POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

MODELE OPÓŹNIEŃ W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH

Jan Gadomski

Warszawa 2015

MODELE OPÓŹNIEŃ W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH - Jan Gadomski

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
Tom 74

Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2015

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH

Jan Gadomski

MODELE OPÓŹNIEŃ
W SYSTEMACH EKONOMICZNYCH

Warszawa 2015

Autor:

Jan Gadomski,
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
Jan.Gadomski@ibspan.waw.pl

Recenzent:

….
….

Wydawca:

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk
Newelska 6, 01-447 Warszawa
www.ibspan.waw.pl

ISSN 0208-8029
ISBN 83-894-7559-6

DODATEK MATEMATYCZNY

Zbieżność wartości średniej rozkładu opóźnienia

Lemat 1[1] (o nierówności: $M(W_t)\sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti}$)

Założenia. Dany jest rozkład opóźnienia W_t zbudowany na współczynnikach opóźnienia $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,...$, mający skończoną wartość średnią rozkładu opóźnienia $M(W_t)= \sum_{i=0}^{\infty} i w_{ti}$.

Teza Dla każdej wartości indeksu k, $k \geq 0$, $k = 0, 1, 2,...$; zachodzi następująca nierówność:

$$M(W_t)\sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i w_{ti} \,. \tag{D1}$$

Dowód

Przy $k = 0$, nierówność (D1) jest spełniona dla $M(W_t)$ i $w_{t\,0}$ przyjmujących dowolne założone wartości:

$$M(W_t) \geq 0 \text{ oraz } w_{t\,0} \geq 0.$$

Dowiedzenie prawdziwości nierówności (D1) dla $k > 0$ jest przeprowadzone w następujący sposób. Parametr $M(W_t)$ w nierówności (D1) zostaje zastąpiony jego postacią z definicji:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\, w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti} \;,$$

dzięki czemu uzyskana jest nierówność:

$$\left(\sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i\, w_{ti} \right) \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti}$$

lub

[1] Autorem dowodu tego lematu jest prof. Przemysław Grzegorzewski z IBS PAN.

$$\sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i\, w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti} \,,$$

a następnie po przeniesieniu pierwszej sumy z lewej strony na prawą stronę nierówności uzyskujemy:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} i\, w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti} \left(1 - \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \right),$$

i wreszcie:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} i\, w_{ti} \sum_{i=0}^{k} w_{ti} \geq \sum_{i=0}^{k} i\, w_{ti} \sum_{i=k+1}^{\infty} w_{ti} \,, \tag{D2}$$

ponieważ:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} w_{ti} = 1 - \sum_{i=0}^{k} w_{ti} .$$

Nierówność (D2) można zapisać w rozwiniętej postaci[2]:

$$[(k+1)w_{t,k+1} + (k+2)w_{t,k+2} + ...](w_{t1} + w_{t2} + ... + w_{tk}) \geq (w_{t,k+1} + w_{t,k+2} + ...)\,(1w_{t1} + 2w_{t2} + ...kw_{tk}).$$

Powyższą nierówność można przedstawić jako zsumowane stronami nierówności, w których występuje indeks j przyjmujący wartości od 1 do nieskończoności:

$$(k+j)w_{t,k+j}(w_{t1} + w_{t2} + ... + w_{tk}) \geq w_{t,k+j}\,(1w_{t1} + 2w_{t2} + ...kw_{tk})\,, j = 1, 2, ...$$

Po zredukowaniu po obu stronach nierówności dodatniego elementu $w_{t,k+j}$ (w przypadku $w_{t,k+j} = 0$ powyższa nierówność jest spełniona), otrzymujemy nierówności:

$$(k+j)(w_{t1} + w_{t2} + ... + w_{tk}) \geq (1w_{t1} + 2w_{t2} + ...kw_{tk}).\ j = 1, 2, ... \tag{D3}$$

Dla dowolnego $j > 0$, $j = 1, 2, ...$; powyższa nierówność jest spełniona, zatem zsumowanie stronami nierówności (D3) względem indeksu j zachowuje nierówność (D2), a więc i (D1), co było do okazania.

[2] Przecinki w subskryptach zostały użyte w celu jednoznacznej separacji dwóch indeksów.

Własności wynikowego rozkładu opóźnienia.

Zależność między wartościami średnimi rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$, 1.

Lemat 2.

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia W_t i opóźnienia wynikowego U_t oraz wartości średnie rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$.

Teza W stanie ustalonym wartości średniej rozkładu $M(U_t)$ i średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ są równe: $M(W_t) = M(U_t)$.

Dowód sprowadza się do obliczenia średniego wynikowego opóźnienia w stanie ustalonym na podstawie definicji, wzór (1.10):

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i u_{it} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{ti} x^*}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti} x^*} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}} = \sum_{i=0}^{\infty} i w_{ti} = M(W_t).$$

C.b.d.o.

Indeksy znaczące

Definicja 1. Zbiorem indeksów znaczących $J(W_t)$ rozkładu opóźnienia W_t nazywany jest zbiór wszystkich indeksów $i = 0, 1, 2..;$ dla których współczynniki $w_{ti} > 0$.

Komentarz

Zbiór $J(W_t)$ zawiera zawsze element najmniejszy i_d, $i_d \geq 0$ (najmniejsza wartość indeksu), ponieważ z założenia dla wszystkich $i < 0$, $w_{ti} = 0$. W przypadku opóźnienia skończonego w zbiorze $J(W_t)$ istnieje zawsze element największy i_g (największa wartość indeksu niezerowego współczynnika). W przypadku nieskończonego rozkładu opóźnienia, w zbiorze $J(W_t)$ nie istnieje skończony element największy.

Zbiór $J(W_t)$ nie musi zawierać wszystkich indeksów zawierających się pomiędzy wartościami i_d i ∞ (lub pomiędzy wartościami i_d i i_g, w przypadku rozkładu skończonego), ponieważ niektóre indeksy z tego zakresu mogą odpowiadać współczynnikom o zerowych wartościach.

Zbiór $J(W_t)$ składa się tylko z jednego elementu oraz wartości i_d i i_g są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy opóźnienie jest opóźnieniem prostym (zwłoką). W pozostałych przypadkach $i_d \neq i_g$.

Rozpiętość zbioru indeksów

Definicja 2. Rozpiętością $R(V_t)$ struktury opóźnienia lub rozpiętością zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ struktury opóźnienia V_t nazywana jest wartość wyrażenia

$$R(V_t)=i_g(V_t)- i_d(V_t)+1.$$

Komentarz

Rozpiętość zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ nie jest tym samym co liczebność tego zbioru; równość tych wielkości zachodzi, jeśli dla wszystkich i, $i_d(V_t)\leq i \leq i_g(V_t)$, $v_{t\,i} \neq 0$ (wszystkie współczynniki o indeksach należących do przedziału $[i_d(V_t)\ ,i_g(V_t)]$ mają niezerowe wartości). Szczególnym przypadkiem modelu, w którym rozpiętość i liczebność są sobie równe jest opóźnienie proste, tzn. gdy $i_d(V_t)=i_g(V_t)$. Zatem liczebność zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ jest zawsze nie większa od rozpiętości zbioru jego indeksów.

Opóźnienie a wzrost

Lemat 3. O istnieniu liczby h_t.

Założenia Dana jest skończona dodatnia suma a_t współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$:

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}$$

oraz istnieje dodatnia wartość średnia rozkładu $M(W_t)$ rozkładu W_t, $M(W_t)>0,$ utworzonego przez znormalizowanie współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$:

$$w_{t\,i} = v_{t\,i} / a_t,\ i = 0, 1, 2,.. .$$

Teza Jeżeli każdy współczynnik $v_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; zostanie przemnożony przez wyrażenie $(1+ r)^{-i}$, $r \geq 0$, $i=0, 1, 2,..$; dzięki czemu utworzony zostanie nowy zbiór współczynników:

$$v'_{t\,i} = v_{t\,i}(1+ r)^{-i},\ i = 0, 1, 2,..;$$

to spełnione są dwa warunki:

1. sumę

$$\sum_{i=0}^{\infty} v'_{ti} = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} v_{ti}\ ,$$

można przedstawić w następującej postaci:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v'_{ti} = a_t (1+r)^{-h_t} \tag{D4}$$

2. liczba h_t występująca w wykładniku po prawej stronie zależności (D4) jest dodatnią liczbą rzeczywistą przyjmującą wartości z przedziałów odpowiednio:

   $i_d(V_t) \leq h_t \leq i_g(V_t)$, w przypadku opóźnienia skończonego (D5a)

   lub

   $i_d(V_t) < h_t < \infty$, w przypadku opóźnienia nieskończonego, (D5b)

   gdzie $i_d(V_t)$ oraz $i_g(V_t)$ oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość indeksów należących do zbioru indeksów znaczących $J(W_t)$.

<u>Dowód</u>

Dowiedzenie warunku 1 sprowadza się do pokazania, że przy $r \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} v'_{ti} = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} v_{ti} \leq (1+r)^{-1} a_t \leq a_t .$$

Ponieważ lewa strona powyższej nierówności jest z założenia dodatnia, to zawsze można znaleźć taką dodatnią liczbę h_t, która pozwala na przedstawienie liczby niewiększej od a_t jako:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} v_{ti} = a_t (1+r)^{-h_t} \leq a_t ,$$

z czego wynika, że:

$$(1+r)^{-h_t} \leq 1,$$

a po zlogarytmowaniu powyższej nierówności:

$$h_t \geq 0.$$

O h_t wiadomo, że równość $h_t = 0$ zachodzi wyłącznie w dwóch przypadkach: gdy model opóźnienia jest opóźnieniem prostym o średniej rozkładu opóźnienia równej zero[3], a więc nie objętym założeniami tego twierdzenia, lub gdy $r = 0$ (w

[3] Przy $h_t = 0$ byłby to przypadek modelu bez opóźnienia.

tym przypadku h_t może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą, w tym zero). Celowe zatem jest badanie warunku $h_t \geq 1$.

W przypadku skończonego zbioru znaczących indeksów $J(V_t)$ sumę $\sum_{i=0}^{\infty} v'_{ti}$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v'_{t\,i} = \sum_{i=i_d}^{i=i_g} v'_{t\,i} = a_t \sum_{i=i_d}^{i=i_g} w_{ti}(1+r)^{-i} = a\left[w_{t,i_d}(1+r)^{-i_d} + w_{t,i_d+1}(1+r)^{-i_d-1} + .. + w_{t,i_g}(1+r)^{-i_g}\right] \quad \text{(D6)}$$

Wartość wyrażenia (D6) jest wyznaczona przez iloczyn współczynnika a_t i średniej ważonej (za pomocą wag w_{ti}, $i=i_d(V_t)$, $i_d(V_t)+1,...,$ $i_g(V_t)$) monotonicznie malejących wyrażeń: $(1+r)^{-i_d},...,(1+r)^{-i_g}$. Jeżeli zbiór znaczących indeksów $J(V_t)$ zawiera jeden element, tzn. gdy badany model jest opóźnieniem prostym, to:

$$i_d(V_t) = h_t = i_g,$$

ponieważ jedyny niezerowy współczynnik opóźnienia $v'_{h_t} = v_{h_t}(1+r)^{-h_t}$.

Jeżeli zbiór znaczących indeksów $J(V_t)$ zawiera więcej niż jeden element, tzn. gdy badany model jest opóźnieniem rozłożonym, wartość średnia tych wyrażeń, $(1+r)^{-h_t}$, spełnia nierówność:

$$(1+r)^{-i_d} > (1+r)^{-h_t} > (1+r)^{-i_g},$$

lub

$$i_d(V_t) < v_{h_t} < i_g(V_t).$$

Gdy $i_d(V_t) \to \infty$, tj. w przypadku modelu nieskończonego, powyższa nierówność sprowadza się do postaci;

$$i_d(V_t) < h_t < \infty,$$

która jest zgodna z założeniem. Co było do okazania.

Komentarz

Z równości:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1+r)^{-i}v_{ti}=a_t(1+r)^{-h_t}$$

wynika, że:

$$h_t = \frac{\ln\left(\sum_{i=0}^{\infty}v_{ti}\right)-\ln\left(\sum_{i=0}^{\infty}v_{ti}(1+r)^{-i}\right)}{\ln(1+r)} = \ln\left(\frac{\sum_{i=0}^{\infty}v_{ti}}{\sum_{i=0}^{\infty}v_{ti}(1+r)^{-i}}\right)/\ln(1+r).$$

Własności wynikowego rozkładu opóźnienia 2.

Zależność między wartościami średnimi rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ i rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$.

Twierdzenie 1. O odchyleniu wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ od wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ przy stałej nieujemnej stopie wzrostu r, $r \geq 0$.

Założenia

Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}\, x_{t-i} = a_t \sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i}\, x_{t-i} \quad ,$$

w którym:

1. suma $a_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}$ ma skończoną wartość
2. współczynniki $w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$; utworzone ze współczynników $v_{t\,i}$, ($i = 0, 1, 2,..$) w wyniku normalizacji, tworzą rozkład opóźnienia W_t o skończonej dodatniej wartości średniej $M(W_t)$, $M(W_t)> 0$,
3. zmienna niezależna x w całej historii, tzn. od $-\infty$ do okresu t wzrasta ze stałą stopą wzrostu r, $r \geq 0$, a ponadto $x_{t-1}= x_t (1 + r)^{-1}$, $x_{t-2}= x_t (1 + r)^{-2},...;$
4. zbiór znaczących indeksów $J(V_t)$ zawiera przynajmniej dwa niezerowe elementy.

Teza Przy $r \geq 0$ wartość średnia opóźnienia łącznego $M(U_t)$ jest nie większa od średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$:

$$M(U_t) \le M(W_t).$$

Dowód

Na podstawie wzoru (1.8) udziały $u_{t\,i}$ określane są za pomocą następującego wzoru:

$$u_{t\,i} = \frac{v_{t\,i}\, x_{t-i}}{E(y_t)} = \frac{v_{t\,i}\, x_t (1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j}\, x_t (1+r)^{-j}} = \frac{v_{t\,i} (1+r)^{-i}}{\sum_{j=0}^{\infty} v_{t\,j} (1+r)^{-j}}, i = 0, 1, 2,...$$

Korzystając z Lematu 1 mianownik w powyższym wzorze można zastąpić przez wyrażenie $a_t(1+r)^{-h_t}$, dzięki czemu wzór ten można przedstawić w następującej postaci:

$$u_{t\,i} = w_{t\,i} (1+r)^{h_t - i}, i = 0, 1, 2,... \tag{D7}$$

mając na uwadze, że $w_{t\,i} = v_{t\,i}/a_t$.

Na podstawie wzoru (1.10) oraz na podstawie Lematu 1 wartość średnią wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ można przedstawić w następującej postaci:

$$M(U_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i w_{it} (1+r)^{h_t - 1}. \tag{D8}$$

Teza zostanie udowodniona, jeśli wykazana zostanie prawdziwość relacji:

$$M(U_t) - M(W_t) \le 0. \tag{D9}$$

Dla uproszczenia wywodu definiowane są różnice $\Delta w_{t\,i}$, $i = 0, 1, 2,..$:

$$\Delta w_{t\,i}, = u_{t\,i} - w_{t\,i},$$

o których wiadomo, na podstawie wzoru (D7), że:

$\Delta w_{t\,i}, \ge 0$, dla $i \le b_t$, $\Delta w_{t\,i}, \le 0$, dla $i > b_t$,

a ponadto $$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta w_{t\,i} = 0,$$

ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} w_{t\,i} = 1$ oraz $\sum_{i=0}^{\infty} u_{t\,i} = 1$.

Lewą stronę nierówności (D9) można przedstawić w następującej postaci:

$$M(U_t) - M(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, u_{t\,i} - \sum_{i=0}^{\infty} i\, w_{t\,i} = \sum_{i=0}^{\infty} i\, \Delta w_{t\,i} = \sum_{i \le b_t} i\, \Delta w_{t\,i} + \sum_{i > b_t} i\, \Delta w_{t\,i}\ .$$

Ponieważ współczynnik b_t może być liczbą niecałkowitą, wygodniej jest określić pewną naturalną liczbę l, $l = \max\{\, i\, ,\ i \le b_t\, \}$, co pozwala na przedstawienie powyższej zależności w postaci:

$$M(U_t) - M(W_t) = \sum_{i=0}^{l} i\, \Delta\, w_{t\,i} + \sum_{i=l+1}^{\infty} i\, \Delta\, w_{t\,i}\ . \tag{D10}$$

Rozwinięcie prawej strony (D10) ma postać:

$$M(U_t) - M(W_t) = \sum_{i=0}^{l} i\, \Delta\, w_{t\,i} + (l+1)\, \Delta w_{t,\, l+1} + (l+2)\, \Delta\, w_{t,\, l+2} + (l+3)\, \Delta\, w_{t,,\, l+1} + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{l} i\, \Delta w_{t\,i} + (\, l\, \Delta\, w_{t,\, l+1} + l\, \Delta\, w_{t,\, l+2} + l\, \Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots) + (\, 1\Delta\, w_{t,\, l+1} + 2\Delta\, w_{t,\, l+2} +$$

$$3\Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots).$$

Po prawej stronie powyższego równania dodatnie jest tylko pierwsze wyrażenie (zawierające operator sumowania) ponieważ dla $i \le l$ wszystkie $\Delta w_{t\,i} \ge 0$. Z uwagi na to, że:

$$\sum_{i=0}^{l} i\, \Delta\, w_{ti} \le l \sum_{i=0}^{l} \Delta\, w_{ti}\ ,$$

różnica $M(U_t) - M(W_t)$ jest nie większa od wyrażenia:

$$M(U_t) - M(W_t) \le (\, l\Delta w_{t,\, 1} + l\Delta\, w_{t,\, 2} + \ldots + l\Delta\, w_{t,\, l}\,) + (\, l\Delta\, w_{t,\, l+1} + l\Delta\, w_{t,\, l+2} + l\Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots) +$$

$$+ (\, 1\Delta\, w_{t,\, l+1} + 2\Delta\, w_{t,\, l+2} + 3\Delta\, w_{t,\, l+3} + \ldots) = l \sum_{i=0}^{\infty} \Delta\, w_{t,i} + \sum_{i=l}^{\infty} i\Delta\, w_{t,l+i}\, .$$

Ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} \Delta\, w_{t,i} = 0$, oraz dlatego, że dla $i > l$ wszystkie $\Delta w_{t\,i} \le 0,$

$$M(U_t) - M(W_t) \le \sum_{i=1}^{\infty} i\, \Delta\, w_{t,l+i} \le 0\ , \tag{D11}$$

z czego wynika, że:

$$M(U_t) \leq M(W_t)$$

C.b.d.o.

Komentarz

Ponieważ z nierówności $\sum_{i=1}^{\infty} i\Delta\, w_{t,l+i} < 0$ wynika, że mamy do czynienia z nierównością ostrą, w zależności (D11) nierówność nieostra występuje tylko w przypadku opóźnienia prostego lub gdy $r = 0$.

Zależność wartości średniej wynikowego rozkładu opóźnienia *M(U$_t$)* od stopy wzrostu

Twierdzenie 2. O zależności średniej rozkładu wynikowego opóźnienia M(Ut) od stopy wzrostu *r* zmiennej niezależnej.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, którego rozkład wynikowy opóźnienia ma określone wartość średnią i wariancję oraz w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu *r*.

Teza Wartość średnia rozkładu wynikowego opóźnienia $M(U_t)$ jest malejącą funkcją stopy wzrostu *r* zmiennej niezależnej.

Dowód

Dowiedzenie tego twierdzenia opiera się na badaniu pochodnej:

$$\frac{dM(U_t)}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\,\mathrm{i}}\, x_t (1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\,\mathrm{i}}\, x_t (1+r)^{-i}}\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\,\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\,\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i}}\right]. \tag{D12}$$

Mając na uwadze, że współczynniki rozkładu opóźnienia W_t nie zależą od stopy wzrostu *r* zmiennej niezależnej, przez różniczkowanie można uzyskać zależność:

$$\frac{dM(U_t)}{dr} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} -\mathrm{i}^2 \mathrm{v}_{t\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i} \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{v}_{t\,\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{i}\,\mathrm{v}_{t\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i} \sum_{i=1}^{\infty} (-\mathrm{i}) \mathrm{v}_{t\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i} \frac{1}{1+r}}{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{v}_{t\mathrm{i}}\, (1+r)^{-i}\right]^2}$$

$$=\frac{1}{1+r}\ \frac{\left[\sum_{i=1}^{\infty} i\, v_{ti}\,(1+r)^{-i}\right]^2-\sum_{i=1}^{\infty} v_{ti}\,(1+r)^{-i}\sum_{i=1}^{\infty} i^2 v_{ti}\,(1+r)^{-i}\ -}{\left[\sum_{i=1}^{\infty} i\, v_{ti}\,(1+r)^{-i}\right]^2}=\frac{1}{1+r}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} i\, u_{ti}\right)^2-\sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_{ti}\right]$$

Ponieważ:

$$D^2(U_t)=\sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_{ti}\ -M^2(U_t)$$

oraz

$$m(U_t)=\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i\, v_{ti}\,(1+r)^{-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} v_{ti}\,(1+r)^{-i}}\ ,$$

zatem

$$.\ \frac{dm(U_t)}{dr}=-\frac{D^2(U_t)}{1+r}\quad . \tag{D13},$$

Z zależności (D13) wynika, że wartość średniej wynikowego rozkładu opóźnienia $M(U_t)$ maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu r.

C.b.d.o.

Rozkład graniczny a stopa wzrostu

Twierdzenie 3. O zbieżności rozkładu opóźnienia wynikowego do rozkładu jednopunktowego, gdy stopa wzrostu *r* zmiennej niezależnej rośnie do nieskończoności.

Założenia Rozważany jest model opóźnienia rozłożonego, o określonych podstawowych parametrach rozkładu opóźnienia, w którym wartości zmiennej niezależnej wzrastają ze stałą stopą wzrostu *r*.

Teza Gdy stopa wzrostu *r* zmiennej niezależnej *x* rośnie do nieskończoności, rozkład opóźnienia wynikowego dąży do rozkładu jednopunktowego (opóźnienia prostego) o wartości średniej rozkładu opóźnienia wynikowego równej najmniejszej wartości indeksu znaczącego i_d, a wariancja rozkładu opóźnienia wynikowego dąży do zera.

Dowód

Rozważany jest model opóźnienia:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} x_{t-i} = v_{t,i_d} x_{t-i_d} + v_{t,i_d+1} x_{t-i_d+1} + \ldots,$$

który można przedstawić w następującej postaci:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i} x_{t-i} = \sum_{i=i_d}^{\infty} v_{t\,i} x_{t-i_d} (1+r)^{-(i-i_d)} = x_{t-i_d} \sum_{i=i_d}^{\infty} v_{t\,i} (1+r)^{-(i-i_d)},$$

ponieważ:

$$x_{t-i} = x_{t-i_d} (1+r)^{-(i-i_d)},\ i = i_d, i_d+1, i_d+2, \ldots .$$

Wartość zmiennej zależnej spełnia nierówność:

$$v_{t\,i_d} x_{t-i_d} \le y_t = x_{t-i_d} \sum_{i=i_d}^{\infty} v_{t\,i} (1+r)^{-(i-i_d)} = x_{t-i_d} v_{t i_d} + x_{t-i_d} \sum_{i=i_d+1}^{\infty} v_{t\,i} (1+r)^{-(i-i_d)} .$$

Z uwagi na to, że wszystkie wartości współczynników opóźnienia $v_{t\,i}$, $0 \le v_{t\,i} \le 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;:

$$v_{t i_d} x_{t-i_d} + x_{t-i_d} \sum_{i=i_d+1}^{\infty} v_{t\,i} (1+r)^{-(i-i_d)} \le x_{t-i_d} v_{t i_d} + x_{t-i_d} \sum_{i=1}^{\infty} (1+r)^{-i},$$

i ostatecznie:

$$v_{t\,i_d} x_{t-i_d} \le y_t \le x_{t-i_d} \left(v_{t\,i_d} + \frac{1}{r} \right), \tag{D14}$$

ponieważ:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1+r)^{-i} = \frac{1}{r}.$$

Przechodząc do granicy przy r dążącym do nieskończoności, prawa strona nierówności (D14) dąży do opóźnienia prostego:

$$v_{t\,i_d} x_{t-i_d}$$

o wartości średniej rozkładu wynikowego opóźnienia równym parametrowi i_d i zerowej wariancji.

C.b.d.o.

Twierdzenie 4. O zależności wartości średniej $M(W_t)$ rozkładu modelu opóźnienia W_t w okresie t, (model dostosowania adaptacyjnego ze zmiennym współczynnikiem dostosowania λ_t), wzór (1.77), od wartości średniej $M(W_{t-1})$ rozkładu opóźnienia W_{t-1} w okresie $t\text{-}1$.

Założenia Niech wartości współczynników dostosowania λ_{t-i}, $i=0, 1, 2, \ldots$; należą do przedziału $[0, 1]$.

Teza Wartość średniej $M(W_t)$ rozkładu modelu opóźnienia W_t w okresie t zależy od wartości średniej $M(W_{t-1})$ rozkładu modelu opóźnienia W_{t-1} w okresie $t\text{-}1$ zgodnie z następującym wzorem:

$$M(W_t)=(1-\lambda_t)\frac{a_{t-1}}{\lambda_t+(1-\lambda_t)a_{t-1}}\left[M(W_{t-1})+1\right].$$

Dowód

Punktem wyjścia niniejszego dowodu jest przekształcenie wzoru (1.75) do postaci:

$$\begin{aligned} a_t M(W_t) &= 1\cdot\lambda_{t-1}(1-\lambda_t)+2\cdot\lambda_{t-2}(1-\lambda_t)(1-\lambda_{t-1})+3\cdot\lambda_{t-3}(1-\lambda_t)(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2})+\ldots \\ &= \lambda_{t-1}(1-\lambda_t)+(1-\lambda_t)\left[\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1})+\lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2})+\ldots\right]+ \\ &+(1-\lambda_t)\left[1\cdot\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1})+2\cdot\lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2})+\ldots\right], \end{aligned}$$

Pierwszy nawias kwadratowy od strony lewej w powyższym równaniu jest równy:

$$\left[\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1})+\lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2})+\ldots\right]=a_{t-1}-\lambda_{t-1},$$

podczas gdy drugi od lewej nawias kwadratowy jest równy:

$$\left[1\cdot\lambda_{t-2}(1-\lambda_{t-1})+2\cdot\lambda_{t-3}(1-\lambda_{t-1})(1-\lambda_{t-2})+\ldots\right]=M(W_{t-1}).$$

Po podstawieniu i uporządkowaniu uzyskiwana jest badana zależność.

Twierdzenie 5. O zależności wartości średniej $M(W_t)$ modelu opóźnienia rozłożonego z rozkładem opóźnienia W_t, $W_t = W_t^{(1)}+W_t^{(2)}+\ldots+W_t^{(n)}$, otrzymanego przez sumowanie skończonej liczby n modeli opóźnienia rozłożonego o skończonych wartościach średnich składowych rozkładów opóźnienia $M(W_t^{(1)}), M(W_t^{(2)}),\ldots,M(W_t^{(n)})$.

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)}, W_t^{(2)},\ldots,W_t^{(n)}$ modeli będących składnikami sumy o skończonych wartościach średnich rozkładów opóźnienia $M(W_t^{(1)}), M(W_t^{(2)}),\ldots,M(W_t^{(n)})$.

Teza Wartość średnia $M(W_t^{[n]})$ rozkładu $W_t^{[n]}$ powstałego z superpozycji n modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wartości średnich $M(W_t^{(i)})$, $i = 1, 2, .., n$; rozkładów opóźnienia modeli będących elementami superpozycji:

$$M(W_t^{[n]}) = M(W_t^{(1)}) + M(W_t^{(2)}) + \ldots + M(W_t^{(n)}).$$

Dowód zależności powyższej zależności jest oparty na wzorze opisującym funkcję pochodną iloczynu n funkcji, który po prostych przekształceniach prowadzi do potwierdzenia tezy:

$$\frac{dW_t^{[n]}(1)}{d\theta} = \frac{d\left[W_t^{(1)}(\theta)\cdot\ldots\cdot W_t^{(n)}(\theta)\right]}{d\theta}_{|\theta=1}$$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{n} W_t^{(i)}(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]\right\}_{|\theta=1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(1)}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} M(W_t^{(i)}) = M(W_t).$$

Twierdzenie 6. O zależności wariancji $D^2(W_t)$ modelu opóźnienia rozłożonego z rozkładem opóźnienia W_t, $W_t = W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + \ldots + W_t^{(n)}$, otrzymanego przez sumowanie skończonej liczby n modeli opóźnienia rozłożonego o skończonych wartościach wariancji składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(1)}), D^2(W_t^{(2)}), \ldots, D^2(W_t^{(n)})$.

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \ldots, W_t^{(n)}$ modeli będących składnikami sumy o skończonych wariancjach składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(1)}), D^2(W_t^{(2)}), \ldots, D^2(W_t^{(n)})$.

Teza Między wariancją $D^2(W_t)$ rozkładu W_t, będącego wynikiem sumowania n modeli opóźnienia rozłożonego, a średnią ważoną wariancji składowych rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(j)})$, $j = 1, 2, ..$; zachodzi następująca relacja:

$$D^2(W_t) \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} D^2(W_t^{(j)}). \tag{2.8}$$

W przeprowadzeniu dowodu wykorzystane będą następujące zależności:

$$D^2(W_t) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 w_{ti} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} i w_{ti}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} w_{ti}^{(j)} - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)})\right)^2,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \sum_{j=0}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} w_{ti}^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} \sum_{i=0}^{\infty} i^2 w_{ti}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} \left[D^2(W_t^{(j)}) + M^2(W_t^{(j)}) \right],$$

oraz

$$D^2(W_t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} \left[D^2(W_t^{(j)}) + M^2(W_t^{(j)}) \right] - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right)^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} D^2(W_t^{(j)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right)^2.$$

Dowód prawdziwości powyższej nierówności polega na pokazaniu, że różnica między ostatnimi dwoma składnikami powyższej zależności jest nieujemna, lub równoważnie:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) \geq \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right]^2.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że dla dowolnych skończonych ciągów liczb rzeczywistych a_j i b_j, $j=1,\ldots,n;$ prawdziwa jest relacja[4]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \geq \left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j \right)^2.$$

Przyjmując oznaczenia:

$c_j = \sqrt{\frac{a_t^{(j)}}{a_t}} M(W_t^{(j)})$ i $b_j = \sqrt{\frac{a_t^{(j)}}{a_t}}$; $j= 1, 2,.., n$; oraz podstawiając do powyższej nierówności uzyskujemy:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M^2(W_t^{(j)}) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} \geq \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} M(W_t^{(j)}) \right]^2.$$

Ponieważ z założenia

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{(j)}}{a_t} = 1$$

[4] Bronsztajn I. N., Siemiendiajew, K. A., Musiol G., Mühlig H.: *Nowoczesne kompendium matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004, strona 34.

zatem

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t}M^2(W_t^{(j)})\ge\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t}M(W_t^{(j)})\right]^2,$$

Z czego bezpośrednio wynika zależność:

$$D^2(W_t)\ge\sum_{j=1}^{n}\frac{a_t^{(j)}}{a_t}D^2(W_t^{(j)})$$

C.b.d.o.

Twierdzenie 7. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu opóźnienia powstałego z sumy dwóch modeli opóźnienia.

Założenia Dwa modele opóźnienia mają rozkłady opóźnienia odpowiednio $W_t^{(1)}$ i $W_t^{(2)}$, oraz skończone wariancje $D^2\left(W_t^{(1)}\right)$ i $D^2\left(W_t^{(2)}\right)$.

Teza Między wariancją rozkładu opóźnienia $D^2\left(W_t\right)$ modelu opóźnienia powstałego z sumy dwóch modeli opóźnienia z rozkładami opóźnienia równymi odpowiednio $D^2\left(W_t^{(1)}\right)$ i $D^2\left(W_t^{(2)}\right)$ zachodzi następujący związek:

$$D^2(W_t)=D^2\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}\right)$$
$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2(W_t^{(2)})+\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}\left[M(W_t^{(1)})-M(W_t^{(2)})\right]^2.$$

Dowiedzenie prawdziwości powyższej zależności opiera się na wykorzystaniu wzorów z Części I, Rozdziału 1.9 o numerach od (1.59) do (1.62).

$$D^2\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}\right)=$$
$$=\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}(1)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}(1)\right]+\frac{d}{d\theta}\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}(1)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}(1)\right]-$$
$$-\left\{\frac{d}{d\theta}\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}W_t^{(1)}(1)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}W_t^{(2)}(1)\right]\right\}^2.$$

Po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu (1.62) otrzymujemy wzór:

$$D^2\left(W_t\right)=$$
$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(1)}(1)}{d\theta^2}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(2)}(1)}{d\theta^2}+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})-$$
$$-\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})\right]^2.$$

Dodając i odejmując od powyższego równania wyrażenie:

$$\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})$$

oraz porządkując wyrazy uzyskujemy:

$$D^2\left(W_t\right)=$$
$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(1)}(1)}{d\theta^2}+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)})-\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+$$
$$+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\frac{d^2W_t^{(2)}(1)}{d\theta^2}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})-\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})+$$
$$-\left[\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M(W_t^{(2)})\right]^2+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})$$
$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(1)}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(2)}\right)+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})+$$
$$-\left(\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\right)^2M^2(W_t^{(1)})-\left(\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\right)^2M^2(W_t^{(2)})-2\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M(W_t^{(1)})M(W_t^{(2)})$$
$$=\frac{a_t^{(1)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(1)}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}D^2\left(W_t^{(2)}\right)+$$
$$+\frac{a_t^{(1)}}{a_t}M^2(W_t^{(1)})\left(1-\frac{a_t^{(1)}}{a_t}\right)+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}M^2(W_t^{(2)})\left(1-\frac{a_t^{(2)}}{a_t}\right)-2\frac{a_t^{(1)}a_t^{(2)}}{a_t^2}M(W_t^{(1)})M(W_t^{(2)}).$$

Ponieważ:

$$\frac{a_t^{(1)}}{a_t}+\frac{a_t^{(2)}}{a_t}=1,$$

zatem:

$$D^2(W_t) =$$

$$= \frac{a_t^{(1)}}{a_t} D^2\left(W_t^{(1)}\right) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t} D^2\left(W_t^{(2)}\right) +$$

$$+ \frac{a_t^{(1)} a_t^{(2)}}{a_t^2} M^2(W_t^{(1)}) + \frac{a_t^{(1)} a_t^{(2)}}{a_t^2} M^2(W_t^{(2)}) - 2\frac{a_t^{(1)} a_t^{(2)}}{a_t^2} M(W_t^{(1)}) M(W_t^{(2)}),$$

$$D^2(W_t) = \frac{a_t^{(1)}}{a_t} D^2\left(W_t^{(1)}\right) + \frac{a_t^{(2)}}{a_t} D^2\left(W_t^{(2)}\right) + \frac{a_t^{(1)} a_t^{(2)}}{a_t^2}\left[M(W_t^{(1)}) - M(W_t^{(2)})\right]^2.$$

c.b.d.o

Wartość średnia rozkładu opóźnienia powstałego z superpozycji modeli opóźnienia

$$M(W_t^{[n]}) = M(W_t^{(1)}) + M(W_t^{(2)}) + \ldots + M(W_t^{(n)})$$

Wyprowadzenie powyższej zależności wykorzystuje wzór (1.61) oraz formułę na pochodną iloczynu:

$$\frac{dW_t^{[n]}(1)}{d\theta} = \frac{d\left[W_t^{(1)}(\theta)\cdot\ldots\cdot W_t^{(n)}(\theta)\right]}{d\theta}_{|\theta=1}$$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{n} W_t^{(i)}(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]\right\}_{|\theta=1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(1)}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} M(W_t^{(i)}) = M(W_t).$$

Twierdzenie 8. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu opóźnienia powstałego z superpozycji *n* modeli opóźnienia.

Założenia Istnieją rozkłady opóźnienia $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \ldots, W_t^{(n)}$ modeli opóźnienia będących elementami superpozycji mającymi skończone wariancje rozkładów opóźnienia $D^2(W_t^{(1)}), D^2(W_t^{(2)}), \ldots, D^2(W_t^{(n)})$.

Teza Wariancja $D^2(W_t^{[n]})$ rozkładu powstałego z superpozycji *n* modeli opóźnienia rozłożonego jest sumą wariancji $D^2(W_t^{(i)})$, *i = 1, 2, .. , n*; modeli będących elementami superpozycji:

$$D^2(W_t^{[n]}) = D^2(W_t^{(1)}) + D^2(W_t^{(2)}) + \ldots + D^2(W_t^{(n)}).$$

Dowód powyższej zależności jest oparty na wzorze (1.61) z wykorzystaniem formuły na pochodną iloczynu zmiennych oraz wzoru na drugą pochodną iloczynu zmiennych:

$$\frac{d^2W_t^{[n]}(\theta)}{d\theta^2} = \frac{d^2\left[W_t^{(1)}(\theta)\cdot\ldots\cdot W_t^{(n)}(\theta)\right]}{d\theta^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} W_t^{(i)}(\theta)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2W_t^{(i)}(\theta)}{d\theta^2}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)} + \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]^2 - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dW_t^{(i)}(\theta)}{d\theta}\frac{1}{W_t^{(i)}(\theta)}\right]^2\right\}$$

$$\frac{d^2W_t^{[n]}(1)}{d\theta^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2W_t^{(i)}(1)}{d\theta^2} + \left[\sum_{i=1}^{n} M\left(W_t^{(i)}\right)\right]^2 - \sum_{i=1}^{n} M^2\left(W_t^{(i)}\right).$$

Uwzględnienie tych zależności prowadzi do posta-

$$D^2(W_t^{[n]}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2W_t^{(i)}(1)}{d\theta^2} + \sum_{i=1}^{n} M\left(W_t^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^{n} M^2\left(W_t^{(i)}\right)$$

–

ci:

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d^2W_t^{(i)}(1)}{d\theta^2} + M\left(W_t^{(i)}\right) - M^2\left(W_t^{(i)}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} D^2(W_t^{(i)}),$$

C.b.d.o.

Składnik losowy w modelu będącym sumą modeli opóźnienia rozłożonego

Z sumą modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna y_t jest sumą n zmiennych zależnych $y_t^{(j)}$, $j = 1, 2, .., n;$ względem tej samej zmiennej niezależnej x_t (wzór 2.17):

$$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + \ldots + y_t^{(n)}; \quad n < \infty \tag{D15}$$

przy czym

$$y_t^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}^{(1)} x_{t-i} + e_t^{(1)},\ y_t^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}^{(2)} x_{t-i} + e_t^{(2)}, \cdots,\ y_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}^{(n)} x_{t-i} + e_t^{(n)}, \quad n < \infty; \tag{D16}$$

(gdzie n jest skończoną liczbą naturalną) będących zmiennymi określanymi za pomocą wzoru (1.1), gdzie składniki losowe $e_t^{(j)}$, $j = 1, 2, .. , n;$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych równych zero i stałych wariancjach:

$$E(\varepsilon_t^{(j)})=0,\; D^2(\varepsilon_t^{(j)})=\left(\sigma^{(j)}\right)^2<\infty\,, j=1,2,..,n.$$

Zależność (D15) można zapisać w postaci:

$$y_t=y_t^{(1)}+y_t^{(2)}+...+y_t^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty}v_{t\,i}^{(j)}x_{t-i}+\sum_{j=1}^{n}e_t^{(j)}=\sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=1}^{\infty}v_{t\,i}^{(j)})x_{t-i}+e_t=\sum_{i=0}^{n}v_{t\,i}x_{t-i}+e_t;$$

gdzie:

$$e_t=\sum_{j=1}^{n}e_t^{(j)} \text{ oraz } v_{t\,i}=\sum_{j=1}^{\infty}v_{t\,i}^{(j)}.$$

Z powyższych założeń wynika, że:

$$E\left(e_t\right)=0 \text{ oraz } D^2\left(e_t\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma^{(j)}\right)^2. \tag{D17}$$

Składnik losowy w modelu utworzonym przez superpozycję modeli opóźnienia rozłożonego

Z superpozycją modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna $y_t^{[n]}$ jest opisana za pomocą modelu opóźnienia rozłożonego względem pewnej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-1]}$, która jest z kolei zmienną zależną modelu opóźnienia rozłożonego względem innej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-2]}$, itd.:

$$\begin{aligned}
y_t^{[n]} &= \sum_{i=0}^{\infty}v_{t\,i}^{(n)}y_{t-i}^{[n-1]}+\varepsilon_t^{(n)} &&= V_t^{(n)}(L)y_{t-i}^{[n-1]} &&+\varepsilon_t^{(n)},\\
y_t^{[n-1]} &= \sum_{i=0}^{\infty}v_{t\,i}^{(n-1)}y_{t-i}^{[n-2]}+\varepsilon_t^{(n-1)} &&= V_t^{(n-1)}(L)y_{t-i}^{[n-2]} &&+\varepsilon_t^{(n-1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_t^{[1]} &= \sum_{i=0}^{\infty}v_{t\,i}^{(1)}x_{t-i}+\varepsilon_t^{(1)} &&= V_t^{(1)}(L)x_t &&+\varepsilon_t^{(1)}.
\end{aligned} \tag{D18}$$

gdzie x_t oznacza zmienną niezależną w modelu opóźnienia rozłożonego o numerze *1*. O składnikach losowych w (D18) zakłada się, że:

$$E(\varepsilon_t^{(j)})=0,\; D^2(\varepsilon_t^{(j)})=\left(\sigma^{(j)}\right)^2<\infty\,,\; D^2(\varepsilon_t^{(j)}\varepsilon_{t-k}^{(j)})=0,\, k=1,2,..\,; j=1,2,..,n.$$

Posługując się zapisem operatorowym, zależności (D18) można przedstawić, na podstawie wzoru (D15), w postaci:

$$
\begin{aligned}
&y_t^{[1]} = V_t^{(1)}(L)x_t \quad + \varepsilon_t^{(1)};\\
&y_t^{[2]} = V_t^{(2)}(L)y_t^{[1]} + \varepsilon_t^{(2)};\\
&y_t^{[3]} = V_t^{(3)}(L)y_t^{[2]} + \varepsilon_t^{(3)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_t^{[n]} = V_t^{(n)}(L)y_t^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{D19}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
&y_t^{[1]} = a_t^{(1)}W_t^{(1)}(L)x_t \quad + \varepsilon_t^{(1)};\\
&y_t^{[2]} = a_t^{(2)}W_t^{(2)}(L)y_t^{[1]} + \varepsilon_t^{(2)};\\
&y_t^{[3]} = a_t^{(3)}W_t^{(3)}(L)y_t^{[2]} + \varepsilon_t^{(3)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_t^{[n]} = a_t^{(n)}W_t^{(n)}(L)y_t^{[n-1]} + \varepsilon_t^{(n)}.
\end{aligned}
$$

(przy założeniu, że istnieją rozkłady opóźnienia) gdzie $V_t^{(j)}(L)$, $j= 1, 2,.., n$; operatory wielomianowe zbudowane na współczynnikach struktur opóźnienia $V_t^{(j)}$, $V_t^{(j)} = \{v_0^{(j)}, v_1^{(j)}, \ldots\}$; $W_t^{(j)}(L)$, $j=1, 2,.., n$; operatory wielomianowe zbudowane na współczynnikach rozkładów opóźnienia $W_t^{(j)}, W_t^{(j)} = \{ w_0^{(j)}, w_1^{(j)}, \ldots \}$; oraz $a_t^{(j)}$, $j=1, 2,.., n$; mnożniki długookresowe składowych modeli opóźnienia rozłożonego:

$$
a_t^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t\,i}^{(j)}, \; j=1, 2,.., n. \tag{D20}
$$

Przez kolejne podstawianie zależności (D19) uzyskuje się:

$$
\begin{aligned}
&y_t^{[1]} = V_t^{(1)}(L)x_t + \varepsilon_t^{(1)};\\
&y_t^{[2]} = V_t^{(2)}(L)V_t^{(1)}(L)x_t + V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + \varepsilon_t^{(2)};\\
&y_t^{[3]} = V_t^{(3)}(L)V_t^{(2)}(L)V_t^{(1)}(L)x_t + V_t^{(3)}(L)V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + V_t^{(3)}(L)\varepsilon_t^{(2)} + \varepsilon_t^{(3)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_t^{[n]} = V_t^{(n)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(1)}(L)x_t \quad +\\
&+V_t^{(n)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(2)}(L)\varepsilon_t^{(1)} + V_t^{(n)}(L)\cdot\ldots\cdot V_t^{(3)}(L)\varepsilon_t^{(2)} + \ldots + V_t^{(n)}\varepsilon_t^{(n-1)} + \varepsilon_t^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{D21}
$$

Oznaczając iloczyny operatorów wielomianowych i mnożników długookresowych odpowiednio przez:

$$
W_t^{[k]}(L) = W_t^{(k)}(L)\cdot\ldots\cdot W_t^{(1)}(L) = \prod_{j=1}^{k} W_t^{(j)}(L)\,;\; k= 1, 2, \ldots, n; \tag{D22}
$$

oraz

$$a_t^{[k]} = a_t^{(k)} \cdot \ldots \cdot a_t^{(1)} = \prod_{j=1}^{k} a_t^{(j)} \text{ ; } k= 1, 2, \ldots, n; \tag{D23}$$

zależność zmiennej zależnej $y_t^{[n]}$ względem zmiennej niezależnej x_t, wzór (D21), można zapisać w zwięzłej postaci:

$$y_t^{(n)} = a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L) x_t + \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[1]} W_t^{[1]}(L)} e_t^{(1)} + \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[2]} W_t^{[2]}(L)} e_t^{(2)} + \ldots + \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[n-1]} W_t^{[n-1]}(L)} e_t^{(n-1)} + e_t^{(n)}$$

lub (D24)

$$y_t^{(n)} = a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L) x_t + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]} W_t^{[j]}(L)} e_t^{(j)} .$$

Oznaczając przez $e_t^{[n]}$:

$$e_t^{[n]} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]} W_t^{[j]}(L)} e_t^{(j)} \tag{D25}$$

zależność (D.24) można przedstawić w uproszczonej postaci:

$$y_t^{(n)} = a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L) x_t + e_t^{[n]} . \tag{D26}$$

z której wynika, że superpozycja modeli opóźnienia rozłożonego jest również modelem opóźnienia rozłożonego, mnożnik długookresowy superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest równy iloczynowi mnożników długookresowych składowych modeli opóźnienia rozłożonego, a rozkład opóźnienia jest zbudowany na współczynnikach uzyskanych z iloczynu operatorów wielomianowych zbudowanych na współczynnikach składowych rozkładów opóźnienia.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$W_t^{\{j\}}(L) = \frac{W_t^{[n]}(L)}{W_t^{[j]}(L)}, \qquad j=1, 2,.., n; \tag{D27}$$

oraz

$$a_t^{\{j\}} = \frac{a_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]}(L)}, \qquad j=1, 2,.., n. \tag{D28}$$

Nietrudno zauważyć, że $W_t^{\{j\}}(L)$ jest iloczynem operatorów wielomianowych $W_t^{(i)}(L)$ o numerach, *i=j+1, j+2, ..., n*; zbudowanych na rozkładach opóźnienia $W_t^{(j)}$, *j=1, 2, .. , n*; oraz że $a_t^{\{j\}}$ jest iloczynem mnożników długookresowych modeli opóźnienia $a_t^{(i)}$ o numerach *i=j+1, j+2, ... , n*.

Jak pokazano w Części II, iloczynowi operatorów wielomianowych $W_t^{\{j\}}(L)$ zbudowanych na rozkładach opóźnienia zawsze jednoznacznie odpowiada pewien rozkład opóźnienia $W_t^{\{j\}}$. W związku z tym zależność (D26) można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} e^{[n]} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_t^{[n]} W_t^{[n]}(L)}{a_t^{[j]} W_t^{[j]}(L)} e_t^{(j)} = \\ &= a_t^{\{1\}} \left(w_{t\,0}^{\{1\}} e_t^{(1)} + w_{t\,1}^{\{1\}} e_{t-1}^{(1)} + \dots + \right) + \\ &+ a_t^{\{2\}} \left(w_{t\,0}^{\{2\}} e_t^{(2)} + w_{t\,1}^{\{2\}} e_{t-1}^{(2)} + \dots + \right) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ a_t^{\{n-1\}} \left(w_{t\,0}^{\{n-1\}} e_t^{(n-1)} + w_{t\,1}^{\{n-1\}} e_{t-1}^{(n-1)} + \dots + \right) + \\ &+ e_t^{(n)}. \end{aligned} \tag{D29}$$

Ponieważ z założenia:

$$E(\varepsilon_t^{(j)}) = 0,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)}) = \left(\sigma^{(j)}\right)^2 < \infty,\ D^2(\varepsilon_t^{(j)} \varepsilon_{t-k}^{(j)}) = 0,\ k = 1,2,..\ ; j = 1,\ 2,\ \dots,\ n;$$

wartość oczekiwana składnika losowego $e_t^{[n]}$, wzór (D29), jest równa:

$$E(e_t^{[n]}) = 0,$$

co bezpośrednio wynika z założenia, a wariancja składnika losowego $e_t^{[n]}$, wzór (D17), jest równa:

$$D^2(e^{[n]}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} a_t^{\{j\}} w_t^{\{j\}} D^2(e_{t-i}^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} a_t^{\{j\}} (\sigma^{(j)})^2 .$$

C.b.d.o.

Rozpiętość struktur złożonych modeli opóźnienia rozłożonego

<u>Rozpiętość struktury sumy skończonych modeli opóźnienia</u>

Z sumą skończonych modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna y_t jest sumą skończonej liczby zmiennych zależnych $y_t^{(j)}$, *j= 1, 2, .. ,n;* opisanych za pomocą skończonych modeli opóźnienia rozłożonego względem tej samej zmiennej niezależnej x_t:

$$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)} + \ldots + y_t^{(n)} = y_t^{(1)} = \sum_{i=i_d(V_t)}^{i_g(V_t)} v_{t\,i} x_{t-i} + e_t\,; \quad n < \infty \qquad \text{(D30)}$$

gdzie:

$$y_t^{(1)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(1)})}^{i_g(V_t^{(1)})} v_{t\,i}^{(1)} x_{t-i} + e_t^{(1)},\; y_t^{(2)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(2)})}^{i_g(V_t^{(2)})} v_{t\,i}^{(2)} x_{t-i} + e_t^{(2)}, \cdots, y_t^{(n)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(n)})}^{i_g(V_t^{(n)})} v_{t\,i}^{(n)} x_{t-i} + e_t^{(n)},\; n < \infty; \qquad \text{(D31)}$$

oraz[5]

$$v_{t\,i} = \sum_{j=0}^{n} v_{t\,i}^{(j)};\; e_t = \sum_{j=0}^{n} e_t^{(j)}.$$

Granice zbioru indeksów znaczących $J(V_t)$ są określone za pomocą następujących wzorów:

$$i_d(V_t) = \min\{\, i_d(V_t^{(j)});\; j = 1, 2, .., n \,\}$$

(D31)

$$i_g(V_t) = \max\{\, i_g(V_t^{(j)});\; j = 1, 2, .., n \,\}$$

Rozpiętość struktury opóźnienia $R(V_t)$ wyraża się wzorem:

$$R(V_t) = \max\{\, i_g(V_t^{(j)});\; j = 1, 2, .., n \,\} - \min\{\, i_d(V_t^{(j)}) + 1\,;\; j = 1, 2, ..., n \,\}\,. \qquad \text{(D32)}$$

Rozpiętość struktury superpozycji skończonych modeli opóźnienia

Z superpozycją modeli opóźnienia rozłożonego mamy do czynienia, gdy zmienna zależna $y_t^{[n]}$ jest opisana za pomocą modelu skończonego opóźnienia rozłożonego względem pewnej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-1]}$, która jest z kolei zmienną zależną modelu opóźnienia rozłożonego względem innej zmiennej niezależnej $y_t^{[n-2]}$, itd.:

$$y_t^{(n)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(n)})}^{i_g(V_t^{(n)})} v_{t\,i}^{(n)} y_{t-i}^{(n-1)}\,,\; y_t^{(n-1)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(n-1)})}^{i_g(V_t^{(n-1)})} v_{t\,i}^{(n-1)} y_{t-i}^{(n-2)}, \ldots, y_t^{(1)} = \sum_{i=i_d(V_t^{(1)})}^{i_g(V_t^{(1)})} v_{t\,i}^{(1)} x_{t-i} \qquad \text{(D33)}$$

Posługując się zapisem operatorowym zależności (2.25) można przedstawić, na podstawie wzoru (2.10), w postaci:

[5] Dla uproszczenia zapisu w dalszej części składniki losowe zostaną opuszczone.

$$y_t^{(n)} = V_t^{(n)}(L)y_t^{(n-1)},\ y_t^{(n-1)} = V_t^{(n-1)}(L)y_t^{(n-2)},\ ..,\ y_t^{(1)} = V_t^{(1)}(L)x_t \qquad \text{(D34)}$$

Granice przedziału indeksów znaczących rozkładu utworzonego w następstwie superpozycji skończonych modeli opóźnienia rozłożonego są określone następującym wzorem:

$$i_d\left(V_t^{[n]}\right) = \sum_{j=1}^{n} i_d\left(V_t^{(j)}\right)$$

$$i_g\left(V_t^{[n]}\right) = \sum_{j=1}^{n} i_g\left(V_t^{(j)}\right)$$

a rozpiętość struktury $R(V_t^{[n]})$ wynosi:

$$R(V_t^{[n]}) = i_g\left(V_t^{[n]}\right) - i_d\left(V_t^{[n]}\right) + 1 = \sum_{j=1}^{n} i_g\left(V_t^{(j)}\right) - \sum_{j=1}^{n} i_d\left(V_t^{(j)}\right) + 1\ .$$

Praca jest poświęcona modelom opóźnienia rozłożonego, stosowanym w modelowaniu zjawisk ekonomicznych. Część pierwsza pracy zawiera wprowadzenie, przedstawiające znane z literatury sposoby formułowania modeli opóźnienia, ich podstawowe własności i sposoby analizy, a ponadto sposoby pomiaru wielkości ogólnie nazywanej przeciętnym opóźnieniem. Część ta zawiera również przegląd spotykanych w literaturze modeli opóźnienia. Część druga opisuje własności modeli opóźnienia rozłożonego, utworzonych za pomocą operacji sumowania (łączenia równoległego) oraz superpozycji (łączenia szeregowego). Część trzecia jest poświęcona odrębnej podkategorii modeli opóźnienia rozłożonego, opisującej systemy przepływów. W Dodatku zamieszczone zostały dowody własności, których względna zawiłość mogłaby przeszkadzać w lekturze głównej części pracy.

W monografii przedstawiono następujące nowe elementy. Po pierwsze: próbę uogólnienia własności modeli opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami. Po drugie: propozycję zmiany podejścia do problemu oceny tzw. przeciętnego opóźnienia. Rzecz polega na odróżnieniu opóźnienia, będącego wynikiem mechanizmu opóźnienia, od opóźnienia rzeczywistego, uwzględniającego dynamikę zmiennej niezależnej. To drugie jest ujęte w rozkładzie nazwanym wynikowym rozkładem opóźnienia. Kolejną nowością jest analiza złożonych modeli opóźnienia rozłożonego, powstałych przez łączenie równoległe lub szeregowe skończonej liczby *n* składowych modeli opóźnienia rozłożonego. I wreszcie, nowością jest wyodrębnienie podkategorii modeli opóźnienia rozłożonego w systemach przepływów oraz analiza ich własności. W literaturze ekonomicznej do tej pory tego podejścia nie można było spotykać, chociaż do tej podkategorii modeli opóźnienia rozłożonego należy wiele modeli (niekoniecznie skupionych w przestrzeni).

ISSN 0208-8029
ISBN 83-894-7559-6

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
tel.: (+48) 22 3810246 / 22 3810277 / 22 3810241 / 22 3810273
e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl