POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

# WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

**Redaktor naukowy:**

**Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum**

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI

Marek LIBURA

Leon SŁOMIŃSKI

# WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH





**ISBN 83-85847-09-X**
**ISSN 0208-8029**

# Część III.
# Metody optymalizacyjne dla potrzeb wspomagania decyzji inwestycyjnych

# Wstęp

W Częściach I i II niniejszej monografii przedstawiono liczne zadania optymalizacyjne występujące we wspomaganiu decyzji inwestycyjnych na rynku finansowym. W tym rozdziale jest omówiona metodologia formułowania i rozwiązywania najczęściej występujących tu klas zadań. Szczególny nacisk położony jest na zagadnienia związane z zadaniami optymalizacji dyskretnej i mieszanej, obszernie wykorzystywanymi w Części II. Z tego względu rozdział niniejszy może być traktowany jako uzupełnienie poprzedniego rozdziału monografii.

# 1. Wprowadzenie w zagadnienia optymalizacyjne

W każdej sytuacji decyzyjnej mamy do czynienia z dwiema przestrzeniami: *przestrzenią decyzji*, którą obędziemy oznaczać przez $\mathscr{D}$, oraz *przestrzenią ocen decyzji*, oznaczaną dalej przez $\mathscr{E}$. Mogą to być dowolne zbiory niepuste, chociaż najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, gdy $\mathscr{D}$ i $\mathscr{E}$ są podzbiorami przestrzeni wektorów rzeczywistych o wymiarowości $n$ i $m$, tzn. $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Sformułowanie problemu optymalizacyjnego wymaga określenia następujących trzech elementów:

1° Podania, które z elementów przestrzeni $\mathscr{D}$ są możliwe do zaakceptowania przez decydenta. Zbiór takich elementów będziemy oznaczać przez $F$ i nazywać *zbiorem decyzji* (lub *zbiorem rozwiązań*) *dopuszczalnych*.

2° Podania sposobu oceny decyzji $f \in F$ poprzez określenie funkcji $c: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Funkcję tę nazywamy *funkcją celu* lub *kryterium jakości.*

3° Podania porządku w przestrzeni ocen decyzji $\mathscr{C}$, odzwierciedlającego preferencje decydenta. Formalnie wymaga to określenia w $\mathscr{C}$ relacji częściowego porządku. Sytuację, w której ocena $c(d')$ decyzji $d' \in \mathscr{D}$ jest uważana przez decydenta za *nie gorszą* niż ocena $c(d'')$ decyzji $d'' \in \mathscr{D}$ będziemy zapisywać następująco: $c(d') \succ c(d'')$.

*Problem optymalizacyjny* polega na znalezieniu takiej decyzji $d^0$, która jest dopuszczalna, tzn. $d^0 \in F$, oraz nie istnieje decyzja $d \in F$, taka że $c(d) \succ c(d^0)$ oraz $c(d) \neq c(d^0)$.

Jest to najczęściej spotykane sformułowanie problemu optymalizacyjnego. Czasem żąda się podania jako rozwiązanie problemu optymalizacyjnego wszystkich decyzji spełniających powyższy warunek.

Zanim przejdziemy do bardziej szczegółowego omówienia podanych wyżej elementów problemu decyzyjnego, rozważmy bardzo prosty przykład, ilustrujący wprowadzone wyżej pojęcia.

**Przykład 1.** Załóżmy, że dysponując zadanym przedziałem kapitału $[P_{\min}, P_{\max}]$ chcemy skonstruować portfel złożony z $n$ rodzajów akcji, scharakteryzowanych następującymi wielkościami: kosztem, ryzykiem i zwrotem na jedną akcję. Jakość portfela oceniamy parą wielkości: ryzykiem portfela i zwrotem z portfela. W tym przypadku przestrzenią decyzji $\mathscr{D}$ jest zbiór $n$-wymiarowych wektorów całkowitoliczbowych, tzn. $\mathscr{D} = \mathbb{Z}^n$. Jeśli umiemy przypisać ryzyku danego portfela liczbę rzeczywistą, to przestrzenią ocen decyzji $\mathscr{C}$ jest w tym przypadku zbiór par liczb rzeczywistych (ryzyko portfela, zwrot z portfela), czyli przestrzeń $\mathbb{R}^2$. Portfel jest wyznaczany przez wektor, którego składowymi są liczby akcji poszczególnych rodzajów. Zbiorem rozwiązań dopuszczalnych $F$ jest podzbiór wektorów z $\mathbb{Z}^n$, odpowiadających portfelom, których koszt należy do przedziału

$[P_{\min}, P_{\max}]$. Typowym porządkiem przyjmowanym w przestrzeni ocen $\mathscr{C} = \mathbb{R}^2$ jest porządek Pareto (patrz Część I). Najtrudniejszym elementem w postawieniu powyższego problemu optymalizacyjnego jest określenie kryterium jakości, tzn. funkcji $c\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^2$, przypisującej portfelowi parę liczb (ryzyko, zwrot). O ile zwrot z portfela może być po prostu liczony jako suma zwrotów z poszczególnych akcji mnożonych przez ich liczbę w portfelu, to określenie ryzyka w podobny sposób jest zwykle zbyt dużym uproszczeniem. Klasycznym rozwiązaniem jest tu konstrukcja funkcji celu $c$ z uwzględnieniem korelacji zwrotów z akcji, prowadząca na przykład do znanego modelu Markowitza (patrz Część I).

□

Rozważmy teraz bardziej szczegółowo sytuacje, jakie mogą zaistnieć przy formułowaniu problemu optymalizacyjnego. W ogólnym przypadku przestrzeń ocen decyzji $\mathscr{C}$ może być dowolnym zbiorem, a relacja $\succ$ dowolną relacją częściowego porządku. Oznacza to, że $\succ$ spełnia następujące warunki:

i. jest *zwrotna*, to znaczy dla każdego $c \in \mathscr{C}$ zachodzi $c \succ c$;
ii. jest *przechodnia*, co oznacza, że dla dowolnych $c^1, c^2, c^3 \in \mathscr{C}$ z faktu, że $c^1 \succ c^2$ oraz $c^2 \succ c^3$ wynika, że $c^1 \succ c^3$;
iii. jest *antysymetryczna*, to znaczy, że dla dowolnych $c^1, c^2 \in \mathscr{C}$ z tego, iż $c^1 \succ c^2$ oraz $c^2 \succ c^1$ wynika, że $c^1 = c^2$.

Jeśli ponadto dla dowolnej pary elementów $c^1, c^2 \in \mathscr{C}$ zachodzi $c^1 \succ c^2$ lub $c^2 \succ c^1$, to wówczas mówimy o relacji *liniowego porządku*, a zbiór $\mathscr{C}$ z relacją $\succ$ nazywamy zbiorem *liniowo uporządkowanym*. Element $p$ zbioru $\mathscr{C}$ nazywamy *elementem maksymalnym*, jeśli nie istnieje różny od niego element $q \in \mathscr{C}$, dla którego $q \succ p$. Element $r \in \mathscr{C}$ nazywamy *elementem największym*, jeśli dla każdego $q \in \mathscr{C}$ mamy $r \succ q$.

Niech $c(F) \subseteq \mathscr{C}$ oznacza zbiór ocen decyzji dopuszczalnych i niech relacja $\succ$ odzwierciedla preferencje decydenta. Mogą zachodzić następujące przypadki:

1° W zbiorze $c(F)$ istnieje element największy. Oznaczmy go przez $c^0$. Jest to najprostszy przypadek problemu optymalizacyjnego. Mamy z nim do czynienia zawsze (choć nie wyłącznie) wtedy, gdy zbiór $c(F)$ jest skończony, a relacja $\succ$ definiuje porządek liniowy w $c(F)$. Zbiór decyzji (rozwiązań) dopuszczalnych, których oceną jest element $c^0$ nosi nazwę zbioru *decyzji (rozwiązań) optymalnych* problemu. Zwykle żąda się znalezienia dowolnego elementu takiego zbioru, chociaż w niektórych sytuacjach potrzebne bywa wyznaczenie wszystkich elementów tego zbioru.

2° W zbiorze $c(F)$ nie istnieje element największy, ale istnieje jeden lub więcej elementów maksymalnych. Oznaczmy zbiór tych elementów symbolem $C^{\max}$. Zbiór elementów dopuszczalnych, których oceny należą do zbioru $C^{\max}$ nosi nazwę zbioru *decyzji (rozwiązań) niezdominowanych.* W zależności od sytuacji żąda się znalezienia jednego elementu lub określonego podzbioru tego zbioru.

3° W zbiorze $c(F)$ nie istnieje element maksymalny. W takim przypadku mówimy, że problem optymalizacyjny nie osiąga rozwiązań na zbiorze $F$.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować głównie przypadkiem 1°. Ponadto przestrzeń ocen $\mathscr{C}$ będzie zwykle przestrzenią liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ ze zwykłą relacją porządku $\geq$ (większy lub równy) w $\mathbb{R}$.

Przypadek 2° prowadzi do tak zwanej optymalizacji wielokryterialnej (patrz np. Nemhauser i in. (1989)). Zwykle wówczas przestrzeń ocen jest przestrzenią $\mathbb{R}^k$ dla $k \geq 2$, z tak zwaną relacją dominacji względem stożka.

Powód, dla którego skoncentrujemy się na przypadku 1°, jest związany z tym, że większość problemów rozpatrywanych w poprzednich rozdziałach dotyczy tej właśnie sytuacji. Ponadto rozwiązanie problemów optymalizacji wielokryterialnej sprowadza się zazwyczaj do rozwiązania pewnej liczby problemów prostszych, objętych przypadkiem 1°.

## 2. Sformułowania i klasyfikacja zadań optymalizacyjnych

Podanie trzech elementów definiujących problem optymalizacyjny, tzn. zbioru $F \subseteq \mathscr{D}$, funkcji $c: \mathscr{D} \rightarrow \mathscr{C}$ oraz relacji $\succ$, jest pierwszym krokiem na drodze do jego rozwiązania. *Zadanie optymalizacyjne* jest formalnym zapisem problemu optymalizacyjnego. W przypadku, gdy przestrzenią ocen jest przestrzeń $\mathbb{R}$, a relacją porządku relacja $\geq$, wówczas zadanie optymalizacyjne, które odpowiada problemowi optymalizacyjnemu określonemu przez trójkę $(F, c, \geq)$ jest zapisywane w postaci

$$\max_{x \in F} c(x). \tag{1}$$

W dalszym ciągu będziemy również stosowali dla zadania (1) zapis $\max\{c(x): x \in F\}$.

W przypadku, gdy relacją porządku jest $\leq$ (mniejszy lub równy), zadanie optymalizacyjne zapisujemy w postaci $\min_{x \in F} c(x)$ lub $\min\{c(x): x \in F\}$.

Jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych $F$ zadania (1) jest pusty, to przyjmuje się, że $\max\{c(x): x \in F\} = -\infty$ i zadanie (1) nazywamy zadaniem *sprzecznym*. Jeśli $F \neq \emptyset$ i w zbiorze $c(F)$ istnieje element największy $c^0$, to wartość $c^0$ nazywamy *wartością optymalną* zadania (1) i wówczas $\max\{c(x): x \in F\} = c^0$. Zbiór $\Omega \subseteq F$, taki że dla $y \in \Omega$, $c(y) = c^0$, nazywamy *zbiorem rozwiązań optymalnych* zadania

**Wspomaganie decyzji inwestycyjn**

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

**ISBN 83-85847-09-X**

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN**
**ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa**
**tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl**