozkład

$$p^1(\hat{S}, t_o^2 | s, v_p)$$

będzie miał postać iloczynu tylko wtedy, gdy (w szczególności) zbiory  $U_s^p(v_p)$  są jednoelementowe.

$$\hat{U}_s^p(v_p) = \{ \langle r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, r_N \rangle \}$$

Wtedy po obsłudze nr  $k = 1$  rozkład

$$p^1(\hat{U}, t^1 | s, v_p)$$

ma postać iloczynu funkcji  $\delta_{u_n r_n}$  a stąd

$$\begin{aligned} p^1(\hat{S}, t_o^2 | s, v_p) &= p^1(\hat{U}, t^1 | s, v_p) p(\hat{U}, \hat{S}; t_o^1 + \phi_p(v_p), t_o^2) = \\ &= \sum_{\hat{U} \in \Omega} \prod_{n=1}^N \delta_{u_n r_n} p(u_n, s_n, t_o^1 + \phi_p(v_p), t_o^2) = \\ &= \prod_{n=1}^N p_n(r_n, s_n, t_o^2 - t_o^1 - \phi_p(v_p)) \end{aligned}$$

Jeżeli zbiory  $U_s^p(v_p)$  nie są jednoelementowe, niezbędne staje się wyznaczenie rozkładu brzegowego  $g$ .

Postępując w ten sposób dalej, możemy kolejno wyznaczyć:

$$\begin{aligned} \Delta A^k & \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1 \\ \Delta B^k & \quad k = 1, 2, \dots, K \\ Q^k &= 1 - \prod^k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-1} + \Delta A^{k-1} & A^0 &= 0 \\ B^k &= B^{k-1} + \Delta B^k & B^0 &= 0 \end{aligned}$$

W rezultacie z procesem eksploatacji urządzenia związane są:

- skumulowany dochód  $A = A^K$
- skumulowane nakłady na obsługę techniczne  $B = B^K$

Jeżeli ponadto przyjęlibyśmy, że urządzeń uszkodzonych (w stanie  $s = S$  nie będziemy remontowali, to znaczy:

$$p(k, S) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

przy czym dla obsługi rodzaju  $p = 0$  mamy:

$$N_o^{\text{odn}} = N_o^{\text{kontr}} = N_o^{\text{kons}} = 0$$

to wtedy

$$Q = Q^K$$

jest także skumulowaną dla całego okresu eksploatacji

$$T = t^K - t_0$$

niezawodnością urządzenia.

Wielkości  $A, B, Q, T$  charakteryzujące proces eksploatacji zależą od:

- charakterystyk urządzenia oraz
- charakterystyk obsługi technicznej.

Do charakterystyk urządzenia należą macierze intensywności przejść

$$\Lambda^n = \left[ \lambda_{uv}^n \right], \quad n = 1, 2, \dots, N$$

wraz z odpowiednio zdefiniowanymi stanami  $s_n$  elementów, funkcja  $\phi$  zdefiniowana zbiorami  $\Omega_s$ , z odpowiednio określonymi stanami  $s$  całego urządzenia i funkcja  $\alpha$  zdefiniowana ciągiem wartości  $a_s$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ).

Do charakterystyk procesu obsługi należą:

odstęp czasu  $\Delta t^k = t_o^{k+1} - t_o^k$  międzyobsługowe, liczba  $K$  kolejnych obsług urządzenia, liczba  $P$  rodzajów obsług wraz z opisem programów obsług

$$\left\{ N_p^{\text{odn}}, N_p^{\text{kontr}}, N_p^{\text{kons}} \right\}$$

włącznie ze zbiorami  $S_p^n$  ( $n \in N_p^{\text{kontr}}$ ) dla każdego rodzaju  $p = 1, 2, \dots, P$  obsługi, oraz funkcją  $p(k, s)$  wyznaczającą rodzaj wykonywanej obsługi w zależności od stanu urządzenia i jego "wieku", mierzonego numerem  $k$  kolejnej obsługi.

Ponadto proces obsługi jest scharakteryzowany kosztami poszczególnych operacji obsługowych  $C_n^{\text{odn}}$ ,  $C_n^{\text{kontr}}$ ,  $C_n^{\text{kons}}$ , czasami trwania poszczególnych operacji obsługowych  $t_n^{\text{odn}}$ ,  $t_n^{\text{kontr}}$ ,  $t_n^{\text{kons}}$  wraz z opisem kolejności realizacji operacji obsługowych.

Wykorzystując zależność wielkości  $A, B, Q, T$  od wymienionych wielkości możemy sformułować problem syntezy procesu obsługi (doboru  $t^k$  oraz programów obsługi) dla danego urządzenia o zadanych charakterystykach  $\Lambda^n$  lub problem syntezy technologicznej urządzenia (doboru macierzy  $\Lambda^n$ ) dla zadanego procesu obsługi o znanych charakterystykach.

Można także sformułować problem szerszy, jednoczesnej syntezy procesu obsługi (inżynierii obsługi) i technologii wykonania elementów urządzenia (inżynierii materiałowej), a w tym doboru: odstępów międzyobsługowych, programów obsługi, cech materiałów z których wykonane są elementy (ustalenia ich trwałości) w ten sposób, - aby wielkość  $A, B, Q, T$  oraz cena urządzenia  $C$  osiągnęły pożądane wielkości lub aby określona funkcja jakości urządzenia osiągnęła wartość ekstremalną przy ograniczeniu na wartość  $C$ .

**5.2 Proces eksploatacji obiektu o obserwowalnych stanach elementów.**

- Jak wiemy, między zmiennymi
- wektorem  $\hat{S}$  określającą stan poszczególnych elementów oraz
  - skalarom  $s$  oznaczającym stan obiektu jako całości, z wartością którego związana jest jednoznacznie obserwowalna korzyść  $a = \alpha(s)$  przynoszona przez eksploatowany obiekt określony, jest związek:

$$\phi(\hat{S}) = s$$

generujący podział

$$\Omega_s = \{ \hat{S} : \phi(\hat{S}) = s \}; \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

przestrzeni  $\Omega$  możliwych stanów  $\hat{S}$  elementów obiektów. Oczywiście, funkcja  $\alpha$  jest różnowartościowa, tak że zawsze istnieje funkcja odwrotna

$$\alpha^{-1}(a) = s$$

przy tym przyjmujemy, że dla  $s = 1$ ,  $\alpha(s) = 0$  oraz  $\alpha(s+1) > \alpha(s)$  ( $s = 1, 2, \dots, S-1$ ), tak że  $\alpha(S) = a_{\text{max}}$ . Stan obiektu może więc być zawsze określony z dokładnością do wartości  $s$  lub odpowiadającego zbioru  $\Omega_s$ .

Dokładniejsza identyfikacja stanu obiektu, a dokładnie mówiąc - stanu  $\hat{S}$  wszystkich jego elementów, wymaga przerwania działalności obiektu i przeprowadzenie odpowiednich pomiarów elementów.

Jednakże może się zdarzyć, że działanie obiektu jest silnie uzależnione od stanu każdego elementu. W rezultacie obserwowana wielkość efektu  $a$  jest różna dla każdej wartości  $\hat{S}$ , tak że istnieje funkcja odwrotna

$$\phi^{-1}(s) = \hat{S}$$

powoduje to, że zbiory

$$\Omega_s = \{ \hat{S} : \phi(\hat{S}) = s \}$$

są zbiorami jednoelementowymi. Wtedy złożona funkcja

$$\alpha\phi(\hat{S}) = a$$

jest także różnowartościowa i istnieje dla niej funkcja odwrotna

$$(\alpha\phi)^{-1}(a) = \hat{S}$$

Oczywiście, dla tej klasy obiektów czynność identyfikacji stanu elementów  $\hat{S}$  jest zbędna, gdyż każdej obserwowalnej wartości  $a$  i odpowiadającemu stanowi  $s$  przyporządkowana jest jedna i tylko jedna wartość wektora  $\hat{S}$ . Upraszcza to znakomicie opis procesu eksploatacji i umożliwia stosowanie doskonalszego sposobu obsługi, której rodzaj  $p$  może być bezpośrednio uzależniony od stanu elementów  $\hat{S}$  obserwowanych za pośrednictwem zmiennej  $a$ . Jeżeli stanowi  $s$  i odpowiadającej wartości  $a_s$  przyporządkowany jest stan elementów  $\hat{S}$ , to w miejsce funkcji

$$p(k, s)$$

możemy używać funkcję

$$p'(k, a_s)$$

lub funkcję

$$p''(k, \hat{S})$$

Podobnie, w miejsce rozkładu początkowego

$$P^0(\hat{U}, t^0)$$

możemy wykorzystać rozkład

$$G_u^0(t^0)$$

ponieważ każdej wartości  $u$  odpowiada jedna wartość  $\hat{U}$ . Podobnie, w miejsce rozkładu warunkowego

$$F(\hat{U}, \hat{S}; t^0, t)$$



możemy z tego samego powodu wykorzystać odpowiadający mu rozkład warunkowy

$$G_{us}(t^0, t),$$

otrzymując bezpośrednio związek

$$G_S^0(t) = \sum_u G_u^0(t^0) \cdot G_{us}(t^0, t) \text{ dla } t > t^0$$

Podobnie jak poprzednio, prawdopodobieństwo, że obiekt skierowany do pierwszej  $k = 1$  obsługi w chwili  $t = t_0^1$  będzie w stanie  $s$  jest określony wartością  $G_S^0(t_0^1)$ . Funkcja

$$Q^0(t) = 1 - G_S^0(t)$$

jest funkcją niezawodności obiektu, a

$$T^0 = \int_{t^0}^{\infty} Q^0(t) dt$$

jest oczekiwanym czasem do pierwszego uszkodzenia (pojawienia się stanu  $s = S$ ) nowo eksploatowanego obiektu, gdyby nie podlegał obsłudze okresowej. Ponieważ obiekt podlega przymusowej obsłudze w chwili  $t_0^1$ , więc

$$T^0(t_0^1) = \int_{t^0}^{t_0^1} Q^0(t) dt < T^0$$

jest oczekiwanym czasem

- do pierwszego uszkodzenia (lub czasem poprawnej pracy), jeżeli chwilę  $t_0^1$  potraktujemy jako chwilę "pewnego" uszkodzenia,
- do rozpoczęcia obsługi nr  $k = 1$ , jeżeli przyjmamy, że każdy uszkodzony, przed planową chwilą  $t_0^1$ , obiekt jest natychmiast kierowany do pierwszej obsługi,
- pracy obiektu do rozpoczęcia planowej obsługi w chwili  $t_0^1$ .

Znając rozkład  $G_S^0(t_0^1)$  stanów obiektu w chwili  $t_0^1$ , skierowania obiektu do planowej pierwszej obsługi oraz znając procedurę obsługi, możemy wyznaczyć rozkład stanów obiektu  $G_u^1(t^1)$  po wykonaniu obsługi w chwili

$$t^1 = t_0^1 + \sigma^1$$

gdzie  $t^1$  jest czasem trwania obsługi. Załóżmy chwilowo, że umiemy wyznaczyć ten rozkład.

Obecnie możemy wyznaczyć rozkład stanów obiektu użytkowego po pierwszej obsłudze w chwili  $t > t^1$ , a mianowicie

$$G_S^1(t) = \sum_u G_U^1(t^1) \cdot G_{US}(t^1, t)$$

Podobnie jak poprzednio, w pierwszym cyklu eksploatacji otrzymamy:

$$1) \quad Q^1(t) = 1 - G_S^1(t)$$

- funkcję niezawodności obiektu po pierwszej obsłudze

$$2) \quad T^1 = \int_{t^1}^{\infty} Q^1(t) dt$$

- oczekiwany czas do uszkodzenia po pierwszej obsłudze, gdyby nie były wykonane dalsze, planowe obsługi.

$$3) \quad T^1(t_o^2) = \int_{t^1}^{t_o^2} Q^1(t) dt$$

- oczekiwany czas pracy obiektu w drugim cyklu eksploatacji.

Itd.

Postępując w ten sposób możemy kolejno, dla  $k = 2, 3$ , wyznaczyć rozkłady

$$G_S^k(t) \text{ dla } t^k \leq t < t_o^{k+1}$$

oraz odpowiednie wartości

$$Q^k(t), T^k, T^k(t_o^{k+1})$$

oraz

$$\Pi^k = G_S^k(t_o^{k+1})$$

- prawdopodobieństwo, że skierowany do  $k+1$ -szej obsługi obiekt będzie w stanie uszkodzonym  $s = S$ .

