POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI
Marek LIBURA
Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego
finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część II.
Modelowanie dyskretne i optymalizacja w analizie portfelowej na rynku papierów dłużnych

strategie ubezpieczania portfela, wymagające częstych operacji wymiany instrumentów).

Ryzyko branżowe wyraża zależność ruchów stóp procentowych dla odrębnych sektorów, takich jak sektor instrumentów Skarbu Państwa, sektor instrumentów władz municypalnych, lub branż, np. branża bankowa itp. Ponieważ branża/sektor instrumentów poddane są podobnym wpływom, to ich instrumenty reagują podobnie na wspólne czynniki ryzyka.

Ryzyko walutowe wynika z fluktuacji współczynników wymiany dla walut. Inwestorzy rynku walutowego mający w swym portfelu waluty obce tracą, gdy waluta krajowa podlega deprecjacji i zyskują, gdy podlega aprecjacji. Rynek ten jest także wrażliwy na sytuację gospodarczą konkretnego kraju, w tym na jego sytuację społeczno-polityczną. Rządy zmieniają politykę podatkową, handlową, a także mogą ograniczać w różny sposób operacje walutowe.

Ryzyko niestabilności politycznej i ryzyko rezydualne obejmują wiele czynników ryzyka o mniejszej wadze dla każdego odrębnie, ale o niepomijalnym znaczeniu, gdy są traktowane łącznie.

4. Modelowanie zagadnień analizy portfelowej przy użyciu zmiennych mieszanych

Ten rozdział poświęcamy w całości przykładom modelowania matematycznego zagadnień decyzyjno-analitycznych i optymalizacyjnych, z którymi mogą mieć do czynienia podmioty rynku kapitałowego. Uwagę skupiamy, zgodnie z wielokrotnymi wcześniejszymi zapowiedziami, na modelach ze zmiennymi decyzyjnymi mieszanymi, tzn. ze zmiennymi reprezentowanymi przez dowolne liczby ze skończonego zbioru, liczby rzeczywiste, liczby całkowite, w tym zero-jedynkowe. Modelowane problemy obejmują zagadnienia związane z warunkami i ograniczeniami wprowadzanymi przez zorganizowane rynki, oraz wyborami i preferencjami decydenta, tak emitenta papierów dłużnych, jak i inwestora instytucjonalnego lub indywidualnego. Mówiąc o modelowaniu zagadnień analizy portfelowej myślimy zarówno o modelowaniu ograniczeń i analizie scenariuszy, jak i o optymalnym (ewentualnie suboptymalnym) wyborze decyzji. Szczególną uwagę skupiamy na rynku papierów dłużnych i ich pochodnych. Wybór ten jest usprawiedliwiony przez dynamiczny rozwój tego rynku, a przede wszystkim przez zasadniczą zmianę, jaka dokonała się na nim w ostatnim dziesięcioleciu, polegającą głównie na odejściu od strategii „kup i czekaj" w stronę strategii aktywnych, wymagających pogłębionych i dokonywanych w krótkim czasie analiz i decyzji podejmowanych na ich podstawie. Jednocześnie ten segment rynku jest doskonałym poligonem doświadczalnym dla pokazania przydatności modelowania matematycznego z użyciem zmiennych o wartościach mieszanych, a także wyzwaniem do sprostania rosnącym wymaganiom obliczeniowym.

Pokażemy w jaki sposób, skomplikowane na pozór, warunki którym musi sprostać portfel inwestora, można sprowadzić do równości i nierówności liniowych, stosując także proste techniki linearyzacji, w taki sposób, aby zadanie optymalizacji mieściło się w klasie zadań programowania mieszanego i zadań przepływów w sieciach (punkt 1.1. monografii, a także jej część III).

4.1. Zastosowania zmiennych dyskretnych

W szeregu miejscach tej części monografii wymieniliśmy przykłady warunków, których wprowadzenie do modelu nie jest możliwe bez użycia zmiennych dyskretnych. Zajmiemy się dokładniej tą problematyką. Pojawienie się zmiennych dyskretnych w modelu ma trzy ważniejsze źródła: - po pierwsze, niedopuszczalność zaokrągleń do wartości całkowitej składowych rzeczywistych wektora optymalnego (lub dopuszczalnego), w przypadkach gdy mogłoby to spowodować nieakceptowany błąd w decyzji o inwestycji; - po drugie, konieczność modelowania matematycznego różnych warunków logicznych występujących w opisie zadania; - po trzecie, skokowe zmiany wartości funkcji lub skokowa zmiana kierunku wzrostu funkcji. Uwzględnienie w modelu pierwszej grupy warunków wprowadza do niego, w sposób naturalny zmienne całkowitoliczbowe. Uwzględnienie warunków drugiej i trzeciej grupy staje się możliwe przez wprowadzenie nowych zmiennych dyskretnych (najczęściej zero-jedynkowych) i dodatkowych ograniczeń dla tych zmiennych. Zaznaczmy przy tym, że modelowanie z użyciem zmiennych dyskretnych dotyczy tak ograniczeń zadania jak i jego funkcji celu, Jones (1992), Słomiński i Bertocchi (1995), Słomiński (1995).

4.1.1. Dyskretność zmiennych powodowana regułami emisji papierów dłużnych i mechanizmami funkcjonowania rynków

Najprostszym i naturalnym powodem wprowadzenia zmiennych dyskretnych jest modelowanie warunków emisji i obrotu papierów dłużnych, przede wszystkim bonów skarbowych, bonów pieniężnych i obligacji. Podamy kilka przykładów zaczerpniętych z polskiego rynku dłużnych papierów wartościowych.

- Bony skarbowe (emitowane w imieniu Skarbu Państwa przez Ministerstwo Finansów) i bony pieniężne Narodowego Banku Polskiego są emitowane w nominałach: 10 000 zł, 100 000 zł i 1 000 000 zł (wartości są podane w nowych złotych);
- Skarbowe obligacje są emitowane w nominałach: 100 zł dla obligacji 3-letnich o oprocentowaniu zmiennym, 1 000 zł dla obligacji 2 i 5-letnich o oprocentowaniu stałym i dla obligacji opcyjnej 10-letniej (emitent zastrzega sobie prawo wykupu po cenie nominału po upływie przynajmniej 7 lat).

Interesujących przykładów emisji papierów dłużnych o wartościach całkowitych dostarczają rynki północno - amerykańskie.

- Bony skarbowe (*Treasury Bills*) są dostępne w nominałach poczynając od 10 000 dolarów, ze skokiem wartości równym 5 000 dolarów do wartości 500 milionów dolarów;
- Obligacje skarbowe średnioterminowe (*Treasury Notes*) są emitowane o okrągłych wartościach nominalnych w przedziale: wartość minimalna = 5 000 dolarów, wartość maksymalna = 500 milionów dolarów;
- Obligacje skarbowe długoterminowe (*Treasury Bonds*): wartość minimalna = 1 000 dolarów, wartość maksymalna = 1 000 000 dolarów.

Dalszych przykładów naturalnej dyskretyzacji zmiennych decyzyjnych dostarczają rynki papierów pochodnych i rynek notowań ciągłych, gdzie obowiązuje obrót pakietami (blokami) instrumentów przy obowiązywaniu pewnych dodatkowych „antyspekulacyjnych" ograniczeń. Na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych, w systemie notowań ciągłych, jednostką transakcyjną jest określona przez Zarząd Giełdy liczba pojedynczych papierów wartościowych:

- 10 sztuk dla obligacji 2- i 5-letnich;
- 100 sztuk dla obligacji rocznych i 3-letnich;
- 100 sztuk dla akcji.

Podobne przykłady można podać dla giełd amerykańskich:

- Wartość nominalna jednego kontraktu FUTURES dla *T-Bonds*, na *Chicago Board of Trade*, wynosi 100 000 dolarów;
- Wartość minimalna jednego kontraktu FUTURES na rynku pieniężnym Eurodolarów wynosi 1 000 000 dolarów;
- Standardem dla rynku blokowego obligacji jest blok o wartości minimum 2 000 000 dolarów, przy skoku ceny wynoszącym 1 000 000 dolarów. Obrót pakietami ułamkowymi jest możliwy, ale rynek jest dużo mniej płynny i koszty transakcji są dużo większe;
- Pojedynczy inwestor inwestujący w opcje lub kontrakty terminowe FUTURES, może się spotkać z ograniczeniem na: - liczbę jednocze-

śnie zajmowanych pozycji, np. - nie więcej niż 1 000; - liczbę pozycji do realizacji w danym miesiącu, np. - nie więcej niż 300.

Innym przykładem dyskretności, gdzie zmienne decyzyjne przyjmują wartości rzeczywiste ze skończonego zbioru dyskretnego, jest mechanizm zmiany ceny na rynku notowań ciągłych. Na WGPW limit wahań cen, w fazie notowań ciągłych wynosi 5 p.b., względem kursu otwarcia, tak dla obligacji jak i dla akcji. Na giełdach finansowych północno-amerykańskich zmiany ceny kontraktów FUTURES, na obligacje skarbowe, są ustalane z kwantem 1/32$.

4.1.2. Minimalny próg początkowy inwestycji

Inwestycje z minimalnym progiem początkowym są typowe dla rynków pierwotnych i z reguły obowiązują uczestników przetargu. Także obrotowi wtórnemu towarzyszą takie warunki, przykładów dostarcza pakietowy obrót instrumentami pochodnymi oraz obrót na rynku notowań ciągłych. Schematycznie sytuację ilustruje Rysunek 13, gdzie L jest dolnym progiem przystąpienia do inwestycji w określony papier, a I jest dużą liczbą, nie mniejszą od możliwej wartości górnej dla konkretnej inwestycji.

Rys. 13. Inwestycja z progiem dolnym

Mamy zatem warunek: $x \geq$ L albo $x = 0$, gdzie x jest nakładem, który zamierzamy ponieść. Wprowadźmy pomocniczą zmienną zero-jedynkową z, która musi spełniać warunek:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{kiedy } x \geq L, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{64}$$

Dwa ograniczenia liniowe oraz pomocnicza zmienna binarna z gwarantują spełnienie warunku (64):

$$\begin{aligned} &x - \mathrm{I}z \leq 0 \\ &x - \mathrm{L}z \geq 0 \\ &z \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{65}$$

Pokażemy, że pożądane relacje zachodzą. Zauważmy więc, że: jeżeli $x = 0$, to $z = 0$ (z uwagi na nierówność drugą) i jeżeli $x > 0$, to $z = 1$ (z uwagi na ograniczenie pierwsze). Łatwo sprawdzić, że jeżeli $z = 0$ to musi być $x = 0$ (ograniczenie pierwsze), i jeżeli $z = 1$ to $x > 0$ (ograniczenie drugie). Na koniec zauważmy, że zmienna x może być zmienną rzeczywistą lub zmienną dyskretną, w tym całkowitoliczbową.

4.1.3. Wybór elementu ze skończonego zbioru

Często zachodzi potrzeba dokonania wyboru jednego elementu należącego do skończonego zbioru elementów. Mogą nimi być wartości nominalne emitowanej obligacji, typ emitowanej obligacji, wariant rozłącznych inwestycji, itp. Przypadki te można zapisać formalnie za pomocą zmiennych dyskretnych (lub zero-jedynkowych) i ograniczeń liniowych. Niech $S = \{s_1, \ldots , s_n\}$ będzie n-elementowym zbiorem. Wybór dokładnie jednego elementu, s, z tego zbioru zapewniają równania (patrz: punkt 1.1 tej części monografii):

$$s = s_1 z_1 + s_2 z_2 + \ldots + s_n z_n, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = 1, \tag{66}$$

przy czym $z_i \in \{0,1\}$, dla $i = 1,2, \ldots,n$.

4.1.4. Przykład ograniczenia

Przyjmijmy oznaczenia:

- U – zbiór instrumentów denominowanych w liczbach całkowitych,

- y_k – zmienna decyzyjna odpowiadająca wartości zakupionych obligacji, uwzględniająca całkowitoliczbowość nominałów i minimalny próg zakupu, $k \in U$,
- m_k – minimalny próg wartości zakupu dla obligacji $k \in U$,
- u_k – maksymalna wartość inwestycji w obligację $k \in U$,
- Δ_k – skok zmiany wartości nominalnej przy emisji obligacji $k \in U$,
- z_k – zmienna zero-jedynkowa (zmienna wskaźnikowa).

Załóżmy następującą sytuację. Inwestor rozważa zakup obligacji k na kwotę y_k, ale nie większą od u_k. Jeżeli $y_k > 0$, to musi zachodzić nierówność $y_k \geq m_k$, zaś y_k jest zmienną o wartościach całkowitych ze zbioru $\{m_k + \Delta_k, ..., m_k + j\Delta_k, ..., m_k + n\Delta_k = u_k\}$.

Formalne ograniczenia dla zmiennej y_k mają postać:

$$\begin{gathered} m_k \leq y_k \leq u_k, \quad k \in U \\ y_k \in \{0, m_k, m_k + \Delta_k, m_k + 2\Delta_k, ..., m_k + n\Delta_k = u_k\}, \quad k \in U. \end{gathered} \tag{67}$$

Chcemy, aby te ograniczenia były zgodne z warunkami zadania danego wzorami (1a) - (1c). W tym celu wykorzystamy wyniki punktów 4.1.1. i 4.1.2.