Wróćmy teraz do zagadnienia wyznaczenia rozkładu  $G_U^1(t^1)$  lub ogólnie  $G_U^k(t^k)$  stanu obiektu po zakończonej obsłudze  $k = 1, 2, \dots, K-1$ . W zależności od stanu  $s$ , w jakim obiekt trafi do obsługi nr  $k$ , wykonana zostanie obsługa rodzaju

$$p = p(k, s)$$

Funkcja  $p$  opisuje przyjętą zasadę wykonywania obsługi. Każdy rodzaj  $p$  obsługi jest scharakteryzowany zbiorem  $N_p^{\text{odnow}}$  ( $p = 1, 2, \dots, P$ ) numerów elementów

podlegających wymianie = całkowitej odnowie. Tak więc znajomość funkcji  $p$  oraz rodziny zbiorów  $N_p^{\text{odnow}}$  pozwala wyznaczyć warunkowy rozkład

$$p^k(u, t^k | s)$$

prawdopodobieństwa stanu obiektu w chwili  $t^k$ , zakończenia obsługi nr  $k$  jeżeli "trafił" on do obsługi w stanie  $s$ . Na przykład, jeżeli trzejelementowy obiekt w chwili  $t_0^1$  - skierowania do obsługi - był w stanie  $s = 3$ , któremu odpowiada wartość wektora  $\hat{S}_1$

$$\hat{S} = \langle 0, 2, 1 \rangle$$

i jednocześnie funkcja  $p(1, s)$  dla  $s = 3$  przyjmuje wartość  $p = 2$ , a zbiór  $N_2^{\text{odnowy}}$  ma postać

$$N_2^{\text{odnowy}} = \{2\}$$

to stan  $\hat{U}$  elementów po zakończeniu pierwszej obsługi  $k = 1$  w chwili  $t_0^1 + t_2 = t^1$  będzie następujący:

$$\langle 0, 0, 1 \rangle = \hat{U}_2$$

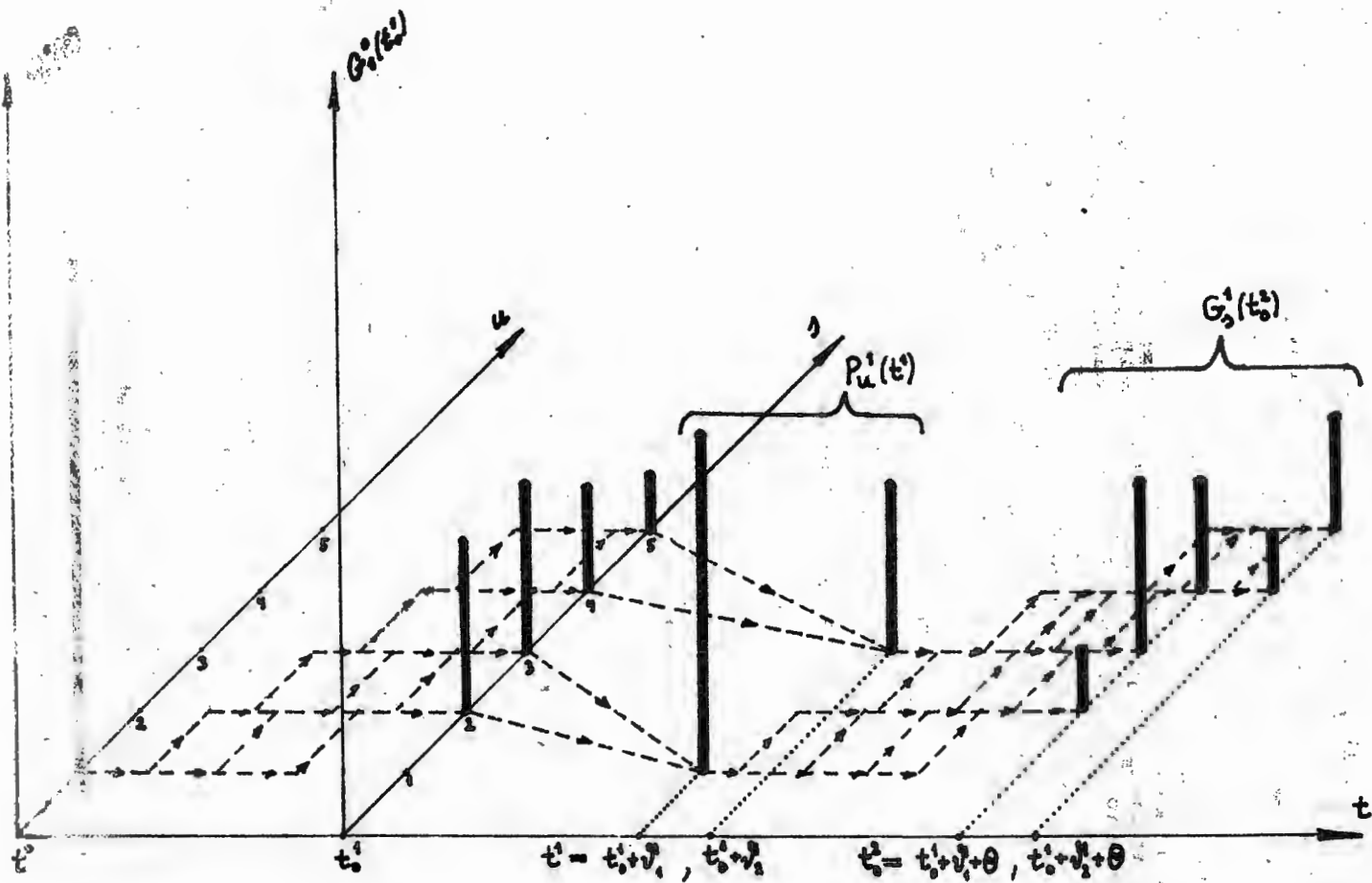
Przyjmując, że stanowi  $\hat{U}_2$  odpowiada stan obiektu  $u = 2$  możemy rozkład warunkowy  $p^1(u, t^1 | s)$  dla  $s = 3$  określić w sposób następujący:

$$p^1(u, t^1 | 3) = \begin{cases} 1 & \text{dla } u = 2 \\ 0 & \text{dla } u \neq 2 \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że jeżeli program prac wykonywanych w ramach obsługi ma charakter deterministyczny, to funkcje  $p^k(u, t^k | s)$  można zapisać przy użyciu symbolu funkcji delta - Kroneckera

$$\delta_{u,r} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } u = r \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Funkcje takie łatwo można określić jeżeli zdefiniujemy nową funkcję



Rys.36 Mechanizm konstrukcji kolejnych rozkładów  $P_u^k$  oraz  $G_g^k$  w okresie eksploatacji obiektu przy różnych czasach trwania napraw

$$\gamma(k,s) = r \quad r = 1, 2, \dots, S$$

powstała przez uwzględnienie zależności  $N_p^{\text{odnowy}}$  od  $p$ . Mianowicie, w naszym przykładzie liczbowym dla  $k = 1$  oraz  $s = 3$  mieliśmy  $p(1,3) = 2$  oraz  $N_2^{\text{odnowy}} = \{2\}$  stąd  $\hat{U}_2 = \langle 0, 0, 1 \rangle$  i  $u = 2$ , a więc:

$$\gamma(1,3) = 2$$

Funkcja  $\gamma$  określa jednocześnie związek między stanem  $u$  po ukończeniu obsługi  $k$ -tej i stanem  $s$  w chwili rozpoczęcia obsługi. Może ona być zapisana w postaci macierzy zero-jedynkowej analogicznej dla macierzy prawdopodobieństw przejść dla łańcuchów Markowa z tą różnicą, że są to przejścia deterministyczne i że macierz ta może zmieniać się w zależności od kolejnego numeru obsługi  $k$ .

Wykorzystując funkcję  $\gamma$  oraz funkcję  $\delta_{u,r}$  możemy zapisać rozkład  $p^k(u, t^k | s)$  w postaci

$$p^k(u, t^k | s) = \delta_{u,r} \quad \text{gdzie } r = \gamma(k, s)$$

W szczególności, w naszym przykładzie liczbowym mieliśmy

$$p^1(u, t^1 | 3) = \delta_{u,2}$$

Wracając do zagadnienia wyznaczania rozkładu stanów obiektu po zakończeniu obsługi otrzymamy:

$$G_u^k(t^k) = \sum_s p^k(u, t^k | s) \cdot G_s^{k-1}(t^k) = \sum_s G_s^{k-1}(t^k) \delta_{u, \gamma(k, s)}$$

Jednocześnie sumowanie po zmiennej  $s$  w powyższym wzorze ma specjalny charakter, gdyż chwile

$$t^k = t_0^k + \phi_p, \quad \text{gdzie } p = p(k, s),$$

zakończenia obsługi są różne dla urządzeń zgłaszających ię do obsługi w różnych stanach. Ponieważ stan obiektu zgłaszającego się jest zmienną losową, więc także chwila zakończenia obsługi będzie zmienną losową. Tylko w jednym szczególnym przypadku tak nie będzie, mianowicie wtedy gdy  $\phi_p = \text{const}$ , gdy

czas obsługi nie zależy od rodzaju  $p$  obsługi. Ten ostatni przypadek pokazany jest na rys. 37.

W celu przeanalizowania ogólnej sytuacji oznaczmy symbolem

$$S^k(t) \in \mathcal{S}; \quad \mathcal{S} = \{1, 2, \dots, S\}$$

zbiór numerów takich stanów obiektu, że jeśli obiekt przebywał w nich w chwili  $t_0^k$  rozpoczęcia obsługi, to obsługa zakończyła się do chwili  $t$ :

$$S^k(t) = \left\{ s \in \mathcal{S} : t_0^k + \vartheta_p \leq t \right\} \quad \text{gdzie } p = p(k, s)$$

W rezultacie możemy obecnie sprecyzować obszar sumowania następująco:

$$G_u^k(t) = \sum_{s \in S^k(t)} p^k(u, t^k | s) \cdot G_s^{k-1}(t_0^k) \quad \text{dla } t > t_0^k$$

Zauważmy, że funkcje  $G_u^k(t)$  nie określają teraz rozkładu prawdopodobieństwa, gdyż - jak łatwo się przekonać - suma wartości  $G_u^k(t)$  ze względu na  $u$  może być mniejsza od jedności (patrz rys 36). Mianowicie, przyjmując  $t$  dostatecznie bliskie wartości  $t_0^k$  możemy osiągnąć sytuację, że zbiór  $S^k(t)$  będzie zbiorem pustym, a suma wartości  $G_u^k(t)$  będzie równa zero, jeśli tylko

$$\vartheta_p > 0 \quad \text{dla każdego } p = 1, 2, \dots, P$$

Uzupełnijmy zbiór funkcji  $G_u^k(t)$  dodatkową funkcją

$$G_0^k(t) = 1 - \sum_{u \in \mathcal{S}} G_u^k(t)$$

Wtedy komplet funkcji  $G_u^k(t)$  dla  $u = 0, 1, 2, \dots, S$  tworzy rozkład prawdopodobieństwa stanów obiektu w chwili  $t > t_0^k$ . Zauważmy, że dotychczasowy zbiór  $\mathcal{S}$  stanów obiektu uzupełniliśmy, w sposób sztuczny, stanem  $s = 0$  odpowiadającym sytuacji gdy obiekt znajduje się w obsłudze, a więc w żadnym z wyróżnionych dotychczas stanów. Konsekwentnie więc, dla stanu  $s = 0$  musimy przyjąć, że  $\alpha(0) = 0$ , a więc obecnie, wartość  $\alpha$  jest równa zero gdy obiekt jest uszkodzony (w stanie  $s = S$ ) lub gdy obiekt jest w obsłudze (w stanie  $s = 0$ ).

Przeprowadzone tu rozważania zilustrujemy dwoma przykładami liczbowymi:

### 5.3 Przykład VIII. Opis procesu eksploatacji

W przykładzie założymy, że  $\gamma$  jest funkcją stałą

$$\gamma(k, s) = 1$$

Oznacza to, że niezależnie od numeru obsługi i stanu obiektu jest on zawsze całkowicie odnawiany do stanu  $u = 1$ . Wtedy rozkład  $p^k(u, t^k | s)$  przyjmie postać:

$$p^k(u, t^k | s) = \delta_{u,1}$$

Stąd

$$G_u^k(t) = \sum_{s \in S^k(t)} p^k(u, t^k | s) \cdot G_s^{k-1}(t_0^k) = \delta_{u,1} \sum_{s \in S^k(t)} G_s^{k-1}(t_0^k)$$

$$= \begin{cases} \sum_{s \in S^k(t)} G_s^{k-1}(t_0^k) & \text{dla } u = 1 \\ 0 & \text{dla } u = 2, 3, \dots, S \end{cases}$$

oraz

$$G_0^k(t) = 1 - \sum_{s \in S^k(t)} G_s^{k-1}(t_0^k)$$

dla

$$t_0^k \leq t < t^k \quad k = 1, 2, \dots$$

Pozostaje jeszcze do określenia zbiorów  $S^k(t)$ . Załóżmy zatem, że rodzaj obsługi  $p$  zależy wyłącznie od  $s$  (nie zależy od  $k$ ) oraz że  $\theta_p = \theta = \text{const}$ , tzn. czas obsługi nie zależy od rodzaju obsługi. Wtedy

$$S^k(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + \theta \\ S & \text{dla } t = t_0^k + \theta \end{cases}$$

Stąd ostatecznie

$$G_u^k(t) = \begin{cases} 1 & \text{Jeżeli } t = t_0^k + \theta \text{ oraz } u = 1 \\ 0 & \text{Jeżeli } t_0^k \leq t < t_0^k + \theta \text{ lub } u \neq 1 \end{cases}$$

$$G_0^k t = \begin{cases} 0 & \text{Jeżeli } t = t_0^k + \theta \\ 1 & \text{Jeżeli } t_0^k \leq t < t_0^k + \theta \end{cases}$$

Gdyby, na przykład,  $\theta_p$  zależało od rodzaju  $p = 1, 2, 3$  obsługi w taki sposób, że  $\theta_1 = 2, \theta_2 = 5, \theta_3 = 8$  oraz funkcja  $p(k, s)$  miałyby postać:

$$p(k, 1) = 1$$

$$p(k, 2) = p(k, 3) = 2$$

$$p(k, 4) = 3$$

przy tym  $s \in S = \{1, 2, 3, 4\}$  to otrzymalibyśmy jak łatwo sprawdzić

$$S^k(t) = \emptyset \text{ dla } t_0^k \leq t < t_0^k + 2$$

$$S^k(t) = \{1\} \text{ dla } t_0^k + 2 \leq t < t_0^k + 5$$

$$S^k(t) = \{1, 2, 3\} \text{ dla } t_0^k + 5 \leq t < t_0^k + 8$$

$$S^k(t) = \{1, 2, 3, 4\} \text{ dla } t = t_0^k + 8$$

oraz

$$G_u^k(t) = 0 \text{ dla } t_0^k < t < t_0^k + 2 \text{ i wszystkich wartości } u = 1, 2, 3, \\ \text{lub } u = 2, 3, 4 \text{ i wszystkich wartości } t \in [t_0^k, t_0^k + 8)$$

$$G_u^k(t) = G_1^{k-1}(t_0^k) \text{ dla } t_0^k + 2 \leq t < t_0^k + 5 \text{ oraz } u = 1$$

$$G_u^k(t) = G_1^{k-1}(t_0^k) + G_2^{k-1}(t_0^k) + G_3^{k-1}(t_0^k) \text{ dla } t_0^k + 5 \leq t < t_0^k + 8 \text{ oraz } u = 1$$

$$G_u^k(t) = 1 \text{ dla } t = t_0^k + 8 \text{ oraz } u = 1$$



Zauważmy, że  $G_0^k(t)$  dla różnych  $t$  oraz  $u = 1$  ma interpretację dystrybuanty losowych chwil zakończenia  $k$ -tej obsługi, natomiast  $G_u^k(t)$  dla różnych  $u = 0, 1, 3, 4$  oraz stałej wartości  $t$  ma interpretację rozkładu prawdopodobieństwa stanów obiektu. Wielkość

$$G_0^k(t) = 1 - \sum_{u \in S^k(t)} G_u^k(t)$$

jest natomiast prawdopodobieństwem, że  $k$ -ta obsługa nie zakończyła się do chwili  $t$ .

Zauważmy, że oczekiwana wartość czasu trwania  $k$ -tej obsługi będzie równa

$$\bar{\phi}^k = 2 \cdot G_1^{k-1}(t_0^k) + 5 \left[ G_2^{k-1}(t_0^k) + G_3^{k-1}(t_0^k) \right] + 8 \cdot G_3^{k-1}(t_0^k)$$

Koniec przykładu

#### 5.4 Przykład IX. Opis złożonego procesu eksploatacji

Rozważmy następujący, nieco bardziej skomplikowany przykład, w którym przyjmujemy, że funkcja  $\gamma$  ma postać:

$$\gamma(k, s) = \gamma(s) = \begin{cases} 1 & \text{dla } s = 1, 2 \\ 2 & \text{dla } s = 3, 4 \end{cases}$$

Zauważmy, że nie zależy ona od numeru obsługi  $k$  i że można ją zapisać w postaci macierzowej następująco:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Założmy następnie, tak jak poprzednio, że czas trwania obsługi  $\phi$  nie zależy od wartości  $p$  i jest równy  $\phi_p = \phi = 5$ . Wtedy rozkład  $p^k(u, t^k | s)$  przyjmie postać:

$$p^k(u, t^k | s) = \begin{cases} \delta_{u,1} & \text{dla } s = 1, 2 \\ \delta_{u,2} & \text{dla } s = 3, 4 \end{cases}$$

Podstawiając ten rozkład otrzymamy:

$$G_u^k(t) = \sum_{s \in S^k(t)} p^k(u, t^k | s) \cdot G_s^{k-1}(t_0^k) = \delta_{u,1} \sum_{s \in S^k(t)} G_s^{k-1}(t_0^k) \quad \text{dla } s = 1, 2$$

$$G_u^k(t) = \sum_{s \in S^k(t)} p^k(u, t^k | s) \cdot G_s^{k-1}(t_0^k) = \delta_{u,2} \sum_{s \in S^k(t)} G_s^{k-1}(t_0^k) \quad \text{dla } s = 3, 4$$

przy tym

$$s^k(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + 5 \\ 1 & \text{dla } t = t_0^k + 5 \end{cases}$$

Podstawiając następnie  $s^k(t)$  otrzymamy ostatecznie:

$$G_u^k(t) = 0 \quad \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + 5 \quad \text{i } u = 1, 2, 3, 4$$

$$G_u^k(t) = G_1^{k-1}(t_0^k) + G_2^{k-1}(t_0^k) \quad \text{dla } t = t_0^k + 5 \quad \text{i } u = 1$$

$$G_u^k(t) = G_3^{k-1}(t_0^k) + G_4^{k-1}(t_0^k) \quad \text{dla } t = t_0^k + 5 \quad \text{i } u = 2$$

oraz

$$G_0^k(t) = 1 - \sum_{u=1}^4 G_u^k(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + 5 \\ 0 & \text{dla } t = t_0^k + 5 \end{cases}$$

Koniec przykładu

## 5.5 Rozkład prawdopodobieństwa stanów obiektów kierowanych do obsługi

Przejdźmy obecnie do następnego uściślenia pojęcia funkcji  $G_u^k(t)$ . Wyjaśnijmy na przykładzie, że funkcja ta nie jest określona dostatecznie precyzyjnie. Otóż w przykładzie ósmym funkcja  $G_u^k(t)$  miała w pewnym przypadku postać:

$$G_u^k(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \dots\dots\dots \\ G_1^{k-1}(t_0^k) & \text{dla } t_0^k + 2 \leq t < t_0^k + 5 \quad u = 1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & \text{dla } t = t_0^k + 8 \quad u = 1 \end{cases}$$

Rozkład ten będzie prawidłowy tylko wtedy, kiedy eksploatację obiektu niezależnie od stanu  $s$  w chwili  $t_0^k$  będziemy rozpoczynali dokładnie w chwili  $t_0^k + 8$ , nawet wówczas, gdy obsługa zakończyła się wcześniej. Jeżeli natomiast obiekt rozpoczynałby pracę natychmiast po zakończeniu obsługi (co może się zdarzyć już w chwili  $t_0^k + 2$ ), to w chwili  $t_0^k + 8$  może on zostać ponownie uszkodzony, a więc nie może wtedy zachodzić równość  $G_1^k(t_0^k + 8) = 1$ , która wynika z podanych wzorów. Tak więc wyprowadzone wzory na wartość  $G_u^k(t)$  są słuszne tylko w przypadku gdy eksploatację rozpoczynamy w chwili  $t_0^k + \max_p \phi_p$ .

Jeżeli eksploatację rozpoczynamy w chwili zakończenia obsługi jak to jest pokazane na rysunku 36 to postąpić musimy inaczej. Zwróćmy uwagę, że rozkład

$$\sum_{u \in \mathcal{S}} G_{us}(t^k, t) \cdot p^k(u, t^k | v) \text{ dla } t \geq t^k = t_0^k + \phi_p \text{ gdzie } p = p(k, v)$$

dotyczy tych obiektów, które w chwili  $t_0^k$  skierowania do obsługi były w stanie  $v \in \mathcal{S}$ , a w chwili  $t$  są w stanie  $s \in \mathcal{S}$ .

W okresie  $\langle t_0^k, t^k \rangle$  obiekt znajduje się w obsłudze (w stanie  $u = 0$ ) z prawdopodobieństwem równym jedności. W związku z tym, poszukiwane wyrażenie na rozkład bezwarunkowy będzie miało postać:

$$G_s^k(t) = \sum_{u \in \mathcal{S}} \sum_{v \in \mathcal{S}^k(t)} G(u, s, t_0^k + \phi_{p(k, v)}, t) p^k(u, t_0^k + \phi_{p(k, v)} | v) G_v^{k-1}(t_0^k)$$

Ponieważ rozkład  $p^k$  ma postać

$$p^k(u, t^k | v) = \delta_{u, r} \quad \text{gdzie } r = \gamma(k, v), \quad t^k = t_0^k + \phi_{p(k, v)}$$

więc powyższy wzór przyjął postać:

$$G_s^k(t) = \sum_{v \in \mathcal{S}^k(t)} G(\gamma(k, v), s; t_0^k + \phi_{p(k, v)}, t) G_v^{k-1}(t_0^k)$$

W szczególności, jeżeli przyjmiemy, tak jak w przykładzie dziewiątym, że

$$r(k;v) = \text{const} = 1, \quad S = \{1,2,3,4\}$$

oraz

$$p(k,1) = 1 \quad \phi_1 = 2$$

$$p(k,2) = p(k,3) = 2 \quad \phi_2 = 5$$

$$p(k,4) = 3 \quad \phi_3 = 8$$

to otrzymamy:

$$G_s^k(t) = 0 \text{ dla } s = 1,2,3,4 \quad \text{ i } \quad t_0^k \leq t < t_0^k + 2$$

$$G_s^k(t) = G(1,s; t_0^k + 2, t) G_1^{k-1}(t_0^k) \quad \text{ dla } t_0^k + 2 \leq t < t_0^k + 5$$

$$G_s^k(t) = G(1,s; t_0^k + 2, t) G_1^{k-1}(t_0^k) + G(1,s; t_0^k + 5, t) \times \\ \times [G_2^{k-1}(t_0^k) + G_3^{k-1}(t_0^k)] \quad \text{ dla } t_0^k + 5 \leq t < t_0^k + 8$$

$$G_s^k(t) = G(1,s; t_0^k + 2, t) G_1^{k-1}(t_0^k) + G(1,s; t_0^k + 5, t) [G_2^{k-1}(t_0^k) + G_3^{k-1}(t_0^k)] + \\ + G(1,s; t_0^k + 8, t) G_4^{k-1}(t_0^k) \quad \text{ dla } t_0^k + 8 \leq t$$

oraz

$$G_{>}^k(t) = 1 \quad \text{ dla } t_0^k \leq t < t_0^k + 2$$

$$G_{>}^k(t) = 1 - G_1^{k-1}(t_0^k) \quad \text{ dla } t_0^k + 2 \leq t < t_0^k + 5$$

$$G_{>}^k(t) = 1 - G_1^{k-1}(t_0^k) - G_2^{k-1}(t_0^k) \quad \text{ dla } t_0^k + 5 \leq t < t_0^k + 8$$

$$G_{>}^k(t) = 0 \text{ dla } t_0^k + 8 \leq t < t_0^{k+1}$$

Jeżeli w miejsce  $t$  podstawimy wartość  $t_0^{k+1}$ , to otrzymamy rozkład  $G_s^k(t_0^{k+1})$  stanu obiektu skierowanego do następnej obsługi nr  $k+1$ . Postępując tak dalej dla kolejnych obsłuż  $k+1, k+2, \text{ itd}$  możemy w pełni określić proces eksploatacji.

Jednakże zagadnienie znacznie się skomplikuje, jeżeli założymy, że dana jest nie chwila  $t_0^{k+1}$  rozpoczęcia następnej obsługi, lecz okres  $e^k = t_0^{k+1} - t^k$  eksploatacji do następnej obsługi. W takim przypadku chwila  $t_0^{k+1}$  zależałoby od stanu  $s$ , w jakim znalazł się obiekt w chwili rozpoczęcia  $k$ -tej obsługi. Zachodziłaby wówczas równość:

$$t_0^{k+1} = t_0^k + 2 + e^k$$

dla tych obiektów, które do obsługi  $k$ -tej trafiły w stanie  $s = 1$ , a więc z prawdopodobieństwem  $G_1^{k-1}(t_0^k)$ . Podobnie

$$t_0^{k+1} = t_0^k + 5 + e^k$$

dla obiektów, które były w stanie  $s = 2$  lub  $3$  a więc z prawdopodobieństwem

$$G_2^{k-1}(t_0^k) + G_3^{k-1}(t_0^k)$$

oraz  $t_0^{k+1} = t_0^k + 8 + e^k$  z prawdopodobieństwem  $G_4^{k-1}(t_0^k)$ . Gdybyśmy chcieli znać rozkład stanów obiektu skierowanego do obsługi nr  $k+1$ , niezależnie od chwili, w której ta obsługa się rozpoczyna, to byłby on określony rozkładem:

$$\sum_{v \in S^k(t)} G(\gamma(k, v), s; t_0^k + \sigma_{p(k, v)}, t_0^k + \sigma_{p(k, v)} + e^k) G_v^k(t_s^k),$$

natomiast wzór na wartość  $G_s^k(t)$  byłby słuszny tylko dla  $t < t_0^k + 2 + e^k$ . Dla większych wartości  $t$  miałby on postać:

$$G_s^k(t) = G(1, s; t_0^k + 5, t) \left[ G_2^{k-1}(t_0^k) + G_3^{k-1}(t_0^k) \right] + G(1, s; t_0^k + 8, t) G_4^{k-1}(t_0^k)$$

$$\text{dla } t_0^k + 2 + e^k \leq t < t_0^k + 5 + e^k.$$

$$G_s^k(t) = G(1, s; t_0^k + 8, t) G_4^{k-1}(t_0^k)$$

$$\text{dla } t_0^k + 5 + e^k \leq t < t_0^k + 8 + e^k$$

oraz  $s = 1, 2, 3, 4$ . Oczywiście, do wzoru powyższego natychmiast można mieć zac-

trzeżenia, gdyż obiekty, które do k-tej obsługi trafiły w stanie  $s = 1$  mogły, w chwili  $t_0^k + 2 + \theta^k$ , trafić do k + 1-szej obsługi także w stanie  $s=1$ , a więc w chwili  $t_0^k + 2 + \theta^k + 2$  rozpoczęły pracę. W związku z tym, mogły one już uszkodzić się w chwili  $t_0^k + 8 + \theta^k$ , gdy inne obiekty zaledwie zostały skierowane do obsługi. Wyprowadzony tu wzór na wartość  $G_s^k(t)$  dla  $t > t_0^k + 2 + \theta^k$  nie uwzględni tego faktu, podobnie jak to było w poprzednim przypadku. Dalsze więc postępowanie celem uwzględnienia tego faktu jest analogiczne jak poprzednio opisane.

Wracając do przypadku, gdy wartości  $t_0^k$  były wielkościami zadanymi widzimy, że jeżeli, przeciwnie, nie  $t^k$  lecz  $\theta^k$  są wartościami zadanymi, otrzymujemy przypadek bardziej skomplikowany.

W praktyce możemy spotkać się z sytuacjami jeszcze bardziej skomplikowanymi. Gdybyśmy przyjęli, że gdy obiekt całkowicie się uszkodzi i znajdzie się w stanie  $s = 4$ , to jest on natychmiast kierowany do obsługi (a nie dopiero w zadanej chwili  $t_0^k$  lub po upływie czasu  $\theta^k$  od zakończenia k-tej obsługi). Wtedy wyrażenia na wartości  $G_s^k(t)$  dla  $s = 0, 1, 2, 3, 4$  skomplikowałyby się dalej. W szczególności, stan  $s = 4$  stałby się stanem nieistotnym, gdyż obiekt w tym stanie przebywałby w zbiorze chwil o mierze zero. Wszak założyliśmy, że natychmiast po osiągnięciu stanu  $s = 4$ , jest kierowany do obsługi, a więc przechodzi do stanu  $s = 0$ . Zbiór rozpatrywanych stanów, można zatem ograniczyć do stanów  $s = 0, 1, 2, 3$ .

## 5.6 Optymalizacja strategii obsługi technicznej obiektów o obserwowalnym stanie elementów

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy sposoby opisu procesu eksploatacji obiektów, dla których między wielkościami  $s$  - stanem obiektu, a wielkością  $\hat{S}$  - wektorem opisującym stan elementów, istniał wzajemnie jednoznaczny związek. Ponieważ wartości funkcji  $\alpha(s)$  są bezpośrednio obserwowalne, a funkcja ta jest różnowartościowa, to sytuacja taka odpowiada przypadkowi bezpośredniej obserwacji stanu elementów obiektu.

Obecnie dla takiego przypadku sformułujemy zagadnienie optymalizacji strategii obsługi technicznej. Pod pojęciem strategii będziemy rozumieli następujące wielkości:

- okres międzyobsługowy:  $\theta^k$
- zakres obsługi:  $p(k, s), N_p^{\text{odn}}$

z którymi związane są funkcje dane  $\phi_p$  oraz  $\Delta B_p$ .

Jak zauważyliśmy w poprzednim rozdziale, opis eksploatacji dla wymienionego rodzaju obiektów silnie zależał od przyjętych założeń, a w szczególności od tego, czy zadane są chwile  $t_0^k$  czy też okres  $\theta^k$ .

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy czas obsługi  $\phi_p$  nie zależy od rodzaju obsługi  $p$ , tak że  $\phi_p = \phi = \text{const}$  (rys. 37). Wtedy otrzymamy:

$$s^k(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + \emptyset \\ s & \text{dla } t = t_0^k + \emptyset \end{cases}$$

$$G_s^k(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + \emptyset, \quad s \in S \\ \sum_{u \in S} G(\gamma(k, u), s; t_0^k + \emptyset, t) G_u^{k-1}(t_0^k) & \text{dla } t_0^k + \emptyset = t, \quad s \in S \end{cases}$$

oraz

$$G_0^k(t) = 1 - \sum_{s \in S} G_s^k(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t_0^k \leq t < t_0^k + \emptyset \\ 0 & \text{dla } t_0^k + \emptyset = t \end{cases}$$

Oczywiście, ze względu na to, że  $\emptyset_p = \text{const}$ , to rozważany przypadek obejmuje sytuację gdy zarówno wartości  $t_0^k$  jak i  $\emptyset^k$  są dane. Oczekiwany zysk  $\bar{Z}^k$  na jednostkę czasu eksploatacji obiektu w k-tym okresie eksploatacji będzie równy

$$\bar{Z}^k = \frac{1}{\emptyset^k + \emptyset} \sum_{s \in S} \int_{t_0^k}^{t_0^k + \emptyset^k + \emptyset} \alpha(s) \cdot G_s^k(t) \cdot dt \Delta B_s^p \cdot G_s^{k-1}(t_0^k)$$

gdzie  $\Delta B_s^p$  jest kosztem realizacji obsługi rodzaju  $p = p(k, s)$ .

Zauważmy, że problem wyznaczania wartości  $\bar{Z}^k$  nie zmieni się radykalnie wówczas, gdy wielkość  $\emptyset$  potraktujemy jako zmienną losową o znanym rozkładzie, tak jak to się przyjmuje w teorii odnowy (i masowej obsłudze). Wyrażenie na wartość  $\bar{Z}^k$  może nam posłużyć do wyznaczania optymalnej (maksymalizującej wartość  $\bar{Z}^k$ ) wartości  $\emptyset^k$  - międzyremontowych przebiegów obiektu, a w rezultacie optymalnych chwil  $t_0^k$  skierowania obiektu do obsługi).

Znacznie bardziej skomplikuje się nam problem, gdy czas obsługi  $\emptyset_p$  będzie zależał od rodzaju obsługi  $p = p(k, u)$ , a więc stanu obiektu zgłaszającego się do obsługi nr k. W przypadku gdy chwila rozpoczęcia następnej obsługi jest odległa o czas  $\emptyset^k$  od chwili zakończenia obsługi poprzedzającej, otrzymamy dla obiektu, który w stanie u zgłosił się do k-tej obsługi, zysk warunkowy

$$\bar{z}_u^k = \frac{1}{\theta_{p(k,u)} + e^k} \sum_{s \in S} \left\{ \int_{t_0^k}^{t_0^k + \theta_{p(k,u)} + e^k} \alpha(s) \cdot G_{u,s}^k(t) dt - \Delta B_u^P \right\}$$

gdzie:

$$G_{u,s}^k(t) = G(\gamma(k,u), s; t_0^k + \theta_{p(k,u)}, t)$$

prawdopodobieństwo warunkowe przejścia obiektu ze stanu  $u$  w chwili rozpoczęcia  $k$ -tej obsługi (lub ze stanu  $\gamma(k,u)$  w chwili zakończenia  $k$ -tej obsługi) do stanu  $s$  w chwili  $t$ . Natomiast oczekiwany bezwarunkowy zysk  $\bar{z}^k$  będzie wyrażony formułą

$$\bar{z}^k = \sum_{u \in S} \bar{z}_u^k \cdot G_u^{k-1}(t_0^k)$$

Zwróćmy uwagę na to, że w przypadku stacjonarnych warunków eksploatacji, stałości intensywności przejść  $\lambda_{ij}$  (oraz niezależności  $\theta_i$  od  $k$ ) rozkłady  $G_{u,s}^k(t)$  (oraz  $G_s^k(t)$ ) nie zależą od wartości  $k$ . Stąd dla dostatecznie dużych wartości  $k$  otrzymamy:

$$\bar{z} = \sum_{u \in S} \frac{G_u}{\theta + \theta_{p(u)}} \left\{ \sum_{s \in S} \int_0^\theta \alpha(s) \cdot G_{u,s}(t) dt - \Delta B_u^P \right\}$$

przy tym

$$G_{u,s}(t) = G(\gamma(u), s; 0, t)$$

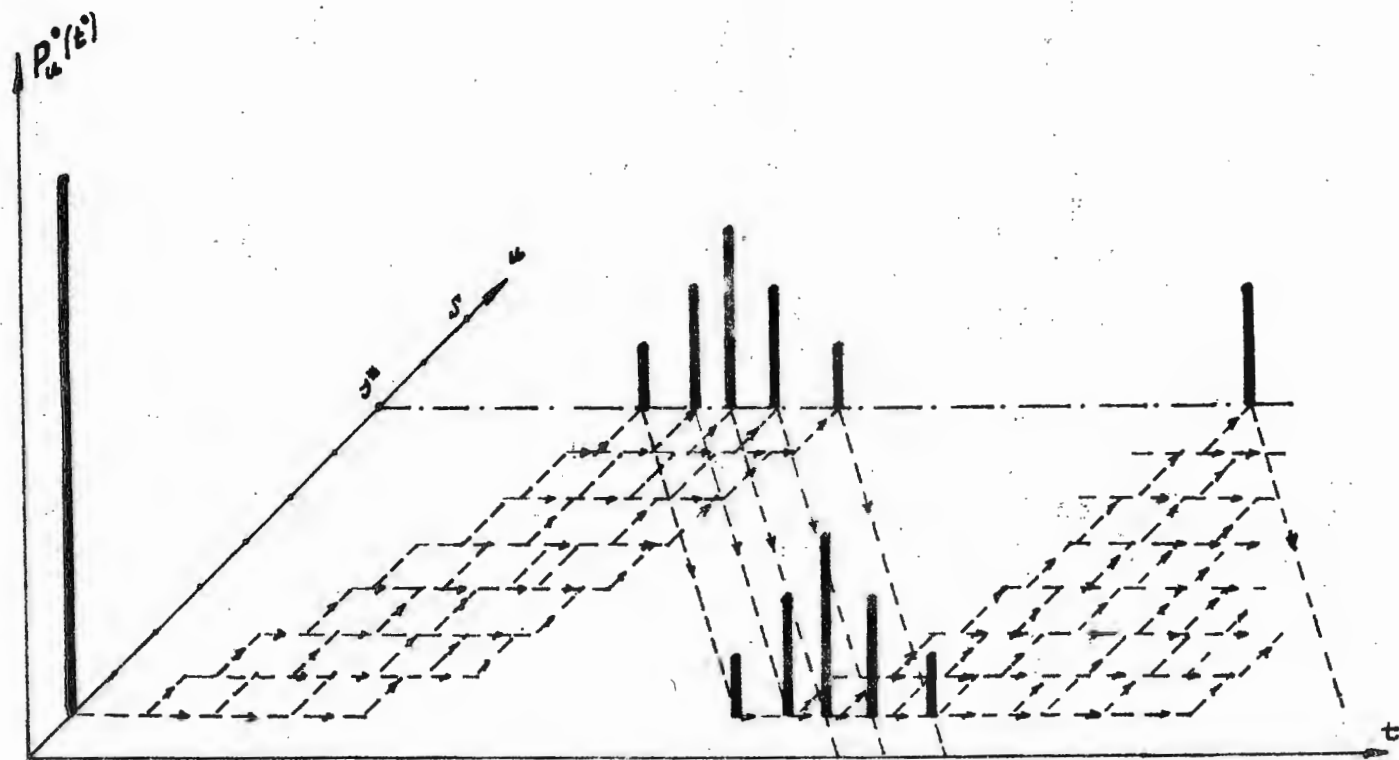
jest macierzą prawdopodobieństw przejść, a  $G_u$  jest rozkładem granicznym włożonego łańcucha Markowa.

Wartość  $G_u$  możemy wyznaczyć rozwiązując układ równań liniowych:

$$G_s = \sum_{u \in S} G_{u,s}(\theta) \cdot G_u$$

Wielkość  $\bar{z}$  może być miarą zyskowności eksploatacji. Obecnie dobierając funkcje  $\gamma(u)$ ,  $p(u)$  oraz wartość  $\theta$  możemy zmaksymalizować wartość  $\bar{z}$  określając w ten sposób optymalną strategię utrzymania obiektów w ruchu.





Rys.37 Mechanizm konstrukcji rozkładów i chwil zgłoszenia się obiektów do naprawy przy ustalonym stopniu ich zużycia i stałym czasem naprawy

Dotychczasowe rozważania były prowadzone przy założeniu, że ustalone są chwile  $t_0^k$ , bądź też okresy  $\theta^k$ . Dla obiektów, których stan elementów jest w pełni obserwowalny takie postępowanie jest nieracjonalne. W takim przypadku korzystniej jest kierować obiekt do obsługi, jeżeli jego stan  $s$  przekroczy pewien stan krytyczny  $s^*$ . Wtedy chwila  $t_0^k$  skierowania obiektu do obsługi będzie wielkością losową. Dla uproszczenia założymy, że  $p(k,s) = 1$  dla wszystkich  $s \in S$ , a więc, że obiekt jest odnawiany całkowicie, jeżeli zostanie skierowany do obsługi. Jak nietrudno zauważyć wielkość

$$\frac{d}{dt} \sum_{s=S}^S G^k(1,s; t^k, t)$$

jest gęstością prawdopodobieństwa, że obiekt w chwili  $t$  zostanie skierowany do obsługi. Stąd oczekiwany okres czasu pracy  $\theta^k$  będzie równy

$$\bar{\theta}^k = \sum_{s=s^*}^S \int_{t^k}^{\infty} \frac{d}{dt} G^k(1,s,t^k, t) dt$$

Wartość oczekiwana zysku na jednostkę czasu  $Z^k$  w  $k$ -tym okresie eksploatacji będzie określona wzorem:

$$Z^k = \sum_{u=s^*}^S \frac{G_u^{k-1}(t_0^k)}{\bar{\theta}^k + \theta_p(k,u)} \left\{ \sum_{s=1}^{s^*-1} \alpha(s) \int_{t^k}^{\infty} G_{1,s}^k(t) dt - \Delta B_u^P \right\}$$

gdzie:

$$G_{1,s}^k(t) = G^k(1,s; t^k, t)$$

Wartość  $G_u^{k-1}(t_0^k)$  prawdopodobieństwa, że skierowany do  $k$ -tej obsługi obiekt w chwili  $t_0^k$ , będzie w stanie  $u$ , wyznaczamy z rozwiązania układu liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu, w którym macierz  $\lambda_{ij}$  posiada zerowe wiersze o numerach  $s^*, s^* + 1, \dots, S$ . Kolumny o numerach  $s^*, s^* + 1, \dots, S$  w ogólnym przypadku nie mają wartości zerowych.

Jeżeli proces zużycia ma także możliwość przejść do stanu wyższego, pomijając po drodze stany o niższych numerach, to kolumny o numerach  $s^*, s^* + 1, \dots, S$  mają także wartości zerowe i macierz intensywności przejść o wymiarach  $S \times S$  redukuje się do macierzy  $s^* \times s^*$ . Układ  $S$  równań różniczkowych sprowadza się wtedy do układu o liczebności  $s^* \times S$ .

W opisanej sytuacji, gdy stan obiektu pogarsza się w sposób ciągły - bez skoków - a obiekt jest kierowany do obsługi w stanie  $s^*$ , wtedy wielkość

$$\frac{d}{dt} G^k(1, s; t^k, t)$$

będzie funkcją gęstości prawdopodobieństwa, że w chwili  $t$  obiekt w stanie  $s$  będzie skierowany do obsługi. Stąd

$$\bar{e}^{-k} = \int_{t^k}^{\infty} \frac{d}{dt} G^k(1, s^*; t^k, t) dt$$

oraz

$$\bar{z}^k = \frac{1}{e^{-k} + \theta} \left\{ \sum_{s=1}^{s^*-1} \alpha(s) \int_{t^k}^{\infty} G^k(1, s; t^k, t) dt - \Delta B \right\}$$

Sytuacja taka jest pokazana na rysunku 37.

W wyrażeniu na wartość  $\bar{z}^k$  nieznaną jest wielkość  $t^k$ , która jest także zmienną losową i to z dwóch powodów. Po pierwsze, chwila rozpoczęcia  $k$ -tej obsługi  $t_o^k$  jest losowa, po drugie, czas trwania naprawy zależy od stanu obiektu, który jest także zmienną losową. Zauważmy, że ten drugi powód nie występuje wówczas, gdy  $\theta_p$  nie zależy od wartości  $p$  lub gdy urządzenie jest kierowane do obsługi zawsze w tym samym stanie  $s^*$ .

Wymieniona trudność dotycząca nieznaności chwili  $t^k$  powoduje, że prawie zawsze przyjmuje się założenie upraszczające, iż wielkości  $\lambda_{1j}$  są stałymi i że warunki eksploatacji mają charakter stacjonarny. Wtedy prawdopodobieństwa przejścia

$$G^k(u, s; t^k, t)$$

nie zależą od zmiennej  $k$ , zależą natomiast od różnicy  $t-t^k$ , mogą więc być zapisane w postaci:

$$G(u, s; 0, t) = G_{u, s}(t)$$

W takim przypadku otrzymany:

$$\bar{e} = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} G_{1, s^*}(t) dt$$

oraz

$$\bar{Z} = \frac{G_u}{\bar{\theta} + \theta_p^*} \left\{ \sum_{s=1}^{s^*-1} \alpha(s) \int_0^{\infty} G_{u,s}(t) dt - \Delta B^P \right\}$$

gdzie

$$p^* = p(s^*), \quad \lambda_{s,s+1} > 0 \quad \text{tylko dla } s = 1, 2, \dots, s^* - 1$$

Wartości  $G_u$  możemy wyznaczyć rozwiązując, zamiast układu liniowych równań różniczkowych, układ równań liniowych o postaci:

$$G_s = \sum_{u=1}^{s^*} G_{u,s}(\theta) \cdot G_u$$

Przedmiotem optymalizacji jest w tym przypadku wielkość  $s^*$  przy zadanych funkcjach:  $p(s)$ ,  $\Delta B^P$  oraz  $\theta_p^1$  przy założeniu, przypomnijmy, że  $\gamma(u) = 1 = \text{const}$ .

### 5.7 Proces eksploatacji obiektu o nieobserwowalnych stanach elementów

W niektórych przypadkach obserwowana wartość korzyści a funkcji  $\alpha$  nie zależy od stanu

$$\hat{S} = \langle s_1, s_2, \dots, s_n, s_N \rangle$$

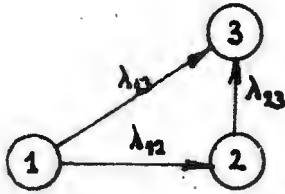
elementów obiektu, jeżeli tylko jest on nieuszkodzony. Wtedy ilość obserwowanych stanów obiektu jako całości ogranicza się do dwóch ( $S = 2$ ). Sytuacja taka występuje dla wielu urządzeń elektronicznych.

Założmy, że tak jak dotychczas, wartości wektora  $\hat{S}$  tworzą zbiór skończony.

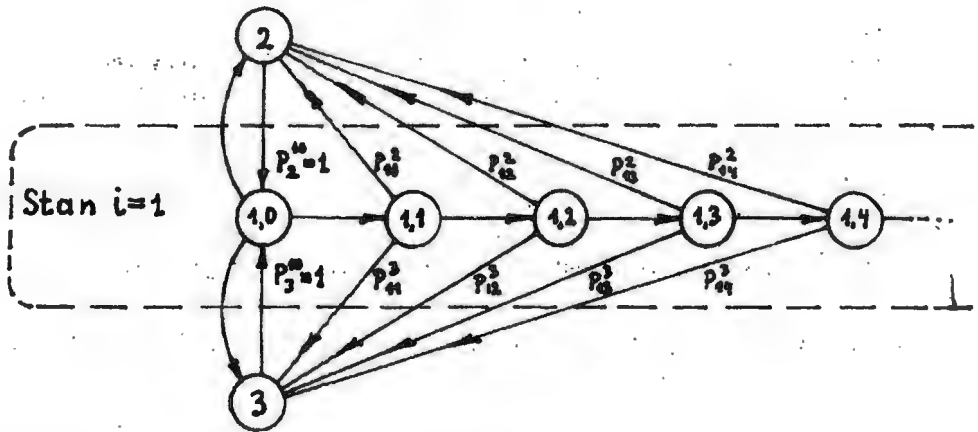
$$\Omega = \{ \hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_1, \dots, \hat{S}_J \}$$

Obserwacja stanu obiektu pozwala wyróżnić w tym zbiorze tylko stan  $S_j$  odpowiadający stanowi pełnego uszkodzenia tak, że funkcja  $\phi$  ma postać:

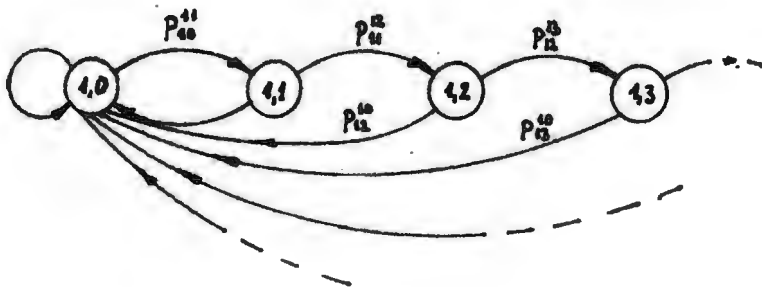
$$\phi(\hat{S}) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \hat{S} \in \{ \hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_1, \dots, \hat{S}_{j-1} \} \\ 1 & \text{jeżeli } \hat{S} = \hat{S}_j \end{cases}$$



Rys.38 Struktura procesu użytkowania



Rys.39 Struktura procesu eksploatacji



Rys.40 Struktura zagregowanego procesu eksploatacji

Jeżeli  $s = 0$ , to obiekt jest nieuszkodzony - zdalny, jeżeli  $s = 1$ , to obiekt jest uszkodzony tak, że

$$\alpha(s) = \begin{cases} a & \text{jeżeli } s = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } s = 1 \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że opisana tu sytuacja jest przeciwna do opisanej w poprzednim przykładzie. Tam wartość  $a$  zależała od każdej zmiany stanu elementów, tu wartość  $a$  niemal nie zależy od stanu elementów.

Dla wygody dalszych rozważań wprowadzimy przyporządkowanie liczb naturalnych wartościom wektora  $S_1$ :

$$i = \langle \Rightarrow \rangle S_1$$

numerując stany elementów obiektu. Przy tym obiekt jest sprawny ( $s = 0$ ) jeżeli  $i = 1, 2, \dots, J-1$  oraz jest niesprawny ( $s = 1$ ) jeżeli  $i = J$ . W opisanej sytuacji, bardzo niewygodnej dla eksploatatora, podejmuje się wysiłki pośredniego identyfikowania stanu elementów przy pomocy wmontowanych w obiekt liczników ilości wykonanej pracy w postaci: ilości przepracowanych godzin, ilości przebytych kilometrów, ilości zadziałań itp. Oznaczmy symbolem  $s$  ilość wykonanej przez obiekt pracy. Wybór symbolu nie jest przypadkowy, ma on kojarzyć się z oznaczeniem  $s$  stanu obiektu jako całości gdyż w pewnym sensie pełni on taką funkcję. Wynika stąd, że stan obiektu jako całości jest funkcją  $\phi$  stanu  $S$  elementów obiektu, natomiast z ilością wykonanej przez obiekt pracy  $s$  niewątpliwie związany jest (stochastycznie) stan  $S$  elementów. Jeżeli obiekt pracuje w czasie w sposób regularny, to rolę miernika  $s$  może spełniać czas kalendarzowy  $t$ . Przykładowo, taka sytuacja występuje dla różnego rodzaju konstrukcji, na przykład mostów.

W rezultacie, w ogólnym przypadku będzie interesował nas związek między wartościami  $i$ ,  $s$  oraz  $t$ .

Celem uproszczenia obliczeń, w naszym przykładzie przyjmijmy  $J = 3$  tak, że gdy elementy znajdują się w stanie  $i = 1$  lub  $i = 2$ , to obiekt jest zdalny ( $s = 0$ ) oraz  $\alpha(0) = a$ . Jeżeli  $i = 3$ , to obiekt jest niezdatny ( $s = 1$ ) oraz  $\alpha(1) = 0$ . Wybór tak małej wartości  $J$  - ilości wyróżnionych stanów elementów jest spowodowany wyłącznie chęcią zaoszczędzenia Czytelnikowi trudu czytania długich i monotonicznych wzorów, szczególnie, że na tym przykładzie chcemy dalej pokazać możliwość optymalizacji procesu eksploatacji przez dobór odpowiedniej strategii utrzymania obiektu w ruchu.

W czasie użytkowania obiektu możliwe przejścia od stanu elementów  $i$  do stanu  $j$  określa macierz intensywności przejść

$$[\lambda_{ij}(t)] \text{ o wymiarach } 3 \times 3 \text{ (patrz rys. 38).}$$

Żałujemy, że w naszym przykładzie wartości dodatnie przyjmują tylko intensywności  $\lambda_{12}(t)$ ,  $\lambda_{13}(t)$ ,  $\lambda_{23}(t)$ , natomiast wartości ujemne intensywności:

$$\lambda_{11}(t) = - [\lambda_{12}(t) + \lambda_{13}(t)]$$

$$\lambda_{22}(t) = - \lambda_{23}(t)$$

Przyjmujemy, że zachodzi także nierówność

$$\lambda_{23}(t) > \lambda_{13}(t)$$

Stan  $i = 3$  jest stanem pochłaniającym procesu użytkowania tak, że

$$\lambda_{33}(t) = 0$$

Opiszemy teraz związek między wartościami  $i$ ,  $s$  oraz  $t$ . Oznaczmy symbolem

$$P_{is}^{jr}(t)$$

prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $(i,s)$  do stanu  $(j,r)$  po upływie czasu kalendarzowego  $t$  liczonego od chwili, w której stwierdziliśmy naprawienie równe  $s$ . Przy tym pierwsza liczba oznacza stan elementów  $\{i \text{ lub } j\}$  a druga ilość wykonanej pracy  $\{s \text{ lub } r\}$  - na przykład, kilometrów (po upływie czasu  $t$ ). Na marginesie naszych rozważań zauważmy, że możliwa jest także inna sytuacja, gdy macierz funkcyjna  $[\lambda_{ij}(\cdot)]$  jest zależna od  $s$ , a nie od  $t$ , jak to przyjęliśmy. W celu uniknięcia komplikacji podczas rozważania dwóch wymienionych przypadków i celem uproszczenia oznaczeń przyjmujemy następane założenie, iż w naszym przypadku miernikiem wykonanej pracy  $s$  jest czas  $t$ , a więc że zachodzi tożsamość  $t = s$ . Wtedy przyjęte oznaczenie możemy uprościć używając symbolu

$$P_{is}^j(t) \text{ zamiast } P_{is}^{jr}(t)$$

gdyż

$$P_{is}^{jr}(t) = P_{is}^{j,s+t}(t)$$

znając wartość  $s$  i  $t$  możemy wyznaczyć wartość  $r = s+t$ .

Zwróćmy uwagę na następny fakt, że opis procesu będzie wykorzystywany do optymalizacji procesu eksploatacji, a w tym do wyznaczania optymalnego okresu międzyobsługowego  $\theta$ . Obsługi w postaci kontroli stanu obiektu lub odnowy obiektu mają na celu zapobieżenie uszkodzeniu obiektu. Jest więc oczywiste, że odnowę obiektu należy wykonywać zawsze, gdy zostanie stwierdzony stan  $i = 2$ , elementów obiektów lub gdy obiekt ulegnie uszkodzeniu - gdy  $i = 3$ . W takim razie interesować nas będą wyłącznie wartości prawdopodobieństw:

$$P_{1,s}^1(t), P_{1,s}^2(t), P_{1,s}^3(t)$$

Opiszemy obecnie proces użytkowania obiektu przy stanie początkowym  $(1,0)$ , a więc po odnowie obiektu gdyż założymy, że po każdej odnowie (naprawie, remoncie) zachowuje się tak jak obiekt nowy. Układ opisujących równań

różniczkowych będzie miał postać:

$$\frac{d}{dt} p_{10}^1(t) = p_{10}^1(t) \cdot \lambda_{11}(t)$$

$$\frac{d}{dt} p_{10}^2(t) = p_{10}^1(t) \cdot \lambda_{12}(t) + p_{10}^2(t) \cdot \lambda_{22}(t)$$

$$\frac{d}{dt} p_{10}^3(t) = p_{10}^2(t) \cdot \lambda_{23}(t) + p_{10}^3(t) \cdot \lambda_{33}(t)$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymamy:

$$p_{10}^1(t) = \exp\left\{-\int_0^t [\lambda_{12}(x) + \lambda_{13}(x)] dx\right\}$$

$$p_{10}^2(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_{23}(x) dx\right\} \int_0^t \lambda_{12}(x) \cdot \exp\left\{\int_0^x [\lambda_{23}(y) - \lambda_{12}(y) - \lambda_{13}(y)] dy\right\} dx$$

$$p_{10}^3(t) = 1 - p_{10}^1(t) - p_{10}^2(t)$$

w przypadku gdy stan początkowy określa para  $(1, s)$ ,  $s > 0$  otrzymamy:

$$p_{1,s}^1(t) = \exp\left\{-\int_s^{s+t} [\lambda_{12}(x) + \lambda_{13}(x)] dx\right\}$$

i podobnie  $p_{1,s}^2(t)$ ,  $p_{1,s}^3(t)$ : wstawiając  $s$  do wzorów w miejsce dolnej granicy całkowania 0 oraz  $s+t$  zamiast  $t$  - górnej granicy całkowania.

Zauważmy, że możemy uprościć nasze oznaczenia i zawęzić nasze rozważania jeszcze dalej, gdyż interesować nas będą wyłącznie prawdopodobieństwa przejścia w okresie  $\Theta$  między dwiema kolejnymi chwilami obsługi (odnowy lub kontroli stanu). Faktycznie więc jesteśmy zainteresowani opisem włożonego (w proces eksploatacji) łańcucha Markowa o prawdopodobieństwach przejścia  $p_{1,s}^j(t)$  dla

$$s = s_0, s_1, s_2, \dots, s_k$$

oraz

$$t = e_1, e_2, \dots, e_k \quad \text{gdzie} \quad e_k = s_k - s_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

przy tym  $s_0 = 0$ . W rezultacie końcowym interesują nas wyłącznie wielkości:



$$p_{1, s_{k-1}}^j(e_k) = p_{1, k-1}^j$$

Wartości tych wielkości są określone więc wzorami:

$$p_{1, k-1}^1 = \exp\left\{-\int_{s_{k-1}}^{s_k} [\lambda_{12}(x) + \lambda_{13}(x)] dx\right\}$$

$$p_{1, k-1}^2 = \exp\left\{-\int_{s_{k-1}}^{s_k} \lambda_{23}(x) dx\right\} \cdot \int_{s_{k-1}}^{s_k} \lambda(x)_{12} \exp\left\{-\int_{s_{k-1}}^x [\lambda_{23}(y) - \lambda_{12}(y) - \lambda_{13}(y)] dy\right\} dx$$

$$p_{1, k-1}^3 = 1 - p_{1, k-1}^1 - p_{1, k-1}^2$$

Dla tak opisanego sposobu eksploatacji obiektu, gdy po każdym okresie  $\theta_k$  następuje kontrola stanu elementów obiektu oraz ewentualna odnowa obiektu w przypadku gdy stwierdzony zostanie stan  $i = 2$ , graf procesu eksploatacji jest widoczny na rys. 39. Ponieważ przejścia ze stanu  $(2, s)$  do stanu  $(1, 0)$  oraz ze stanu  $(3, s)$  do stanu  $(1, 0)$  są w pełni deterministyczne, to wyróżnienie tych stanów jest zbędne. Umożliwia to przedstawienie struktury procesu eksploatacji w postaci grafu widocznego na rysunku 40, gdzie przyjęto oznaczenie:

$$p_{1k}^{10} = p_{1k}^2 + p_{1, k}^3$$

Prawdopodobieństwo  $p_{1k}^{10}$  posiada interpretację prawdopodobieństwa zdarzenia, że w chwili  $s_k$  stwierdzony został stan elementów  $i = 2$ , bądź w przedziale czasu  $\langle s_k, s_{k+1} \rangle$  obiekt uległ uszkodzeniu. Każdemu więc przypadkowi stwierdzenia stanu  $(1, 0)$  odpowiada zdarzenie wystąpienia przerwy w procesie użytkowania - celem dokonania odnowy obiektu (ze stanu 2 lub 3).

Przypomnijmy, że obserwowany przez nas łańcuch Markowa jest migawkową obserwacją niemarkowskiego procesu eksploatacji obiektu w charakterystycznych punktach na osi czasu; w chwilach dokonywania kontroli stanu - w chwilach ukończenia odnowy - rozpoczęcia nowego odcinka procesu eksploatacji. Przy tym, długość takiego odcinka eksploatacji rozpoczynającego się od stanu  $1, 0$  jest losowa, jednakże charakterystyka probabilistyczna tych odcinków nie ulega zmianie - jest stacjonarna. Klasa tego typu procesów jest znana pod nazwą procesów regeneratywnych lub regenerujących się. W rezultacie, łańcuch procesu eksploatacji będzie opisany nieskończonym układem równań różnicowych o postaci:

$$p_{1,k}(n) = p_{1,k-1}(n-1) \cdot p_{1,k-1}^1 \quad k = 1, 2, \dots$$

$$p_{1,0}(n) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{1,l}(n-1) \cdot p_{1,l}^{10}$$

gdzie symbolem  $p_{1,k}(n)$  oznaczono prawdopodobieństwo, że po  $n$  okresach obiekt znajdzie się w stanie  $i = 1$  oraz  $s = s_k$ , natomiast  $p_{1,0}(n)$  jest prawdopodobieństwem, że obiekt po  $n$  okresach znajdzie się w stanie  $i = 1$  oraz  $s = 0$ . Okresy liczone są od początku eksploatacji obiektu, tak że:

$$p_{1,k}(0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k \neq 0 \end{cases}$$

Ponieważ wszystkie stany w rozpatrywanym łańcuchu eksploatacji, którego graf jest widoczny na rys. 39 są tranzytywne, a proces jest stacjonarny (dla ustalonych wartości  $s_k$  lub  $0_k$ ), to łańcuch ma własność ergodyczną, a zatem istnieją prawdopodobieństwa graniczne.

$$p_{1k} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{1k}(n)$$

spełniające układ

$$p_{1k} = p_{1,k-1}^1 \cdot p_{1,k-1}^1 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$p_{10} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{1k} \cdot p_{1k}^{10}$$

gdzie

$$p_{1k}^{10} = p_{1k}^2 + p_{1k}^3$$

Rozwiązaniem tego układu jest wyrażenie

$$p_{1k} = p_{10} \cdot \prod_{l=1}^k p_{1,1-l}^1 \quad k = 1, 2, \dots$$

Nieznana wartość  $p_{10}$  możemy wyznaczyć z równania

$$p_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{1k} = 1$$

a po podstawieniu wartości  $p_{1k}$  z równania:

$$p_{10} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=0}^k p_{1, l-1}^1 \right) = 1$$

Stąd

$$p_{10} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^k p_{1, l-1}^1}$$

oraz

$$p_{1k} = \frac{\prod_{l=1}^k p_{1, l-1}^1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^k p_{1, l-1}^1}$$

Ale ponieważ

$$p_{1, k-1}^1 = \exp \left\{ - \int_{s_{k-1}}^{s_k} [\lambda_{12}(x) + \lambda_{13}(x)] dx \right\}$$

więc ostatecznie

$$p_{1k} = \frac{\exp \left\{ - \int_0^{s_k} [\lambda_{12}(x) + \lambda_{13}(x)] dx \right\}}{\sum_{l=1}^{\infty} \exp \left\{ - \int_0^{s_l} [\lambda_{12}(x) + \lambda_{13}(x)] dx \right\}}$$

### 5.8 Optymalizacja strategii utrzymania w ruchu obiektu o nieobserwowalnych stanach elementów

Przeprowadzimy obecnie próbę optymalizacji procesu eksploatacji tak opisanego przypadku, przez wybór najodpowiedniejszej strategii utrzymania obiektu w ruchu. Przez strategię utrzymania ruchu, często nazywaną także strategią obsługi technicznej obiektu, będziemy rozumieli sposób wyznaczania chwil wykonania tych obsługa wraz z określeniem ich zakresu.

W naszym przypadku, celem uproszczenia rozważań wyróżniamy tylko dwa rodzaje obsługi, a mianowicie kontrolę stanu i odnowę. Pierwsza obsługa polega na identyfikacji stanu elementów obiektu, a więc określeniu wartości  $S$  lub  $s$ . Druga na wymianie zużywających się elementów na nowe, w pełni odnawiające obiekt.

Najogólniej, wyróżniamy trzy zasadnicze rodzaje strategii.

- I. Odnowa zależna od bezpośrednio obserwowalnego (w sposób ciągły) stanu elementów  $S$ .
- II. Odnowa bezwarunkowa (niezależna od stanu elementów) wykonywana okresowo, po upływie określonego: czasu kalendarzowego, czasu pracy, przebiegu itp. obiektu.
- III. Odnowa warunkowa (zależy od stwierdzonego podczas kontroli stanu po upływie określonego: czasu kalendarzowego, czasu pracy, przebiegu, itp.

Zauważmy, że obsługa polegająca na kontroli stanu występuje wyłącznie w trzecim rodzaju strategii.

Dla pierwszej strategii jest ona zbyteczna, gdyż stan elementów jest obserwowany w sposób ciągły, w drugim - gdyż odnowa nie zależy od stanu  $S$ .

Nietrudno zauważyć, że strategia I ma zdecydowaną przewagę nad pozostałymi lecz jest możliwa do zastosowania jedynie w nielicznych przypadkach takich jakimi był opisany w poprzednim przykładzie. W naszym przykładzie jest ona niemożliwa do wykorzystania, ponieważ nie mamy możliwości obserwacji stanu elementów obiektu sprawnego. Oczywiście, zależy nam aby nie dopuścić do uszkodzenia obiektu, ale z drugiej strony, wykonanie kontroli stanu tak jak i planowej odnowy wymaga przerwania pracy obiektu narażając nas na straty wynikające z przerw w pracy obiektu oraz dodatkowe koszty wykonywania obsługi. Jeżeli jednak obiekt ulegnie niespodziewanej awarii (katastrofie), to w obu interesujących nas przypadkach strategii (II i III) jest on natychmiast kierowany do naprawy (odnowy), której zarówno czas trwania, jak i koszt mogą być dużo większe od kosztu remontu planowanego (być może dlatego, że jest to związane z zakupem nowego obiektu oraz koniecznością pokrycia strat będących skutkami katastrofy).

W obu sytuacjach zasadniczym parametrem strategii jest okres, po którym jest wykonywana bezwarunkowa odnowa (dla strategii II) lub kontrola stanu (dla strategii III). Okres ten może być mierzony w różnych jednostkach: kalendarzowych (takich jak: dzień, tydzień, rok), czasu pracy (takich jak: godziny pracy, zmiany robocze), przebiegu (takich jak: przebyte kilometry, liczba okrążeń) itp.

Miernik ten oznaczymy symbolem  $s$  zachowując symbol  $t$  dla zwyczajnego oznaczenia czasu kalendarzowego. Oczywiście, w pewnych przypadkach może zachodzić identyczność  $s = t$ . Ten właśnie przypadek będziemy dalej rozważać.

Wybór symbolu  $s$  dla oznaczenia miernika okresu nie jest przypadkowy i ma się kojarzyć Czytelnikowi z symbolem  $s$  określającym stan obiektu jako całości, z tą różnicą, że obecnie  $s$  jest zmienna rzeczywista (nieujemna), podczas gdy dla oznaczenia stanu obiektu  $s$  była liczbą naturalną. Oczywiście, zmienna rzeczywista  $s$  (napracowanie, przebieg) nie definiuje stanu elementów lub obiektu, lecz jest to wielkość związana z rzeczywistym stanem elementów w sensie probabilistycznym. Na podstawie obserwowanej wartości  $s$  możemy więc opierać swoje przypuszczenia dotyczące rzeczywistego stanu elementów, a więc także potrzeby remontu (planowego) lub kontroli (planowej).

Jeżeli założymy, że obiekt eksploatujemy od początku, to stan nowego obiektu możemy oznaczyć para liczb  $(1, 0)$ , gdzie pierwsza liczba oznacza stan elementów:  $i = 1$ , (co odpowiada wartości wektora stanu elementów  $\hat{S} = \hat{S}_1$ , a druga

określa napracowanie  $s$  obiektu, w tym przypadku  $s = 0$ . W przypadku gdy obsługa techniczna zwana całkowitą odnową w pełni przywraca obiektowi własności obiektu nowego, tak jak to będziemy dalej zakładać, to w przypadku stosowania strategii rodzaju II wystarczy określić wartość  $s_{II}$  napracowania, po którym następuje całkowita odnowa obiektu, a więc powrót do stanu  $(1,0)$ . W przypadku strategii III-ciej trzeba określić ciąg wartości  $s_1, s_2, \dots, s_n \dots$  napracowania, po osiągnięciu którego obiekt podlega obsłudze zwanej kontrolą stanu, o ile, oczywiście, po którejś z kontroli nie został on skierowany do całkowitej odnowy.

W naszym przypadku przyjmiemy, że jeżeli w czasie kontroli stanu stwierdzimy, iż obiekt jest w stanie  $i = 2$  (co odpowiada wektorowi stanu elementów  $S = S_2$ ), to obiekt kierujemy do całkowitej odnowy. Jeżeli natomiast stwierdzimy, że  $i = 1$ , to obiekt dopuszczamy do dalszej eksploatacji, aż do chwili następnej kontroli stanu.

Oczywiście, jeżeli obiekt został uszkodzony, co odpowiada wartości  $i = 3$ , to natychmiast uszkodzony obiekt jest kierowany do całkowitej odnowy.

Z wykonaniem każdej obsługi wiążą się koszty obsługi  $K_i$  oraz czas trwania obsługi  $\phi_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , przy tym wielkości  $K_0, \phi_0$  charakteryzują czynność kontroli stanu, natomiast wielkości  $K_i, \phi_i$  dla  $i = 1, 2, 3$  charakteryzują odnowę w przypadku gdy jest ona dokonywana na obiekcie, którego elementy znajdują się w stanie  $i = 1, 2, 3$  (lub  $S_1, S_2, S_3$ ), odpowiednio. Oczywiście,  $K_{i-1} < K_i$  oraz  $\phi_{i-1} < \phi_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ .

Zauważmy, że w przypadku stosowania strategii II, jej efekty zależą tylko od wyboru  $s_{II} = \theta_{II}$  - okresu międzyremontowego, natomiast w przypadku stosowania strategii III od ciągu wartości  $s_k$  lub  $\theta_k$   $k = 1, 2, \dots$ , (porównaj wzory na wartości  $p_{ik}^1(t)$  lub  $p_{ik}$  w procesie opisanym w poprzednim punkcie). Gdybyśmy dla strategii III przyjęli dodatkowe założenie, że odstępy czasu między chwilami dokonywania kontroli stanu winny być stałe, to dla strategii III należałoby wyznaczyć tylko jedną wielkość  $\theta_{III} = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_k$ .

Zauważmy, że aby uniknąć ponawiania procedury optymalizacji strategii III, niezależnie od optymalizacji strategii II, możemy postąpić inaczej. Określimy nową strategię mieszaną utrzymania ruchu. Mianowicie, niech strategia mieszana składa się z ciągu  $K-1$  kontroli stanu obiektu wykonywanych w chwilach

$$s_k = \sum_{l=1}^k \theta_l \quad (k = 1, 2, \dots, K-1), \text{ po których w chwili}$$

$s_k = \sum_{l=1}^k \theta_l$  następuje bezwarunkowa odnowa - oczywiście, o ile nie nastąpiła ona wcześniej. Inaczej mówiąc, jeżeli okaże się, że obiekt w kolejnych chwilach  $s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K-1$ ) jest w stanie  $i = 1$ , to i tak w chwili  $s_k$  zostanie (już bez sprawdzania stanu) bezwarunkowo odnowiony.

Zauważmy, że w przypadku gdy  $K = 1$ , strategia mieszana odpowiada strategii II-go rodzaju, w przypadku gdy  $K \rightarrow \infty$  - odpowiada ona strategii III-go rodzaju.

W celu wyznaczenia optymalnej, mieszanej strategii obsługi wyznaczamy oczekiwane efekty eksploatacji (dla ustalonego  $k$ ) na jednostkę czasu. Zauważmy, że  $k$ -ty odstęp czasowy, składa się z dwóch odcinków czasu:

- pierwszego, w którym obiekt jest użytkowany przynosząc dochód  $\alpha_{\max}$  zł. na jednostkę czasu np. dobę, o długości losowej, lecz nie przekraczającej wartości

$$\theta_k = s_k - s_{k-1}$$

w przypadku gdy nie ulegnie uszkodzeniu w czasie użytkowania);

- drugiego, w którym obiekt podlega planowej obsłudze (przeoglądowi i ewentualnie warunkowej odnowie w przypadku III-ciej strategii lub bezwarunkowej odnowie w przypadku II-giej strategii), o długości losowej zależnej od stanu obiektu w chwili  $s_k$ .

W rezultacie, oczekiwana wartość  $\tau_k$ ,  $k$ -tego odstępu czasowego jest równa sumie dwóch wielkości

- oczekiwanego czasu użytkowania

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} [1 - p_{1,k}^3(x)] dx$$

oraz oczekiwanego czasu obsługi

$$\theta_0 [1 - p_{1,k-1}^3] + \sum_{i=1}^3 \theta_i \cdot p_{1,k-1}^i$$

tak że

$$\tau_k = \sum_{i=1}^2 T_i \cdot p_{1,k-1}^i + \int_{s_{k-1}}^{s_k} p_{1,k-1}^1(x) dx + \theta_3$$

gdzie oznaczono

$$T_i = \theta_0 - \theta_3 + \theta_i; \quad i = 1, 2$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzór na oczekiwaną wartość zysku  $d_k$  przynieszonego przez eksploatowany obiekt w  $k$ -tym odstępie czasowym, jako oczekiwaną różnicę dochodu i kosztów obsługi

$$d_k = \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} p_{1,k-1}^i(x) dx + A_i \cdot p_{1,k-1}^i \right] + K_3$$

gdzie oznaczono

$$A_i = k_0 - K_3 - K_i; \quad i = 1, 2,$$

Wyznamy obecnie wartoř z oczekiwanego zysku na jednostk czasu jaki przynosi nam eksploatowany obiekt. Poniewa zysk na jednostk czasu jest ilorazem całkowitego losowego zysku  $\bar{D}$ , jaki przynosi obiekt w okresie między dwiema kolejnymi chwilami całkowitej odnowy oraz losowej długości  $\bar{T}$  tego okresu, więc

$$\bar{z} = E \frac{\bar{D}}{\bar{T}}$$

Zwrómy uwagę, że w kolejnych odcinkach czasowych o losowej długości  $\bar{T}$  probabilistyczne charakterystyki procesu stochastycznego zmiany stanu obiektu są identyczne, podobnie jak wielkości  $\bar{T}$ . Proces eksploatacji składa się więc z nieskończonego ciągu niezależnych odcinków procesu o identycznych charakterystykach. Jak wiemy (patrz np (1)), w takim przypadku, zachodzi równość

$$E \frac{\bar{D}}{\bar{T}} = \frac{E\bar{D}}{E\bar{T}}$$

przy czym, zauważmy, zmienna  $\bar{T}$  nigdy nie przyjmuje wartości równej zeru.

Wykorzystując to twierdzenie możemy napisać:

$$\bar{z} = \frac{E\bar{D}}{E\bar{T}} = \frac{\bar{D}}{\bar{T}}$$

Pozostaje nam wyznaczyć wartości  $\bar{T}$  oraz  $\bar{D}$ . Jak obliczyliśmy, prawdopodobieństwo, że obiekt odnowiony przetrwa bez odnowy k okresów międzyprzeładowych jest równe

$$\frac{P_{1k}}{1-p_{10}}$$

gdyż każdy odcinek rozpoczyna się ze stanu (1,0) z prawdopodobieństwem równym jedności. Stąd

$$\bar{T} = \frac{1}{1-p_{10}} \sum_{k=1}^K P_{1k} \cdot \tau_k$$

$$\bar{D} = \frac{1}{1-p_{10}} \sum_{k=1}^K p_{1k} \cdot d_k$$

oraz

$$\bar{z} = \frac{\sum_{k=1}^K d_k \cdot p_{1k}}{\sum_{k=1}^K \tau_k \cdot p_{1k}}$$

Zwróćmy uwagę na to, że w przypadku stosowania strategii II-giej, gdy  $K = 1$ , mamy

$$z_{II} = \frac{d_1 \cdot p_{11}}{\tau_1 \cdot p_{11}} = \frac{d_1}{\tau_1}$$

Jeżeli następnie podstawimy wartości  $p_{1k}$  oraz  $d_k$  i  $\tau_k$ , to otrzymamy:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[ a \int_{S_{k-1}}^{S_k} p_{1,k}^l(x) dx + A_1 \cdot p_{1,k-1}^1 \right] + K_3 \right\} \prod_{l=1}^k p_{1,l-1}^1}{\sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[ \int_{S_{k-1}}^{S_k} p_{1,k-1}^l(x) dx + T_1 \cdot p_{1,k-1}^1 \right] + \phi_3 \right\} \prod_{l=1}^k p_{1,l-1}^1}$$

gdzie:

$$\prod_{l=1}^k p_{1,l-1}^1 = \exp \left\{ - \int_0^{S_k} [\lambda_{12}(x) + \lambda_{12}(x)] dx \right\}$$

$$p_{1,k-1}^1(x) = \exp \left\{ - \int_{S_{k-1}}^x [\lambda_{12}(y) + \lambda_{13}(y)] dy \right\}$$



$$p_{1,k-1}^2(x) = \exp\left(-\int_{s_{k-1}}^x \lambda_{23}(y) dy\right) \cdot \int_{s_{k-1}}^x \lambda_{12}(y) x$$

$$\times \exp\left(-\int_{s_{k-1}}^y [\lambda_{23}(z) - \lambda_{12}(z) - \lambda_{13}(z)] dz\right) dy$$

$$p_{1,k-1}^1 = p_{1,k-1}^1(s_k)$$

Zauważmy, że wielkość  $\bar{z}$  zależy od ciągu liczb  $s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) oraz wartości  $K = 1, 2, \dots$ , tak że

$$\bar{z} = \bar{z}(s_1, s_2, \dots, s_K, K)$$

W rezultacie, problem wyboru optymalnej strategii utrzymania obiektu w ruchu możemy sprowadzić do rozwiązania zadania matematycznego wyznaczenia takich wartości  $s_k = s_k^*$  oraz  $K = K^*$  dla których  $\bar{z}$  osiąga maksimum. Optymalne wartości  $s_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, K^*$ ), definiują optymalną strategię.

Powyższe zadanie możemy rozwiązać następująco:

Początkowo wyznaczamy  $s_1^*$  dla  $K^* = 1$ , po tym wyznaczamy  $s_1^*, s_2^*$  dla  $K^* = 2$ , na przykład, metodą programowania dynamicznego) itd. Następnie porównujemy wyliczone wartości  $Z$ , dla kolejnych wartości  $K^* = 1, 2, 3, \dots$  i wybieramy tę wartość  $K = K^*$ , dla której  $\bar{z}$  osiągnęło wartość największą.

Zagadnieniem wyboru algorytmu optymalizacyjnego nie będziemy się zajmowali. Pewne rozważania na ten temat (dla nieco inaczej sformułowanego problemu) znajdzie Czytelnik w literaturze.

## UWAGI KOŃCOWE

Jak Czytelnik zauważył, ogólny model procesu eksploatacji zbliżony do rzeczywistego jest bardzo złożony. Przy aktualnym stanie rozwoju metod optymalizacji rzadko mogą być wykorzystane do rozwiązywania problemów optymalizacji i konstrukcji obiektów technicznych. W tej sytuacji pozostaje możliwość wykorzystania opisanych modeli do symulacji eksploatacji przy danych parametrach charakteryzujących zarówno konstrukcje, jak strategie obsługi obiektu technicznego.

W tym sensie możliwe jest doskonalenie konstrukcji maszyn i urządzeń przy pomocy komputera symulującego oczekiwany przebieg procesu eksploatacji. Ze względu na to, że symulacja może odtwarzać oczekiwany przebieg całego procesu życia obiektu, to proces doskonalenia maszyny lub urządzenia może dotyczyć zarówno

- struktury konstrukcji, charakterystyk zużycia i niezawodności elementów z uwzględnieniem ich kosztów wytwarzania

jak i

- strategii obsługi, odstępów międzyobsługowych, rodzajów obsługi, zakresów kontrolnych sprawdzeń i wymian z uwzględnieniem wszelkich konsekwencji związanych z kosztami,

W niektórych szczególnych przypadkach istnieje możliwość wykorzystania metod optymalizacji. Dotyczy to w szczególności tych obiektów, dla których wyznaczane są chwile obsługi po wykonaniu określonej pracy lub po upływie określonego czasu niezależnie od ich stanu, a prawdopodobieństwo ich nagłego uszkodzenia jest pomijalnie małe.

Innym szczególnym przypadkiem jest sytuacja, w której obserwowalny stan obiektu jako całości jednoznacznie określa stan jego elementów. Wtedy istnieje możliwość przerywania procesu użytkowania obiektu - gdy osiągnie on określony stan - celem skierowania do odpowiedniej obsługi.

Niestety, wymienione wyżej przypadki nie są zbyt często spotykane w praktyce. Pierwszy dotyczy obiektów, od których wymagana jest wysoka niezawodność, a ich złożoność uniemożliwia łatwą ocenę stanu elementów składowych po efektach pracy. Drugi dotyczy bądź obiektów bardzo prostych (umożliwiających łatwą identyfikację stanu elementów po efektach ich pracy), bądź wyposażonych w systemy ciągłej, automatycznej diagnostyki elementów składowych.

Najprostszym przypadkiem jest sytuacja gdy obiekt podlega tylko jednemu rodzajowi obsługi - pełnej odnowie, a jednocześnie wyróżnia się tylko dwa możliwe stany obiektu (zdalny lub uszkodzony). Wtedy opis procesu eksploatacji sprowadza się do znanego procesu odnowy.

## L I T E R A T U R A

1. R. Barlow, R. Proschan - Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rinekat and Winston: N.York 1975.
2. R. Barlow, F. Proschan - Mathematical theory of reliability, N.York J. Wiley 1965.
3. Beichelt F. Franken P. - Zuverlässigkeit Instandhaltung VEB Verlag Technik Berlin 1983.
4. Waprosy matematycznej teorii niezawodności - E.J.Barziłowicz, I.K.Beljew, B.A.Kasztanow i dr.; Pod red. B.W.Gnedenko - M, Radio i Swjaz 1983-376 c.
5. Elements of Theory of Markov Processes and Thier Applications - A.T.Bhorucha - Reid Mc Grow - Hill Book comp. INC N.York, Toronto, Londyn 1960.
6. R.R. Borkow, F. Proschan - Mathematical Theory of Reliability - John Wiley - New. York 1965.
7. Markowskije procesy E.B. Dynkin Fizmatiz 1963.
8. An introduction to probability theory and its applications W. Feller N. York J. Willey 1968-I 1971 II.
9. Gadasin B.A. Uszakow I.A. (1975): Niezawodność złożonych informacyjno - uprawiających. Moskwa: Sow. Radio.
10. Gadasin B.A. Uszakow I.A. Niezawodność złożonych informacyjno - uprawiających system - M. Sow. Radio, 1975 - 191 c.
11. Gercbach J.B.Korbonskij C.H.B. Modeli otkazow - M. Sow. Radio, 1966-166 c.
12. K. Grzesiak - Niezawodność urządzeń elektronicznych - WNT, Warszawa 1983.
13. Gnedenko B.W. Beljajew, J.K. Solowjew, A.D. Matematyckije metody w teorii niezawodności - M. Nauka, 1965 - 524 c.
14. J. Kałuski - Niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych - Skrypt nr 1143 - Politechnika Śląska 1983.
15. Kanarczuk W.E. Osnovy niezawodności maszyn - Kijew: Nauk. dumka 1982 - 246 c.
16. A First course in Stochastic Processes S. Karlin Academic Press N.York, London 1968.
17. Finite Markov Chains J.G.Kemeny J.L Snell Dartmonth College 1959.
18. Kremer G. Libenmer M. Stacjonaryje słucznyje procesy M. Mir 1969-398 c.
19. B. Kopyciński - Zarys teorii odnowy i niezawodności - WNT, Warszawa 1973.
20. Perewerzew E.S. Słucznyje procesy w parametryczeskich modelach niezawodności. Naukowa dumka Kijew 1987.

21. S. Piasecki - Elementy teorii niezawodności i eksploatacji urządzeń, Skrypt serii "Teoria badań operacyjnych, WAT, Warszawa 1974.
22. Polowko A.M. Osnovy teorii nadezhnosti - M. Nauka 1964 - 446 c.
23. Poradnik niezawodności - Podstawy matematyczne - Wyd. Przem. Masz. WEMA, Warszawa, 1982.
24. M. Prażewski, E. Korczak, M. Zaremba - Niezawodność urządzeń elektronicznych - WKiŁ 1987.
25. Rajkin A.L. Elementy teorii nadezhnosti technicheskikh system. Pod red. I.A. Uszkowa - M. sow. Radio 1978 - 280 c.
26. Соловьев А.Д. (1978): Расчет и оценка характеристик надежности Москва: Изд. Знание.
27. Tichonow B.J. Mirnow M.A. Markowskije procesy - M. sow. Radio, 1977-488 c.
28. R. Tomaszek, D. Janicki - Modele niezawodnościowe urządzeń. Materiały "Szkoły Zimowej 74" Problemy i Modele Eksploatacji Maszyn - Ośrodek Postępu technicznego - Katowice 1974.
29. Wencel A.D. Kurs teorii slučajnych procesow - M. Nauka, 1975 - 318 c.
30. W. Zamojski - Teoria i technika niezawodności - Skrypt Politechnika Wrocławska 1976.

**ISBN 83-85847-01-4**

---

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy  
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN,  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
tel. 37-68-22 e-mail: [kotuszew@ibspan.waw.pl](mailto:kotuszew@ibspan.waw.pl)