Spełnienie warunku: „jeżeli $y_k > 0$ to $y_k \geq m_k$" zapewnią nierówności:

$$\begin{aligned} & y_k - u_k z_k \leq 0 \\ & y_k - m_k z_k \geq 0 \\ & z_k \in (0,1\} \end{aligned} \tag{65a}$$

Spełnienie warunku: „jeżeli $y_k \geq m_k$ to $y_k \in \{m_k, m_k + \Delta_k, m_k + 2\Delta_k, ..., m_k + n\Delta_k = u_k\}$" zapewnią nierówności:

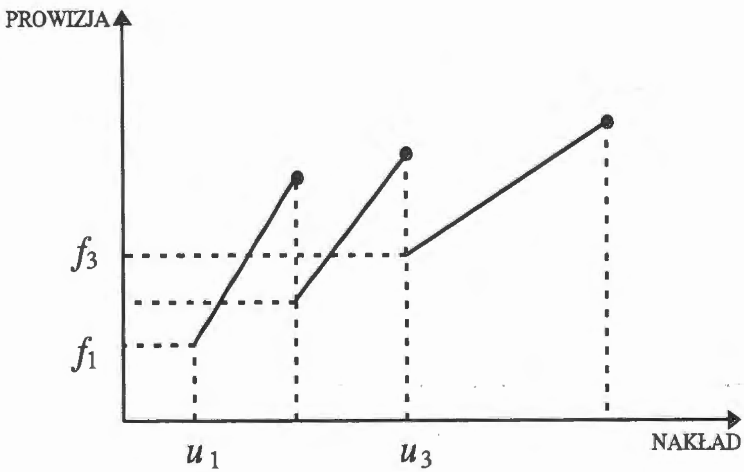
$$\begin{gathered} y_k = m_k z_{k1} + (m_k + \Delta_k) z_{k2} + ... + (m_k + n\Delta_k) z_{kn}, \\ \sum_{i=1}^{n} z_{ki} \leq 1 \end{gathered} \tag{68}$$

gdzie: z_{ki} – jest zmienną zero-jedynkową, $k, i = 1, ..., n$.

4.1.5. Koszty transakcji

Modele matematyczne, które opisują ogólne problemy równowagi rynków kapitałowych, jak również modele pierwszego stopnia przybliżenia, pomijają koszty transakcji, prowizje i inne elementy, które obciążają inwestycje, i które muszą być brane pod uwagę przy bardziej szczegółowej analizie.

Zajmiemy się kosztami transakcji giełdowych w postaci prowizji maklerskiej. Prowizja ta zależy od wielkości inwestycji, przy czym obowiązują przedziały ich wartości. W każdym przedziale obowiązuje pewna wartość stała, rosnąca w proporcji malejącej z kolejnością przedziałów i składowa zmienna rosnąca proporcjonalnie do wartości inwestycji w przedziale, przy czym współczynnik proporcjonalności maleje ze wzrostem przedziału (Rysunek 14).



Rys. 14. Zachowanie się prowizji w funkcji wielkości inwestycji

Podamy przykłady prowizji pobieranych przez biura maklerskie od wartości zrealizowanych zleceń kupna lub sprzedaży akcji i obligacji Skarbu Państwa w obrocie giełdowym.

- **AKCJE i prawa poboru w obrocie giełdowym**:

Wartość transakcji w zł

Od	Do	Prowizja
0 –	250 zł	5 zł
250 –	500 zł	5 zł + 2,00% kwoty ponad 250 zł
500 –	2 500 zł	10 zł + 1,50% kwoty ponad 250 zł
2 500 –	10 000 zł	40 zł + 1,00 % kwoty ponad 250 zł
10 000 –	50 000 zł	115 zł + 0,75% kwoty ponad 250 zł
50 000 –	300 000 zł	415 zł + 0,50% kwoty ponad 250 zł
300 000 zł	i więcej	0,50%

- **OBLIGACJE Skarbu Państwa w obrocie giełdowym na rynku powszechnym**:

Wartość transakcji w zł

Od	Do	Prowizja
0 –	500 zł	3 zł
500 –	5 000 zł	3 zł + 0,60% kwoty ponad 250 zł
5 000 –	10 000 zł	30 zł + 0,50% kwoty ponad 250 zł
10 000 –	50 000 zł	55 zł + 0,40% kwoty ponad 250 zł
50 000 zł	i więcej	215 zł + 0,30% kwoty ponad 250 zł

- **OPCJE na giełdzie północno - amerykańskiej**:

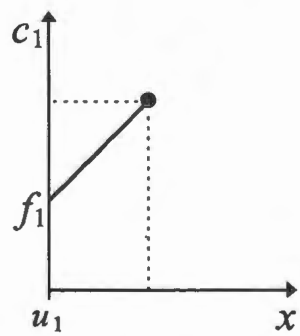
Wartość transakcji w $

Od		Do	Prowizja
0	–	1 999 $	25 $ + 1,50% kwoty ponad 0 $
2 000	–	4 999 $	35 $ + 1,00% kwoty ponad 2 000 $
5 000	–	9 999 $	45 $ + 0,80% kwoty ponad 5 000 $
10 000 $		i więcej	99 $ + 0,25% kwoty ponad 10 000 $

Koszt transakcji w pierwszym przedziale prowizji (aby uprościć zapis, bierzemy przedział pierwszy, patrz Rysunek 15) przedstawia funkcja:

$$c_1 = f_1 + v_1 x \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq u_1, \text{ oraz} \qquad (69)$$

$$c_1 = 0, \ \text{dla } x = 0.$$



Rys. 15. Funkcja prowizji w pierwszym przedziale

Załóżmy, że maksymalizujemy zwrot z inwestycji mieszczącej się w tym jednym przedziale wartości, w związku z czym prowizja w funkcji celu wystąpi ze znakiem ujemnym. Niech u_1 oznacza granicę górną inwestycji w pierwszym przedziale, a δ - dowolnie małą liczbę większą od zera. Wprowadzamy zmienną z_1 o wartościach 0 lub 1, od której żądamy, aby miała wartość 0 dla $x = 0$, oraz wartość 1 dla $u_1 \geq x > 0$. Wymaganie to spełni wcześniej omawiany układ nierówności (65), gdzie: I = u_1, L = δ. Zauważmy, że jeżeli $x = 0$, to $z_1 = 0$, z uwagi na maksymalizację wartości funkcji celu i występowaniu w niej prowizji ze znakiem ujemnym. Jeżeli $x > 0$, to $z_1 = 1$ z uwagi na ograniczenie pierwsze. Łatwo sprawdzić, że jeżeli $z_1 = 0$ to musi być $x = 0$ (ograniczenie pierwsze), i jeżeli $z_1 = 1$ to $x > 0$ (ograniczenie drugie). Zmienną z_1 wykorzystamy do modyfikacji funkcji c_1 : $c_1 = f_1 z_1 + v_1 x$, ($x \geq 0$, $z_1 = 0$ lub 1).

4.1.6. Współczynnik osłony pozycji

Osłona (*hedging*) pozycji lub portfela to popularna strategia stosowana przez inwestorów dla uniknięcia strat spowodowanych niekorzystnymi zmianami cen lub stóp procentowych. W przypadku instrumentów dłużnych osłona polega na utrzymywaniu dwóch pozycji - długiej i krótkiej; np. inwestor osłania swoją pozycję długą na rynku kasowym sprzedając określoną liczbę kontraktów terminowych FUTURES. Liczba sprzedanych kontraktów przypadająca na jednostkę portfela, nosi nazwę współczynnika osłony. Dla ustalenia właściwej wartości współczynnika osłony należy wziąć pod uwagę trwałość instrumentów posiadanych i sprzedanych. Można pokazać, Bierwag (1987), że współczynnik osłony h dla bezopcyjnych papierów dłużnych przyjmuje postać:

$$h = -\frac{DP_K(r_0)}{D_F P_F(r_0)} \tag{70}$$

gdzie: D - trwałość portfela na rynku kasowym,
D_F - trwałość portfela na rynku terminowym,
r_0 - wartość początkowa rynkowej stopy procentowej,
$P_K(r_0)$ - wartość portfela kasowego,
$P_F(r_0)$ - cena jednostki instrumentu objętego przyszłą dostawą.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę warunki obrotu na rynku instrumentów dłużnych, to współczynnik osłony powinien być liczbą całkowitą. W wielu przypadkach, chociaż nie zawsze, wystarczy zaokrąglenie wartości h do najbliższej liczby całkowitej.

4.2. Modelowanie wypłat z inwestycji w papiery pochodne

Funkcja wypłat dla inwestycji w papiery pochodne jest funkcją nieliniową, czasami funkcją odcinkowo liniową argumentu S_T - ceny instrumentu bazowego. Analizujemy wypłatę dla posiadacza jednej europejskiej opcji, przy pominięciu kosztów transakcji i innych kosztów rynkowych (kompensacja, podatek). Wypłata w_c w momencie zapadalności T, dla nabywcy opcji kupna przy cenie wykonania kontraktu E, ma postać: $\max\{(S_T - E), 0\}$. Z kolei, wypłata w_p dla wystawcy jednej europejskiej opcji sprzedaży ma postać: $-\max\{(E - S_T), 0\} = \min\{(S_T - E), 0\}$.

Innymi słowy, dla pozycji długiej w opcji kupna obowiązuje zależność:

$$w_c = \begin{cases} S_T - E, & \text{kiedy } S_T \geq E, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \tag{71}$$

a dla pozycji krótkiej w opcji sprzedaży:

$$w_p = \begin{cases} S_T - E, & \text{kiedy } S_T \leq E, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{72}$$

W rozdziale 2 podaliśmy przykłady wypłat otrzymywanych przez zajęcie prostych i kombinowanych pozycji na rynku opcji. W następnym punkcie przedstawimy warunek (71) w postaci odpowiednich nierówności liniowych, wykorzystując zmienną wskaźnikową. W punkcie 4.3 ten sam warunek przedstawimy w postaci przepływu w łuku sieci uogólnionej.

4.2.1. Modelowanie funkcji wypłaty dla opcji kupna

Rozważmy inwestora zajmującego pozycję długą przez nabycie europejskiej opcji kupna. Inwestor zamyka pozycję, realizując kontrakt, gdy $(S_T - E) > 0$ i zamyka pozycję bez realizacji kontraktu (traci premię) w przeciwnym przypadku (sytuacja, dla której $(S_T - E) = 0$ jest obojętna z punktu widzenia sposobu zamknięcia pozycji). Aby uwzględnić dwa różne sposoby zamknięcia pozycji, wprowadzimy zmienną wskaźnikową z, od której żądamy aby:

$$z = \begin{cases} 1, & \text{kiedy} \quad (S_T - E) > 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{73}$$

Żądanie to spełnia poniższy układ nierówności, sprawdzenie którego pozostawiamy Czytelnikowi:

$$\begin{aligned} & \mathrm{I}\, z - (S_T - E) \geq 0 \\ & (\mathrm{I} - \delta) \geq [\mathrm{I} - (S_T - E)]\, z, \end{aligned} \tag{74}$$

gdzie: I jest liczbą wystarczająco dużą, a δ - liczbą wystarczająco małą.

Przy uwzględnieniu (73) i (74), wypłata za zrealizowany kontrakt wyniesie: $w_c z = (S_T - E)z$. Jeżeli inwestor zainwestował x złotych (ze względu na sprzedaż blokową zmienna x może być zmienną całkowitą) to w przypadku realizacji kontraktu wypłata wyniesie: $(w_c z) x = [(S_T - E) z]x$.

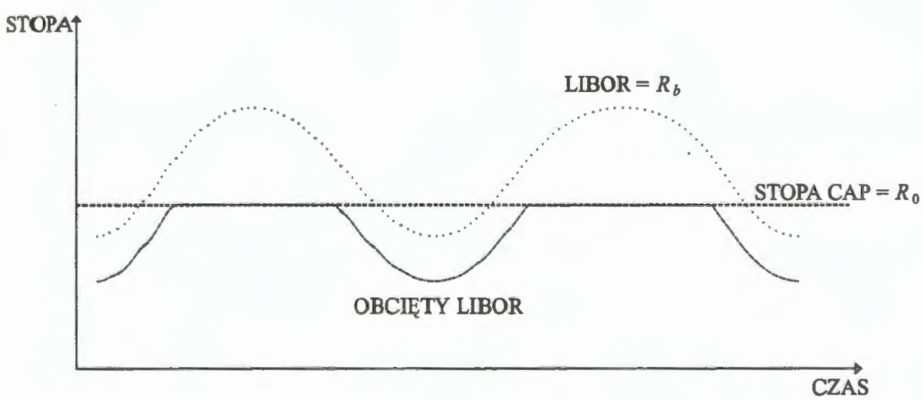
Nieliniowość typu $(z x)$ linearyzujemy następująco. Iloczyn $(z x)$ zastępuje zmienna dyskretna $y = (z x)$. Z uwagi na binarność zmiennej z, zmienna y przyjmuje dwie wartości: $y = x$ albo 0. Aby zachować liniowość równań i nierówności, należy zlinearyzować warunek „albo $y=x$, albo $y=0$", który wyrażają relacje: $[(y=0) \Leftrightarrow (x=0)]$, $[(y>0) \Leftrightarrow (x>0)]$. Następujący układ nierówności spełnia nasze życzenie:

$$\begin{aligned} x+z-\ y &\leq 1, && \text{(a)} \\ x+\mathrm{I}\,z-2y &\geq 0, && \text{(b)} \\ y &\leq x && \text{(c)} \end{aligned} \tag{75}$$

Za poprawnością wzoru (75) przemawia prosta argumentacja. Jeżeli $z=0$, to dzięki (a) i (b): $y=x=0$. Jeżeli $z=1$, to dzięki (a), (b) i (c): $x>0$ i $y>0$. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla modelowania wypłaty dla opcji kupna.

4.2.2. Funkcja wypłaty dla kontraktu CAP

Nieliniowość o charakterze „$\max\{a, b\}$", występuje także w kontraktach CAPS - kontraktach opcyjnych na pożyczkę o zmiennym oprocentowaniu, z obcięciem górnego poziomu zmiany stopy procentowej. Opcja na stopę procentową z obcięciem od góry, jest instrumentem finansowym oferowanym na rynku pozagiełdowym, i służy zmniejszeniu ryzyka inwestora w związku z wahaniami zmiennego oprocentowania pożyczek, Hull (1993).



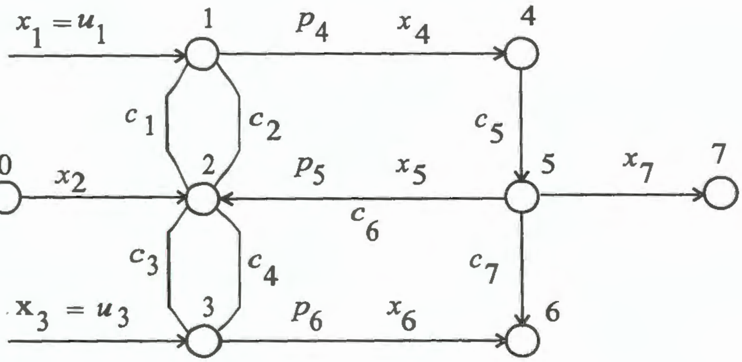
Rys. 16. Stopy procentowe w kontrakcie CAP

Wahania te są odnoszone zwykle do wartości LIBOR dla odpowiedniego horyzontu czasu (Rysunek 16).

Instytucja finansowa obsługująca tego typu pożyczki gwarantuje inwestorowi rekompensatę, w zamian za opłatę opcyjną, gdy aktualna stopa procentowa przekroczy stosowny LIBOR. Jeżeli różnica ta ma wartość niedodatnią to inwestor traci opłatę opcyjną, w przeciwnym przypadku stopa procentowa wypłaty dla inwestora (odniesiona do wysokości pożyczki) wyniesie: $\max\{0, R_b - R_0\}$, gdzie R_b - bieżąca stopa procentowa, R_0 - poziom obcięcia. Technika modelowania tego wyrażenia za pomocą zmiennej binarnej i dodatkowych ograniczeń jest oczywista, w świetle wcześniejszych rozważań (wzory: (71) - (75)).

4.3. Zastosowania sieci przepływów

Zagadnienie przepływów w sieci prostej (wzory: (6a) - (6c)) i w sieci uogólnionej (wzory: (7a) - (7c)) zostało przedstawione we wprowadzeniu do tej części pracy. W kontekście interesujących nas zastosowań finansowych, elementom i parametrom wprowadzonych sieci można nadać proste interpretacje. Na przykład, sieć może modelować przepływ kapitału w postaci gotówki papierów wartościowych lub innych aktywów, Słomiński (1995). Węzły sieci utożsamiają, w tym przypadku, moment i fakt wprowadzenia kapitału (węzły - źródła), wyprowadzenia kapitału (węzły - ujścia) oraz jego alokacji (węzły - przejściowe). Łuki wychodzące z danego węzła utożsamiają możliwości alokacji kapitału w kierunku węzłów, do których prowadzą. Decyzję o alokacji i jej rozmiar prezentuje wartość zmiennej przypisanej łukowi. Węzeł początkowy łuku i jego kierunek określają typ łuku. Łuki wychodzące ze źródła noszą nazwę łuków wejściowych, a łuki wchodzące do ujścia - łuków wyjściowych. Łuki łączące inne węzły nazywa się, ogólnie, łukami operacyjnymi, a nazwę szczegłową przypisujemy im zależnie od spełnianej roli. Rysunek 17 jest przykładem sieci zwykłej.



Rys. 17. Sieć przepływów finansowych

Rysunek ten pokazuje prosty przykład inwestycji jednoetapowej, przy założeniu że: dysponujemy akcjami o wartości $x_1 = u_1$, gotówką o pewnej wartości x_2 oraz rachunkiem bankowym na sumę $x_3 = u_3$. Węzeł 0 jest źródłem, węzeł 7 - ujściem, pozostałe węzły są węzłami przejściowymi. Łukiem wejściowym jest łuk (0,2), a łukiem wyjściowym - łuk: (5,7); łuki: (1,4), (2,5) i (3,6) są to łuki inwestycyjne; łuk (5,2) jest łukiem pożyczki. Łuki wchodzące do węzłów: 1, 3, i 7 symbolizują odpowiednio: istnienie kapitału w postaci akcji, konta bankowego i wyprowadzenie gotówki po zrealizowaniu inwestycji. Koszty transakcji są oznaczone współczynnikami c_j (koszt c_5 odpowiada stopie procentowej pożyczki bankowej), współczynniki p_i odpowiadają zyskom z inwestycji. Łukom są przypisane pojemności, które dla prostoty rysunku pominięto. Wartości zmiennych decyzyjnych x_1 i x_3 są ustalone na poziomie pojemności górnych odpowiednich łuków, co oznacza że w zadaniu optymalizacyjnym wystąpią one jako zadane wartości początkowe. Funkcja celu zadania optymalizacyjnego (sieć prosta) może przyjąć postać:

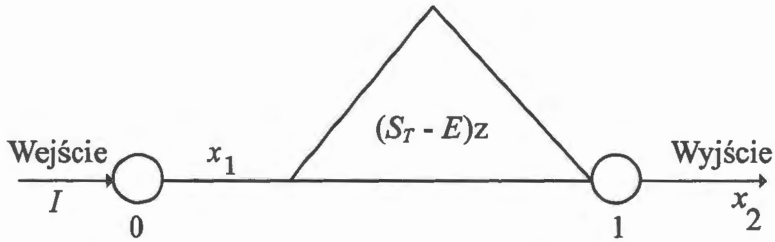
$$\max_{\mathbf{x}}\left(\sum_j p_j x_j - \sum_j c_j x_j\right) \tag{76}$$

gdzie zyski i koszty są liczbami dodatnimi. Oznacza to, że maksymalizujemy zysk netto. Muszą być przy tym spełnione standardowe warunki zachowania przepływu w węzłach, zapisane ograniczeniami (6.b) i (6.c). Gdyby istniała możliwość zamiany gotówki na akcje (i odwrotnie) przy różnych kosztach transakcji, to między węzłami 1 i 2 oraz węzłami 2 i 3 należy wprowadzić odpowiednio większą liczbę łuków (nie zmieni to sposobu przedstawienia zadania i skali jego trudności). Natomiast modelowanie pożyczek przy różnych stopach procentowych jest bardziej złożone i wprowadzenie dodatkowych łuków zmienia zadanie liniowe na zadanie liniowo-dyskretne.

Rolę współczynników g_j zinterpretujemy na przykładzie inwestycji w obligacje. Rozważmy inwestycję wieloletnią w obligacje o stałym oprocentowaniu, przy założeniu, że sumę odpowiadającą procentowi od inwestycji i wartości obligacji, w końcu każdego roku, reinwestujemy na następny rok (wartość rynkowa obligacji jest zmienna). W tym przypadku wartość przepływu opuszczającego węzeł - początek łuku (poprzedni rok) i wartość przepływu wchodzącego do węzła - koniec łuku (następny rok) są różne i ich stosunek odpowiada odwrotności współczynnika g_j. W następnym punkcie podamy inne zastosowanie sieci uogólnionej.

4.3.1. Przepływ modelujący wypłatę dla posiadacza opcji kupna

Wróćmy do problemu modelowania wypłaty dla posiadacza opcji kupna, rozważanego w punkcie 4.2. Pokażemy jak tę wypłatę można przedstawić w postaci przepływu w sieci uogólnionej (Rysunek 18). Rozważamy posiadacza pojedynczej europejskiej opcji kupna o cenie wykonania E i o cenie instrumentu bazowego w terminie wygasania kontraktu S_T. Symbol I jest liczbą większą od największej pojemności łuku w sieci.



Rys. 18. Modelowanie funkcji wypłaty dla opcji za pomocą sieci uogólnionej

Współczynnik modyfikujący przepływ w łuku (0,1) wynosi g = $(S_T$ - $E)z$, gdzie z jest zmienną binarną o interpretacji danej wzorami ((71), (73) i ograniczenia (74)). Zagwarantowane zatem są relacje:

a) $\{(S_T - E) \geq 0\} \Rightarrow (z = 1)$,

b) $\{(S_T - E) < 0\} \Rightarrow (z = 0)$.

Jeżeli zachodzi relacja b), to mnożnik g dla łuku (0,1) jest równy 0 i inwestycja x_1 odpowiadająca zapłacie za opcję będzie stracona. Jeżeli ma miejsce relacja a), to z = 1 i wartość współczynnika g jest większa od zera. Gdy cena instrumentu bazowego przewyższy cenę wykonania kontraktu o wielkość większą od ceny zakupu opcji, to wypłata staje się dodatnia. Warunek zachowania przepływu w węźle 1 prowadzi do równości:

$$(S_T - E)x_1 z - x_2 = 0, \tag{77}$$

Stosując metodę linearyzacji iloczynu zmiennych $(x_1 z) = y$, opisaną wzorami (75a) - (75c), otrzymamy układ:

$$\begin{aligned} (S_T - E)y - x_2 &= 0, \\ x_1 + z - \ y &\leq 1, \\ x_1 + \mathrm{I}\, z - 2y &\geq 0, \\ y &\leq x_1. \end{aligned} \tag{77a}$$

Interesujące rozważania na temat innych aspektów zastosowania sieci w finansach, w tym także sieci stochastycznych można znaleźć w pracach James (1992) i Mulvey (1984).

4.4. Zmienne binarne w inżynierii finansowej

Inżynieria finansowa jest to nowy kierunek badań i zastosowań w dziedzinie finansów, który polega na kreowaniu instrumentów rynkowych o nowych własnościach z punktu widzenia ryzyka inwestycji. Redystrybucja i kształtowanie parametrów ryzyka pozwala zaoferować produkt rynku finansowego bardziej dopasowany do różnych potrzeb i oczekiwań inwestorów. Podamy charakterystyczny przykład modelowania matematycznego z użyciem zmiennych binarnych w tej interesującej dziedzinie. Przykład dotyczy instrumentów rynku hipotecznych papierów dłużnych, który okazał się jednym z decydujących czynników dynamicznego rozwoju budownictwa mieszkaniowego w USA. Można oczekiwać iż w niedługim czasie rynek ten zacznie rozwijać się również w Polsce.

Hipoteczne papiery dłużne (*mortgages*) tworzą bardzo rozległy i dynamiczny rynek instrumentów pod zastaw nieruchomości. Podstawowy mechanizm funkcjonowania hipotecznych instrumentów dłużnych polega na stwarzaniu możliwości zaciągania pożyczki pod zastaw hipoteczny nieruchomości. Pożyczkodawca ma prawo do roszczeń do nieruchomości w przypadku, gdy pożyczkobiorca nie wypełnia warunków spłaty długu.

Inicjatorami udzielania pożyczek budowlanych (*originators*) są kasy oszczędnościowe, banki komercyjne, banki hipoteczne, instytucje ubezpieczeniowe oraz fundusze powiernicze i emerytalne. Do obsługi pożyczek hipotecznych i do emisji papierów pod zastaw nieruchomości powoływane są specjalne agencje federalne (USA), które mają gwarancje skarbowe. Tym samym inwestor kupujący hipoteczne instrumenty dłużne jest narażony w mniejszym stopniu na ryzyko upadłości wierzyciela, niemniej poziom ryzyka rynkowego tych instrumentów jest wyższy od ryzyka rynkowego np. obligacji skarbowych. Dwa główne segmenty amerykańskiego rynku instrumentów pod zastaw hipoteczny nieruchomości, to rynek nieruchomości mieszkalnych i rynek nieruchomości niemieszkalnych.

Obrót bezpośredni pierwotnymi instrumentami długu hipotecznego nie sprzyja tworzeniu się nowoczesnego rynku o dużej płynności. Proste instrumenty hipoteczne mają wyższy poziom kosztów obsługi i cechuje je znaczny poziom niestabilności strumienia pieniężnego, w porównaniu do papierów skarbowych. Ta niestabilność strumienia wynika m.in. z prawa pożyczkobiorcy do przedterminowych spłat rat długu i do sprzedaży nieruchomości wraz z niespłaconym długiem.

Aby poprawić parametry rynkowe instrumentów, instytucjonalni operatorzy tego rynku, w tym przypadku banki komercyjne, korporacje finansowe, kasy oszczędnościowe, fundusze ubezpieczeniowe i emerytalne, tworzą bloki (pule) grupujące indywidualne zobowiązania dłużne pożyczkobiorców. Emitując różnorodne papiery pod zastaw kapitału puli, nazywane ogólnie *Mortgage Backed Securities* (MBS), operatorzy dokonują zamiany długu na rynkowe papiery wartościowe, kreując tym samym rynek o znacznej płynności.

Do klasy instrumentów MBS należą papiery dłużne CMO (*Collateralized Mortgage Obligations*) - transzowe obligacje długu hipotecznego. Są to instrumenty rynku wtórnego hipotecznych papierów dłużnych o cechach zbliżonych do obligacji. Obligacje CMO, nazywane transzami, tworzą długi hipoteczne o identycznym terminie zapadalności. Obligacje CMO to klasyczny produkt inżynierii finansowej - zaprojektowany z myślą otrzymania instrumentu wychodzącego naprzeciw potrzebom rynku.

Strumień wypłat dla inwestorów jest modelowany (redystrybuowany) w ten sposób, że nabywca obligacji hipotecznej, podobnie jak posiadacz np. obligacji skarbowych, otrzymuje regularne odsetki - kupony, a w terminie zapadalności - ostatni kupon plus wartość nominału obligacji. Zwróćmy uwagę na fakt, że inwestujący w zwykłe zblokowane papiery długu hipotecznego (*pass-through*) otrzymuje co miesiąc ratę złożoną z odsetek plus część spłaty nominału. Instrumenty CMO zadebiutowały na rynku północnoamerykańskim w czerwcu 1983 roku, a w 1995 roku obrót wzrósł do ponad 750 mld dolarów.

Zaprojektowanie transz jest złożonym zadaniem, gdyż odpowiadające im obligacje muszą spełniać ostre wymagania ustawowe - rodzaj „normy projektowania inżynierskiego" - co do wartości wypłat, terminów i niezawodności (normy takie obowiązują np. w USA).

Jednym z warunków - ograniczeń, który musi być zachowany, jest wspomniana sekwencyjność terminów zapadalności - dwie różne obligacje transzowe nie mogą zapadać w tym samym terminie. W rezultacie powstaje złożone zadanie do rozwiązania, polegające m.in. na znalezieniu transz dopuszczalnych, a kolejnym krokiem może być zadanie optymalizacyjne, Zenios (1993).

Wskażemy na jeden aspekt tego zadania modelowania matematycznego - zapisanie ograniczeń wymuszających sekwencyjność projektowanych transz. Do modelowania tego warunku muszą być użyte zmienne binarne.

Wprowadźmy oznaczenia:

i - indeks transzy, $i = 1, ..., n$,

t - indeks przedziałów czasu, $t = 1, ..., T$,

z_{it} - zmienna zero-jedynkowa,

y_{it} - zmienna zero-jedynkowa.

Zmienna z_{it} jest zdefiniowana następująco:

$$z_{it} = \begin{cases} 1, & \text{kiedy transza } i \text{ zapada w terminie } t, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \tag{78}$$

i zgodnie z wymaganiem: „w każdym terminie zapada dokładnie jedna obligacja", musi spełnić warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} z_{it} = 1, \quad \text{dla } t = 1,\ldots,T. \tag{79}$$

Zmiennej y_{it}, będącej elementem macierzy Y_{nxT}, nadajemy następującą interpretację. Niech dla każdego t będzie zdefiniowana wartość początkowa tej zmiennej, dla $i = 0$ przyjmujemy $y_{0t} = 0$. Wprowadźmy równość:

$$y_{it} = y_{i-1t} + z_{it}, \quad \text{dla:} \quad i = 1,\ldots,n, \quad t = 1,\ldots,T. \tag{80}$$

Z równości (79) i (80) wynika, że:

$$\sum_{t=1}^{T} y_{it} \in \{0,1\}, \quad \text{dla każdego } i. \tag{81}$$

Dodajmy nierówność: $y_{it} \geq y_{it-1}$, z której, wraz z warunkiem (81), wynika, że jeżeli dla pewnego $i = i_0$ oraz $t = t_0$, mamy $y_{i_0 t_0} = 1$, to: $y_{it} = 0$ dla wszystkich $t \neq t_0$. Ostatecznie, warunki sekwencyjnej zapadalności obligacji CMO gwarantuje zespół nierówności:

$$\left.\begin{array}{l} y_{it} \geq y_{it+1} \\ y_{it} = y_{i-1t} + z_{it} \\ y_{it} \geq 0 \end{array}\right\} \quad \text{dla wszystkich indeksów } i \text{ oraz } t,$$
$$\text{oraz } \sum_{i} z_{it}, \qquad \text{dla każdego } t \tag{82}$$

Ograniczenia (82) zapewniają, że transza raz zamknięta (zamortyzowana) nie może być użyta w dalszych terminach oraz, że amortyzacja transz następuje w ustalonej dla nich sekwencji terminów zapadalności, a także, że w każdym momencie czasu wybierana jest tylko jedna transza. Na koniec zauważmy, że żądanie binarności dla zmiennej y_{it} można pominąć, z uwagi na (80) i (81), co znalazło wyraz w zapisie $y_{it} \geq 0$ w nierównościach (82).

4.5. Dekompozycja i synteza instrumentów

Dekompozycja i synteza instrumentów to dwie ważne techniki, stosowane dla celów analitycznych i handlowych, znane w teorii i stosowane w praktyce rynków finansowych. Obydwie techniki - zasadniczo różne z uwagi na istotę - wykazują wiele podobieństw formalnych przy stosowaniu modelowania matematycznego z użyciem zmiennych binarnych, Słomiński i Bertocchi (1997).

Przykład dekompozycji strumienia wpływów generowanego przez kuponową obligację skarbową był przedstawiony w punkcie 2.4. Dekompozycja strumienia miała na celu otrzymanie dekomponentów wykorzystanych do obliczania teoretycznej (referencyjnej) funkcji czasowej stóp procentowych.

Papier syntetyczny (*synthetically created security*) to instrument utworzony ze złożenia przynajmniej dwóch instrumentów dostępnych na rynku w celu otrzymania produktu o pożądanym profilu handlowym (cena, charakter i stopień ryzyka, termin zapadalności, stopień płynności itp.), który nie jest dostępny na rynku. W punkcie 1.2 ideę tworzenia instrumentów syntetycznych zilustrowaliśmy przykładem użycia kontraktu FUTURES na obligację skarbową do osłony przyszłego zobowiązania płatniczego, co prowadzi w efekcie do otrzymania bonu skarbowego - instrumentu wolnego od ryzyka.

Potrzebna jest pewna uwaga terminologiczna. W literaturze anglosaskiej poświęconej zagadnieniom syntezy instrumentów spotykamy pojęcia: *synthetically created instruments* i *replicated instruments*. Jako ich polskie odpowiedniki wprowadzamy pojęcia: instrumenty syntetyczne i instrumenty replikatywne. Pojęcie pierwsze odnosi się do statycznych zachowań instrumentów będących kompozycją innych instrumentów - interesuje nas wypłata dla nowego instrumentu w ustalonym momencie czasu, zwykle w terminie zapadalności. Pojęcie drugie odnosi się do dynamicznych zachowań instrumentów komponowanych - interesuje nas funkcja wypłat w całym przedziale czasu ważności instrumentu (pozycji, kontraktu).

Zajmiemy się bardziej szczegółowo przykładami dekompozycji i syntezy instrumentów dłużnych (punkty: 4.5.1 i 4.5.2) a następnie modelowaniem tych operacji z użyciem zmiennych binarnych (punkt 4.5.3).

4.5.1. Dekompozycja

W punkcie 2.4 stosowaliśmy dekompozycję do rozłożenia strumienia pieniężnego z obligacji kuponowej na składowe - dekomponenty, odpowiadające zdyskontowanym wartościom składowych strumienia.

Niech dany będzie strumień pieniężny $\mathbf{S}_T = \{W_t \mid t = 1,2, \ldots ,T\}$, implikowany obligacją kuponową o okresie do zapadalności T. Potraktujemy ten strumień jako zbiór T-wymiarowych wektorów, każdy z których ma postać: $\mathbf{W}_t = W_t \times \mathbf{E}_t$, $t = 1, \ldots ,T$, gdzie $\mathbf{E}_t$ jest wektorem o składowej równej 1 na pozycji t oraz wartości równe 0 dla pozostałych składowych.

Niech

$$P(\mathbf{S}_T) = \sum_{t=1}^{T} P(W_t), \tag{83}$$

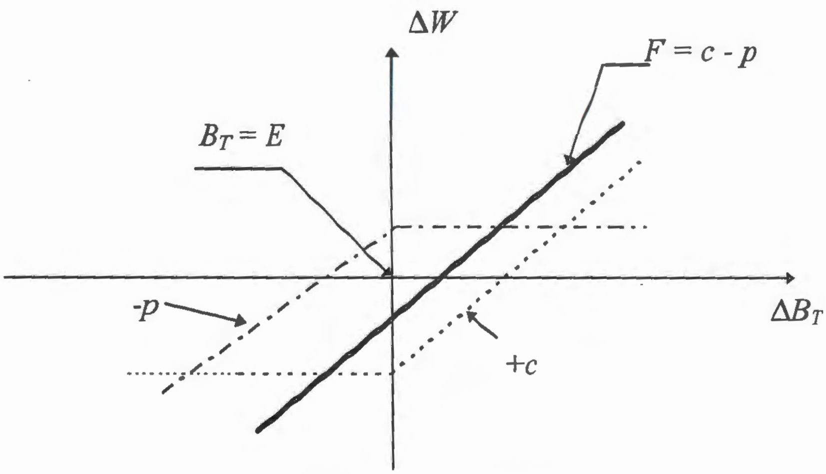
gdzie:

$P(\mathbf{S}_T)$ jest zdyskontowaną wartością obecną strumienia pieniężnego $\mathbf{S}_T = \{W_t \mid t = 1,2,\ldots,T\}$.

Strumień $\mathbf{S}_T$ został zdekomponowany w ten sposób, że każda jego składowa odpowiada obligacji bezkuponowej. Ten zabieg formalny może służyć do konstruowania funkcji czasowej stóp procentowych (punkt 2.4) lub do emisji zdyskontowanych obligacji bezkuponowych typu STRIPS, TIGRs, itp. (punkt 2.1). Można podać wiele innych przykładów dekompozycji papierów, stosowanej na przykład do wyceny instrumentów złożonych, do analizy warunków arbitrażu, itp.

4.5.2. Synteza instrumentów

Popyt na instrumenty syntetyczne pojawia się przy różnych okazjach. Kombinacje inwestycji w instrumenty bazowe z inwestycją w instrumenty pochodne pozwalają na niemal nieograniczone kształtowanie spodziewanej funkcji wypłat i na profilowanie ryzyka w sposób niedostępny przy użyciu wyłącznie instrumentów podstawowych. Często instrument standardowy dostępny w obrocie rynkowym nie odpowiada inwestorowi z takich przyczyn jak np. nieodpowiedni termin zapadalności lub niewystarczająca płynność.



Rys. 19. Synteza pozycji długiej FORWARD dla obligacji

Niedostatek podaży kontraktów FORWARD na japońskim pozagiełdowym rynku opcji na obligacje skarbowe inwestorzy obchodzili kreując pozycję długą na obligacje skarbowe - syntetyczny FORWARD, przez nabycie opcji kupna i jednoczesne wystawienie opcji sprzedaży (opcje mają ten sam termin zapadalności i identyczne ceny wykonania). Krótką pozycję FORWARD można wykreować przez wystawienie opcji kupna i nabycie opcji sprzedaży.

Rysunek 19 jest geometrycznym obrazem wyniku operacji w terminie zapadalności. Rezultat pozycji zależy od relacji ceny obligacji B_T do ceny wykonania E. Na osi rzędnych rysunku odkładana jest zmiana ceny obligacji względem ceny wykonania (odpowiadającej przecięciu osi). Na osi odciętych mamy zmianę wartości ΔW portfela i jego składników, w funkcji ΔB_T.

Dobrym punktem wyjścia dla przedstawienia koncepcji syntetycznych produktów na rynku finansowym jest relacja parytetu dla ceny opcji kupna i ceny opcji sprzedaży. Zależność tę wyraża równość (punkt 1.3.3.):

$$c - p = S_T - P(E) \tag{84}$$

Dla potrzeb dalszych rozważań przedstawimy tę zależność w równoważnej postaci „zdaniowej" zakładając, że opcje kupna i sprzedaży dotyczą identycznego instrumentu bazowego oraz mają jednakowe ceny realizacji i ten sam termin zapadalności:

1) ***Kup opcję kupna za*** c + ***Sprzedaj opcję sprzedaży za*** p =
Kup instrument bazowy za S_T + ***Zaciągnij dług na*** $P(E)$.

Kolejne cztery równości powstają z przekształcenia powyższej zależności i pokazują jak otrzymuje się długie pozycje zastępcze dla każdego z czterech instrumentów bazowych powyższej równości.

2) ***Kup instrument bazowy*** =
Kup opcję kupna + ***Sprzedaj opcję sprzedaży*** + ***Zainwestuj*** $P(E)$,

3) ***Kup opcję kupna*** =
Kup opcję sprzedaży + ***Kup instrument bazowy*** + ***Zaciągnij pożyczkę na*** $P(E)$,

4) ***Kup opcję sprzedaży*** =
Kup opcję kupna + ***Sprzedaj instrument bazowy*** + ***Zainwestuj*** $P(E)$,

5) ***Zaciągnij pożyczkę na*** $P(E)$ =
Kup instrument bazowy + ***Kup opcję sprzedaży*** + ***Sprzedaj opcję kupna***.

W podobny sposób można zaproponować cztery syntetyczne pozycje krótkie wykorzystując cztery instrumenty podstawowe: opcję sprzedaży, opcję kupna, instrument bazowy dla opcji i operację zaciągnięcia lub udzielenia pożyczki na stały (nie podlegający ryzyku) procent.

4.5.3. Zastosowanie zmiennych binarnych

Podamy prosty sposób modelowania matematycznego podstawowego schematu dekompozycji (wzór (83)) i syntezy instrumentów (wzór (84) i jego konsekwencje - relacje 1 ÷ 5). W obu przypadkach mamy tożsamości wyrażone lewą i prawa stroną równości.

Przyporządkujmy lewym stronom zmienną binarną z_0, natomiast każdej i-tej składowej prawej strony zmienną binarną z_i. Z równań wynikają następujące dwie implikacje:

$$\left(z_0 = 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} z_i = n\right),$$

$$(z_0 = 0) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} z_i = 0). \tag{85}$$

Warunki (85) spełnia równość:

$$nz_0 - \sum_{i=1}^{n} z_i = 0, \tag{86}$$

lub równoważne jej dwie nierówności:

$$\begin{aligned} -nz_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i &\geq 0, \\ nz_0 - \sum_{i=1}^{n} z_i &\geq 0. \end{aligned} \tag{87}$$

W pracy Słomińskiego i Bertocchi (1997) przedstawiono różnorodne aspekty modelowania instrumentów syntetycznych z użyciem zmiennych binarnych.

5. Portfele o długim horyzoncie inwestycji - portfele funduszy emerytalnych

Długookresowe portfele celowe, to portfele inwestycyjne takich inwestorów, jak fundusze powiernicze, fundusze ubezpieczeniowe życia, zdrowia i mienia, fundusze emerytalne i plany emerytalne, a także fundusze gwarancyjne dla banków i innych podmiotów rynku finansowego. Instytucje te mają wyraźnie określony ustawowo lub statutowo cel inwestowania. Horyzont inwestowania jest w tych przypadkach bardzo długi, a praktycznie nieograniczony. Przy wszelkich różnorodnościach tych funduszy ich wspólnym wyróżnikiem jest konieczność bilansowania wpływów z inwestowanego kapitału z zobowiązaniami płatniczymi, w których czynnik losowy odgrywa istotną rolę.

Wspomaganie decyzji inwestycyjr

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl