POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 27

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2001

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński
Dr hab. inż. Józef Żurek

Publikacja współfinansowana przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu badawczego Nr 9 T12C 022 16 nt. "Graniczne funkcje niezawodności dużych systemów wielostanowych oraz ich zastosowania w zagadnieniach transportowych i wytrzymałościowych"

ISBN 83-85847-58-8
ISSN 0208-8029

6. Klasa granicznych funkcji niezawodności systemów wielostanowych

6.1. *Graniczne funkcje niezawodności wielostanowych systemów szeregowych*

Dowodząc fakty dotyczące granicznych funkcji niezawodności wielostanowych jednorodnych systemów szeregowych, korzystamy z niżej sformułowanego rozszerzenia Lematu 5.1.

Lemat 6.1
Jeśli

(i) $\overline{\mathfrak{R}}(t,u) = \exp[-\overline{V}(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\overline{\boldsymbol{R}}_n(t,\cdot) = [1, \overline{\boldsymbol{R}}_n(t,1), \ldots, \overline{\boldsymbol{R}}_n(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności jednorodnego wielostanowego systemu szeregowego określoną przez (4.20)–(4.21),

(iii) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

to

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,\cdot) = [1, \overline{\mathfrak{R}}(t,1),..., \overline{\mathfrak{R}}(t,z)], \; t \in (-\infty,\infty),$$

jest graniczną wielostanową funkcją niezawodności tego systemu, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\boldsymbol{R}}_n(a_n(u)t + b_n(u),u) = \overline{\mathfrak{R}}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\overline{\mathfrak{R}}(u)},\; u = 1,2,...,z, \tag{6.1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n(u)t + b_n(u),u) = \overline{V}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\overline{V}(u)},\; u = 1,2,...,z. \tag{6.2}$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(iii) Lematu 6.1 są takie same jak założenia (i)-(iii) Lematu 5.1 i ponadto warunek (6.1) jest identyczny z warunkiem (5.1), natomiast warunek (6.2) jest identyczny z warunkiem (5.2). Na podstawie Lematu 5.1 warunki (5.1) i (5.2) są równoważne, więc warunki (6.1) i (6.2) są równoważne.

Lemat 6.1 oraz Twierdzenie 5.1 z Rozdziału 5 pozwalają ustalić klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności wielostanowych jednorodnych systemów szeregowych. Wynikiem ich zastosowania jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.1
Klasa granicznych funkcji niezawodności jednorodnego wielostanowego systemu szeregowego składa się z 3^z funkcji niezawodności postaci

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,\cdot) = [1, \ \overline{\mathfrak{R}}(t,1),..., \ \overline{\mathfrak{R}}(t,z)], \ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.3}$$

gdzie

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,u) \in \{ \ \overline{\mathfrak{R}}_1(t), \ \overline{\mathfrak{R}}_2(t), \ \overline{\mathfrak{R}}_3(t) \}, \ u = 1,2,...,z, \tag{6.4}$$

oraz $\overline{\mathfrak{R}}_i(t)$, i = 1,2,3, są określone wzorami (5.3)-(5.5).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, u = 1,2,...,z, składowa $\overline{\mathfrak{R}}(t,u)$ wektora $\overline{\mathfrak{R}}(t,\cdot)$ określonego wzorem (6.3), wobec Twierdzenia 5.1 będącego konsekwencją Lematu 5.1, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.3)-(5.5). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle ile jest wariacji z-wyrazowych zbioru 3 elementowego (6.4), tzn. 3^z i są one postaci (6.3).

Przy ustalaniu klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności dla niejednorodnych wielostanowych systemów szeregowych posługujemy się następującym oczywistym rozszerzeniem Lematu 5.3

Lemat 6.2
Jeśli

(i) $\overline{\mathfrak{R}}'(t,u) = \exp[- \ \overline{V}'(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\overline{\boldsymbol{R}}'_n(t,\cdot) = [1, \overline{\boldsymbol{R}}'_n(t,1), \ . \ . \ . \ , \overline{\boldsymbol{R}}'_n(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją
niezawodności niejednorodnego wielostanowego systemu szeregowego określoną przez (4.29)-(4.30),

(iii) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

(iv) $F(t,u)$ dla każdego u, jest jedną z dystrybuant $F^{(1)}(t,u)$, $F^{(2)}(t,u)$,..., $F^{(a)}(t,u)$ określonych przez (4.28) taką, że

(v) $\exists\, N(u)\ \forall\, n > N(u)\ F(a_n(u)t + b_n(u),u) = 0$ dla $t < t_0(u)$,

$$F(a_n(u)t + b_n(u),u) \neq 0 \text{ dla } t \geq t_0(\mathrm{u}),$$

gdzie $t_0(\mathrm{u}) \in \langle-\infty,\infty)$,

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{(i)}(a_n(u)t+b_n(u),u)}{F(a_n(u)t+b_n(u),u)} \leq 1$ dla $t \geq t_0(\mathrm{u})$, $i = 1,2,...,a$, $u = 1,2,...,z$,

i ponadto istnieją niemalejące funkcje

$$\text{(vii)}\quad \bar{d}(t,u) = \begin{cases} 0 & dla\ t < t_o(u) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{a} q_i\, \bar{d}_i(a_n(u)t+b_n(u),u) & dla\ t \geq t_o(u), \end{cases} \qquad (6.5)$$

gdzie

$$\text{(viii)}\quad \bar{d}_i(a_n(u)t+b_n(u),u) = \frac{F^{(i)}(a_n(u)t+b_n(u),u)}{F(a_n(u)t+b_n(u),u)}, \qquad (6.6)$$

to

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,\cdot) = [1,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,1),...,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest graniczną wielostanową funkcją niezawodności tego systemu, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}'_n(a_n(u)t + b_n(u),u) = \bar{\mathfrak{R}}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'(u)},\ u = 1,2,...,z, \qquad (6.7)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n(u)t+b_n(u),u)\,\bar{d}(t,u) = \bar{V}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\bar{V}'(u)}, \qquad (6.8)$$

$u = 1,2,...,z$. (6.8)

Uzasadnienie: Ponieważ dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\dots,z$, założenia (i)–(viii) Lematu 6.2 są identyczne z założeniami (i)–(viii) Lematu 5.3 oraz warunek (6.7) jest identyczny z warunkiem (5.7), natomiast warunek (6.8) jest identyczny z warunkiem (5.8), które na podstawie Lematu 5.3 są równoważne, więc Lemat 6.2 jest prawdziwy.

Lemat 6.2 oraz Twierdzenie 5.2 z Rozdziału 5 pozwalają ustalić klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych wielostanowych systemów szeregowych, wyszczególnionych w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 6.2
Klasa granicznych funkcji niezawodności niejednorodnego wielostanowego systemu szeregowego, przy założeniach Lematu 6.2, składa się z 3^z funkcji niezawodności postaci

$$\overline{\mathfrak{R}}'(t,\cdot) = [1, \overline{\mathfrak{R}}'(t,1),\dots, \overline{\mathfrak{R}}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.9}$$

gdzie

$$\overline{\mathfrak{R}}'(t,u) \in \{ \overline{\mathfrak{R}}'_1(t), \overline{\mathfrak{R}}'_2(t), \overline{\mathfrak{R}}'_3(t)\},\ u = 1,2,\dots,z, \tag{6.10}$$

oraz $\overline{\mathfrak{R}}'_i(t)$, i = 1,2,3, są określone wzorami (5.9)-(5.11) z $\overline{d}(t) = \overline{d}(t,u)$, $u = 1,2,\dots z$, gdzie $\overline{d}(t,u)$ określone jest przez (6.5).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\dots,z$, składowa $\overline{\mathfrak{R}}'(t,u)$ wektora $\overline{\mathfrak{R}}'(t,\cdot)$ określonego wzorem (6.9), wobec Twierdzenia 5.2 będącego konsekwencją Lematu 5.3, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.9)-(5.11) z $\overline{d}(t) = \overline{d}(t,u)$, gdzie $\overline{d}(t,u)$ określone jest przez (6.5). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbioru 3 elementowego (6.10), tzn. 3^z i są one postaci (6.9).

6.2. *Graniczne funkcje niezawodności wielostanowych systemów równoległych*

W dowodach faktów dotyczących granicznych funkcji niezawodności wielostanowych jednorodnych systemów równoległych korzystamy z niżej sformułowanego twierdzenia pomocniczego, będącego rozszerzeniem Lematu 5.5.

Lemat 6.3
Jeśli

(i) $\mathfrak{R}(t,u) = 1 - \exp[-V(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\boldsymbol{R}_n(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}_n(t,1), \ldots, \boldsymbol{R}_n(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności jednorodnego wielostanowego systemu równoległego określoną przez (4.22)–(4.23),

(iii) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

to

$$\mathfrak{R}(t,\cdot) = [1, \mathfrak{R}(t,1),...,\mathfrak{R}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest graniczną wielostanową funkcją niezawodności tego systemu, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_n(a_n(u)t + b_n(u),u) = \mathfrak{R}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}(u)},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.11}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nR(a_n(u)t + b_n(u),u) = V(t,u) \text{ dla } t \in C_{V(u)},\ u = 1,2,...,z. \tag{6.12}$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(iii) Lematu 6.3 są takie same jak założenia (i)-(iii) Lematu 5.5 i ponadto warunek (6.11) jest identyczny z warunkiem (5.12), natomiast warunek (6.12) jest identyczny z warunkiem (5.13). Na podstawie Lematu 5.5 warunki (5.12) i (5.13) są równoważne, więc warunki (6.11) i (6.12) są równoważne.

Lemat 6.3 oraz Twierdzenie 5.3 z Rozdziału 5 pozwalają ustalić klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności jednorodnych wielostanowych systemów równoległych, a mianowicie ich zastosowanie skutkuje następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 6.3
Klasa granicznych funkcji niezawodności jednorodnego wielostanowego systemu równoległego składa się z 3^z funkcji niezawodności postaci

$$\mathfrak{R}(t,\cdot) = [1,\mathfrak{R}(t,1),...,\mathfrak{R}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.13}$$

gdzie

$$\mathfrak{R}(t,u) \in \{ \mathfrak{R}_1(t),\mathfrak{R}_2(t),\mathfrak{R}_3(t) \},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.14}$$

oraz $\mathfrak{R}_i(t)$, i = 1,2,3, są określone wzorami (5.14)-(5.16).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, u = 1,2,...,z, składowa $\mathfrak{R}(t,u)$ wektora $\mathfrak{R}(t,\cdot)$ określonego wzorem (6.13), wobec Twierdzenia 5.3, będącego konsekwencją Lematu 5.5, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.14)-(5.16). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbioru 3 elementowego (6.14), tzn. 3^z i są one postaci (6.13).

Podczas ustalania klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych wielostanowych systemów równoległych posługujemy się następującym rozszerzeniem Lematu 5.8

Lemat 6.4
Jeśli

(i) $\mathfrak{R}'(t,u) = 1 - \exp[-V'(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\boldsymbol{R}'_n(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}'_n(t,1),\ldots, \boldsymbol{R}'_n(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności niejednorodnego wielostanowego systemu równoległego określoną przez (4.32)-(4.33),

(iii) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, u = 1,2,...,z,

(iv) $R(t,u)$ dla każdego u, jest jedną z funkcji niezawodności $R^{(1)}(t,u)$, $R^{(2)}(t,u)$,..., $R^{(a)}(t,u)$ określoną przez (4.31) taką, że

(v) $\exists\ N(u)\ \forall\ n > N(u)\ R(a_n(u)t + b_n(u),u) \neq 0$ dla $t < t_0(u)$,

$$R(a_n(u)t + b_n(u),u) = 0 \text{ dla } t \geq t_0(u),$$

gdzie $t_0(u) \in (-\infty,\infty>$,

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R^{(i)}(a_n(u)t+b_n(u),u)}{R(a_n(u)t+b_n(u),u)}\leq 1$ dla $t < t_0(u)$, $i = 1,2,\ldots,a$, $u = 1,2,\ldots,z$,

i ponadto istnieją nierosnące funkcje

$$\text{(vii)}\quad d(t,u)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{a} q_i d_i(a_n(u)t+b_n(u),u) & dla\ t<t_0(u)\\ 0 & dla\,t\geq t_0(u),\end{cases} \qquad (6.15)$$

gdzie

$$\text{(viii)}\quad d_i(a_n(u)t+b_n(u),u)=\frac{R^{(i)}(a_n(u)t+b_n(u),u)}{R(a_n(u)t+b_n(u),u)},$$

to

$$\mathfrak{R}'(t,\cdot) = [1, \mathfrak{R}'(t,1),\ldots,\mathfrak{R}'(t,z)],\ t\in(-\infty,\infty),$$

jest graniczną funkcją niezawodności tego systemu, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} R'_n(a_n(u)t + b_n(u),u) = \mathfrak{R}'(t,u) \text{ dla } t\in C_{\mathfrak{R}'(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \qquad (6.16)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nR(a_n(u)t+b_n(u),u)d(t,u)=V'(t,u) \text{ dla } t\in C_{V'(u)}, \qquad (6.17)$$
$u = 1,2,\ldots,z.$

Uzasadnienie: Ponieważ dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)–(viii) Lematu 6.4 są identyczne z założeniami (i)–(viii) Lematu 5.8 oraz warunek (6.16) jest identyczny z warunkiem (5.18), natomiast warunek (6.17) jest identyczny z warunkiem (5.19), które na podstawie Lematu 5.8 są równoważne, więc Lemat 5.4 jest prawdziwy.

Lemat 6.4 oraz Twierdzenie 5.4 z Rozdziału 5 pozwalają ustalić klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych wielostanowych systemów równoległych, które wyszczególnia niżej sformułowane twierdzenie.

Twierdzenie 6.4
Klasa granicznych funkcji niezawodności niejednorodnego wielostanowego systemu równoległego, przy założeniach Lematu 6.4, składa się z 3^z funkcji niezawodności postaci

$$\mathfrak{R}'(t,\cdot) = [1, \mathfrak{R}'(t,1), ..., \mathfrak{R}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.18}$$

gdzie

$$\mathfrak{R}'(t,u) \in \{\mathfrak{R}'_1(t), \mathfrak{R}'_2(t), \mathfrak{R}'_3(t)\},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.19}$$

oraz $\mathfrak{R}'_i(t)$, i = 1,2,3, są określone wzorami (5.20)-(5.22) z $d(t) = d(t,u)$, $u = 1,2,...z$, gdzie $d(t,u)$ określone jest przez (6.15).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,...,z$, składowa $\mathfrak{R}'(t,u)$ wektora $\mathfrak{R}'(t,\cdot)$ określonego wzorem (6.18), wobec Twierdzenia 5.4, będącego konsekwencją Lematu 5.8, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.20)-(5.22) z $d(t) = d(t,u)$, gdzie $d(t,u)$ określone jest przez (6.15). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbioru 3 elementowego (6.19), tzn. 3^z i są one postaci (6.18).

6.3. Graniczne funkcje niezawodności wielostanowych systemów szeregowo-równoległych

W dowodach faktów dotyczących granicznych funkcji niezawodności wielostanowych jednorodnych systemów szeregowo-równoległych korzystamy z kolejnych twierdzeń pomocniczych, będących uogólnieniami odpowiednio Lematu 5.9 oraz Lematu 5.10.

Lemat 6.5
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}(t,u) = 1 - \exp[-V(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,1), ..., \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności jednorodnego regularnego wielostanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (4.24)-(4.25),

(iv) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,\ldots,z$,

to

$$\mathfrak{R}(t\,;\cdot) = [1,\mathfrak{R}(t,1),\ldots,\mathfrak{R}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \mathfrak{R}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.20}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n[R(a_n(u)t + b_n(u),u)]^{l_n} = V(t,u) \text{ dla } t \in C_{V(u)},\ u = 1,2,\ldots,z. \tag{6.21}$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(iv) Lematu 6.5 są takie same jak założenia (i)-(iv) Lematu 5.9 i ponadto warunek (6.20) jest identyczny z warunkiem (5.23), natomiast warunek (6.21) jest identyczny z warunkiem (5.24). Na podstawie Lematu 5.9 warunki (5.23) i (5.24) są równoważne, więc warunki (6.20) i (6.21) są równoważne.

Lemat 6.6
Jeśli

(i) $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}(t,u)$, $u = 1,2,\ldots,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,1), \ldots, \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności jednorodnego regularnego wielostanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (4.24)-(4.25),

(iv) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,\ldots,z$,

to

$$\mathfrak{R}(t\,;\cdot) = [1,\mathfrak{R}(t,1),\ldots,\mathfrak{R}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{k_n, l_n}(a_n(u)t + b_n(u), u) = \mathfrak{R}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}(u)},\ u = 1,2,\dots,z, \tag{6.22}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} [R(a_n(u)t + b_n(u), u)]^{l_n} = \mathfrak{R}_0(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}_0(u)},\ u = 1,2,\dots,z, \tag{6.23}$$

gdzie $\mathfrak{R}_0(t,u)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności i ponadto

$$\mathfrak{R}(t,u) = 1 - [1 - \mathfrak{R}_0(t,u)]^k \text{ dla } t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\dots,z. \tag{6.24}$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\dots,z$, założenia (i)-(iv) Lematu 6.6 są takie same jak założenia (i)-(iv) Lematu 5.10 i ponadto warunek (6.22) jest identyczny z warunkiem (5.25), natomiast warunek (6.23) jest identyczny z warunkiem (5.26). Na podstawię Lematu 5.10 warunki (5.25) i (5.26) są równoważne, więc warunki (6.22) i (6.23) są równoważne i ponadto wobec (5.27) równość (6.24) zachodzi.

Lemat 6.5, Lemat 6.6 oraz Twierdzenie 5.5 z Rozdziału 5 pozwalają sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.5
Klasa granicznych funkcji niezawodności jednorodnego regularnego wielostanowego systemu szeregowo-równoległego składa się z $3^z + 4^z + 3^z$ funkcji niezawodności postaci

$$\mathfrak{R}(t,\cdot) = [1, \mathfrak{R}(t,1), \dots, \mathfrak{R}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.25}$$

gdzie

Przypadek 1. $k_n = n$, $|\, l_n - c \log n \,| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1).

$$\mathfrak{R}(t,u) \in \{\mathfrak{R}_1(t), \mathfrak{R}_2(t), \mathfrak{R}_3(t)\},\ u = 1,2,\dots,z, \tag{6.26}$$

oraz $\mathfrak{R}_i(t)$, $i = 1,2,3$, są określone przez (5.28)-(5.30),

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \sim s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$.

$$\mathfrak{R}(t,u) \in \{\mathfrak{R}_4(t), \mathfrak{R}_5(t), \mathfrak{R}_6(t), \mathfrak{R}_7(t)\},\ u = 1,2,\dots,z, \tag{6.27}$$

oraz $\mathfrak{R}_i(t)$, $i = 4,5,6,7$, są określone przez (5.31)-(5.34),

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$.

$$\mathfrak{R}(t,u) \in \{\mathfrak{R}_8(t), \mathfrak{R}_9(t), \mathfrak{R}_{10}(t)\},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.28}$$

oraz $\mathfrak{R}_i(t)$, $i = 8,9,10$, są określone przez (5.35)-(5.37).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,...,z$, składowa $\mathfrak{R}(t,u)$ wektora $\mathfrak{R}(t,\cdot)$ określonego w orem (6.25), wobec Twierdzenia 5.5 będącego konsekwencją Lematu 5.9 oraz Lematu 5.10, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.28)-(5.30) lub jednego z czterech typów określonych wzorami (5.31)-(5.34) lub jednego z trzech typów określonych wzorami (5.35)-(5.37). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbiorów 3-elementowych określonych przez (6.26) i (6.28) oraz zbioru 4-elementowego określonego przez (6.27), tzn. $3^z + 4^z + 3^z$ i są one postaci (6.25).

Podczas znajdowania granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych regularnych wielostanowych systemów szeregowo-równoległych posługujemy się następującymi rozszerzeniami odpowiednio Lematu 5.12 oraz Lematu 5.13

Lemat 6.7
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}'(t,u) = 1 - \exp[-V'(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,1), \ldots, \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego wielostanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (4.34)-(4.36),

(iv) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

(v) $R(t,u)$ dla każdego ustalonego u, jest jedną z funkcji niezawodności $R^{(1)}(t,u)$, $R^{(2)}(t,u)$, ...,$R^{(a)}(t,u)$ określonych przez (4.36) taką, że

(vi) $\exists\, N(u)\ \forall\, n > N(u)\ R(a_n(u)t + b_n(u),u) \neq 0$ dla $t < t_0(u)$,

$$R(a_n(u)t + b_n(u),u) = 0 \text{ dla } t \geq t_0(u),$$

gdzie $t_0(u) \in (-\infty,\infty>$,

(vii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{(i)}(a_n(u)t + b_n(u),u)}{R(a_n(u)t + b_n(u),u)} \leq 1 \text{ dla } t < t_0(u),\ i = 1,2,...,a,\ u = 1,2,...,z,$$

i ponadto istnieją nierosnące funkcje

(viii) $$d(t,u) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{a} q_i d_i(a_n(u)t + b_n(u),u) & dla\ t < t_0(u) \\ 0 & dla\ t \geq t_0(u), \end{cases} \tag{6.29}$$

gdzie

$$d_i(a_n(u)t + b_n(u),u) = [\frac{R^{(i)}(a_n(u)t + b_n(u),u)}{R(a_n(u)t + b_n(u),u)}]^{l_n},$$

to

$$\mathfrak{R}'(t,\cdot) = [1,\mathfrak{R}'(t,1),...,\mathfrak{R}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \mathfrak{R}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'(u)},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.30}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n[R(a_n(u)t + b_n(u),u)]^{l_n} d(t,u) = V'(t,u) \text{ dla } t \in C_{V'(u)}, \tag{6.31}$$
$u = 1,2,...,z.$

Uzasadnienie: Ponieważ dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,...,z$, założenia (i)–(viii) Lematu 6.7 są identyczne z założeniami (i)–(viii) Lematu 5.12 oraz warunek (6.30) jest identyczny z warunkiem (5.39), natomiast warunek (6.31) jest identyczny z warunkiem (5.40), które na podstawie Lematu 5.12 są równoważne, więc Lemat 6.7 jest prawdziwy.

Lemat 6.8
Jeśli

(i) $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}'(t,u)$, $u = 1,2,\dots,z$, jest niezdegenerowana funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,1), \dots, \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego wielostanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (4.34)-(4.36),

(iv) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,\dots,z$,

(v) $R(t,u)$ dla każdego ustalonego u, jest jedną z funkcji niezawodności $R^{(1)}(t,u), R^{(2)}(t,u), \dots, R^{(a)}(t,u)$ określoną przez (4.36) taką, że

(vi) $\exists\ N(u)\ \forall\ n > N(u)\ R(a_n(u)t + b_n(u),u) \neq 0$ dla $t < t_0(u)$,

$$R(a_n(u)t + b_n(u),u) = 0 \text{ dla } t \geq t_0(u),$$

gdzie $t_0(u) \in (-\infty,\infty>$,

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R^{(i)}(a_n(u)t + b_n(u),u)}{R(a_n(u)t + b_n(u),u)} \leq 1$ dla $t < t_0(u)$, $i = 1,2,\dots,a$, $u = 1,2,\dots,z$,

i ponadto istnieją nierosnące funkcje

(viii) $$d_i(t,u) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} d_i(a_n(u)t + b_n(u),u) & dla\ t < t_0(u) \\ 0 & dla\ t \geq t_0(u), \end{cases} \tag{6.32}$$

gdzie

$$d_i(a_n(u)t + b_n(u),u) = \left[\frac{R^{(i)}(a_n(u)t + b_n(u),u)}{R(a_n(u)t + b_n(u),u)}\right]^{l_n}, \tag{6.33}$$

to

$$\mathfrak{R}'(t,\cdot) = [1, \mathfrak{R}'(t,1), \dots, \mathfrak{R}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \mathfrak{R}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.34}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}[R(a_n(u)t + b_n(u),u)]^{l_n} = \mathfrak{R}_0(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}_0(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.35}$$

gdzie $\mathfrak{R}_0(t,u)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności i ponadto

$$\mathfrak{R}'(t,u) = 1 - \prod_{i=1}^{a}[1 - d_i(t,u)\,\mathfrak{R}_0(t,u)]^{q_{ik}},\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\ldots,z. \tag{6.36}$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(viii) Lematu 6.8 są takie same jak założenia (i)-(viii) Lematu 5.13 i ponadto warunek (6.34) jest identyczny z warunkiem (5.42), natomiast warunek (6.35) jest identyczny z warunkiem (5.43). Na podstawie Lematu 5.13 warunki (5.42) i (5.43) są równoważne, więc warunki (6.34) i (6.35) są równoważne i ponadto wobec (5.44) równość (6.36) zachodzi.

Lemat 6.7, Lemat 6.8 oraz Twierdzenie 5.6 z Rozdziału 5 ustalają klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych regularnych wielostanowych systemów szeregowo-równoległych wyszczególnioną w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 6.6
Klasa granicznych funkcji niezawodności niejednorodnego regularnego wielostanowego systemu szeregowo-równoległego składa się z $3^z + 4^z + 3^z$ funkcji niezawodności postaci

$$\mathfrak{R}'(t,\cdot) = [1,\mathfrak{R}'(t,1),\ldots,\mathfrak{R}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.37}$$

gdzie

Przypadek 1. $k_n = n$, $|l_n - c\log n| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1 i założeniach Lematu 6.7).

$$\mathfrak{R}'(t,u) \in \{\mathfrak{R}'_1(t), \mathfrak{R}'_2(t), \mathfrak{R}'_3(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.38}$$

oraz $\mathfrak{R}'_i(t)$, $i = 1,2,3$, są określone wzorami (5.45)-(5.47) z $d(t) = d(t,u)$, $u = 1,2,...z$, gdzie $d(t,u)$ określone jest przez (6.29),

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \sim s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$ (przy założeniach Lematu 6.7).

$$\mathfrak{R}'(t,u) \in \{\mathfrak{R}'_4(t), \mathfrak{R}'_5(t), \mathfrak{R}'_6(t), \mathfrak{R}'_7(t)\},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.39}$$

oraz $\mathfrak{R}'_i(t)$, $i = 4,5,6,7$, są określone wzorami (5.48)-(5.51) z $d(t) = d(t,u)$, $u = 1,2,...z$, gdzie $d(t,u)$ określone jest przez (6.29),

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$ (przy założeniach Lematu 6.8).

$$\mathfrak{R}'(t,u) \in \{\mathfrak{R}'_8(t), \mathfrak{R}'_9(t), \mathfrak{R}'_{10}(t)\},\ u = 1,2,...,z, \tag{6.40}$$

oraz $\mathfrak{R}'_i(t)$, $i = 8,9,10$, są określone wzorami (5.52)-(5.54) z $d_i(t) = d_i(t,u)$, $u = 1,2,...z$, gdzie $d_i(t,u)$ określone jest przez (6.32).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u; $u = 1,2,...,z$, składowa $\mathfrak{R}'(t,u)$ wektora $\mathfrak{R}'(t,\cdot)$ określonego wzorem (6.37), wobec Twierdzenia 5.6, będącego konsekwencją Lematu 5.12 oraz Lematu 5.13, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.45)-(5.47) albo jednego z czterech typów określonych wzorami (5.48)-(5.51) z $d(t) = d(t,u)$, gdzie $d(t,u)$ określone jest przez (6.29), albo jednego z trzech typów określonych wzorami (5.52)-(5.54) z $d_i(t) = d_i(t,u)$, gdzie $d_i(t,u)$ określone jest przez (6.32). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbiorów 3-elementowych określonych przez (6.38) i (6.40) oraz zbioru 4-elementowego określonego przez (6.39), tzn. $3^z + 4^z + 3^z$ i są one postaci (6.37). □

6.4. *Graniczne funkcje niezawodności wielostanowych systemów równoległo-szeregowych*

W dowodach faktów dotyczących granicznych funkcji niezawodności wielostanowych jednorodnych systemów równoległo-szeregowych korzystamy z kolejnych dwóch twierdzeń pomocniczych będących uogólnieniami odpowiednio Lematu 5.15 oraz Lematu 5.16.

Lemat 6.9
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\overline{\mathfrak{R}}(t,u) = \exp[-\overline{V}(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,1), \ldots, \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności jednorodnego regularnego wielostanowego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (4.26)-(4.27),

(iv) $a_n(\mathrm{u}) > 0$, $b_n(\mathrm{u}) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

to

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,\cdot) = [1, \overline{\mathfrak{R}}(t,1),..., \overline{\mathfrak{R}}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \overline{\mathfrak{R}}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\overline{\mathfrak{R}}(u)},\ u = 1,2,...,z, \quad (6.41)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n[F(a_n(u)t + b_n(u),u)]^{l_n} = \overline{V}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\overline{V}(u)},\ u = 1,2,...,z. \quad (6.42)$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(iv) Lematu 6.9 są takie same jak założenia (i)-(iv) Lematu 5.15 i ponadto warunek (6.41) jest identyczny z warunkiem (5.55), natomiast warunek (6.42) jest identyczny z warunkiem (5.56). Na podstawie Lematu 5.15

warunki (5.55) i (5.56) są równoważne, więc warunki (6.41) i (6.42) są równoważne. □

Lemat 6.10
Jeśli

(i) $k_n \to k,\ k > 0\ , l_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}(t,u)$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,1), \ldots, \bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności jednorodnego regularnego wielostanowego systemu równolego-szeregowego określoną przez (4.26)-(4.27),

(iv) $a_n(u) > 0, b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

to

$$\bar{\mathfrak{R}}(t,\cdot) = [1, \bar{\mathfrak{R}}(t,1),..., \bar{\mathfrak{R}}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \bar{\mathfrak{R}}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}(u)},\ u = 1,2,...,z, \quad (6.43)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}[F(a_n(u)t + b_n(u),u)]^{l_n} = \mathfrak{I}_0(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{I}_0(u)},\ u = 1,2,...,z, \quad (6.44)$$

gdzie $\mathfrak{I}_0(t,u)$ jest niezdegenerowaną dystrybuantą i ponadto

$$\bar{\mathfrak{R}}(t,u) = [1 - \mathfrak{I}_0(t,u)]^k \text{ dla } t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,...,z. \quad (6.45)$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(iv) Lematu 6.10 są takie same jak założenia (i)-(iv) Lematu 5.16 i ponadto warunek (6.43) jest identyczny z warunkiem (5.57), natomiast warunek (6.44) jest identyczny z warunkiem (5.58). Na podstawie Lematu 5.16 warunki (5.57) i (5.58) są równoważne, więc warunki (6.43) i (6.44) są równoważne i ponadto wobec (5.59) równość (6.45) zachodzi. □

Lemat 6.9, Lemat 6.10 oraz Twierdzenie 5.7 z Rozdziału 5 pozwalają sformułować twierdzenie ustalające możliwe graniczne funkcje niezawodności wielostanowego jednorodnego systemu równoległo-szeregowego.

Twierdzenie 6.7
Klasa granicznych funkcji niezawodności jednorodnego regularnego wielostanowego systemu równoległo-szeregowego składa się z $3^z + 4^z + 3^z$ funkcji niezawodności postaci

$$\overline{\mathfrak{R}}(t\,,\cdot) = [1,\ \overline{\mathfrak{R}}(t,1),\ldots,\ \overline{\mathfrak{R}}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.46}$$

gdzie

Przypadek 1. $k_n = n,\ \left| l_n - c\log n \right| >> s,\ s > 0,\ c > 0$ (przy Założeniu 5.1).

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,u) \in \{\ \overline{\mathfrak{R}}_1(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_2(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_3(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.47}$$

oraz $\overline{\mathfrak{R}}_i(t),\ i = 1,2,3$, określone są wzorami (5.60)-(5.62),

Przypadek 2. $k_n = n,\ l_n - c\log n \sim s,\ s \in (-\infty,\infty),\ c > 0$.

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,u) \in \{\ \overline{\mathfrak{R}}_4(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_5(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_6(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_7(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.48}$$

oraz $\overline{\mathfrak{R}}_i(t),\ i = 4,5,6,7$, określone są wzorami (5.63)-(5.66),

Przypadek 3. $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$.

$$\overline{\mathfrak{R}}(t,u) \in \{\ \overline{\mathfrak{R}}_8(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_9(t),\ \overline{\mathfrak{R}}_{10}(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.49}$$

oraz $\overline{\mathfrak{R}}_i(t),\ i = 8,9,10$, określone są wzorami (5.67)-(5.69).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, składowa $\overline{\mathfrak{R}}(t,u)$ wektora $\overline{\mathfrak{R}}(t\,,\cdot)$ określonego wzorem (6.46), wobec Twierdzenia 5.7, będącego konsekwencją Lematu 5.15 oraz Lematu 5.16, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.60)-(5.62) lub jednego z czterech typów określonych wzorami (5.63)-(5.66), lub jednego z trzech typów określonych wzorami (5.67)-(5.69). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbiorów 3-elementowych określonych przez (6.47) i (6.49) oraz zbioru 4-elementowego określonego przez (6.48), tzn. $3^z + 4^z + 3^z$ i są one postaci (6.46). □

Podczas znajdowania granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych regularnych systemów równoległo-szeregowych posługujemy się następującymi rozszerzeniami odpowiednio Lematu 5.19 oraz Lematu 5.20

Lemat 6.11
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}'(t,u) = \exp[-\bar{V}'(t,u)]$, $u = 1,2,...,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,1), ..., \bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (4.37)-(4.39),

(iv) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,...,z$,

(v) $F(t,u)$ dla każdego ustalonego u, jest jedną z dystrybuant $F^{(1)}(t,u)$, $F^{(2)}(t,u),..., F^{(a)}(t,u)$ określonych przez (4.39) taką, że

(vi) $\exists\, N(u)\ \forall\, n > N(u)\ F(a_n(u)t + b_n(u),u) = 0$ dla $t < t_0(u)$,

$$F(a_n(u)t + b_n(u),u) \neq 0 \text{ dla } t \geq t_0(u),$$

gdzie $t_0(u) \in \langle -\infty,\infty)$,

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{(i)}(a_n(u)t + b_n(u),u)}{F(a_n(u)t + b_n(u),u)} \leq 1$ dla $t \geq t_0(u)$, $i = 1,2,...,a$, $u = 1,2,...,z$,

i ponadto istnieją niemalejące funkcje

$$\text{(viii)}\quad \bar{d}(t,u) = \begin{cases} 0 & dla\ t < t_o(u) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{a} q_i\, \bar{d}_i(a_n(u)t + b_n(u),u) & dla\ t \geq t_o(u), \end{cases} \tag{6.50}$$

gdzie

$$\bar{d}_i(a_n(u)t + b_n(u),u) = \left[\frac{F^{(i)}(a_n(u)t + b_n(u),u)}{F(a_n(u)t + b_n(u),u)}\right]^{l_n},$$

to

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,\cdot) = [1,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,1),\ldots,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \bar{\mathfrak{R}}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \quad (6.51)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n (F(a_n(u)t + b_n(u),u))^{l_n}\, \bar{d}(t,u) = \bar{V}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\bar{V}'(u)}, \quad (6.52)$$

$u = 1,2,\ldots,z$.

Uzasadnienie: Ponieważ dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)–(viii) Lematu 6.11 są identyczne z założeniami (i)–(viii) Lematu 5.19 oraz warunek (6.51) jest identyczny z warunkiem (5.71), natomiast warunek (6.52) jest identyczny z warunkiem (5.72), które na podstawie Lematu 5.19 są równoważne, więc Lemat 6.11 jest prawdziwy. □

Lemat 6.12
Jeśli

(i) $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}'(t,u)$, $u = 1,2,\ldots,z$, jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1,\ \bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,1),\ldots,\ \bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,z)]$, $t \in (-\infty,\infty)$, jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego wielostanowego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (4.37)-(4.39),

(iv) $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$, $u = 1,2,\ldots,z$,

(v) $F(t,u)$ dla każdego ustalonego u, jest jedną z dystrybuant $F^{(1)}(t,u)$, $F^{(2)}(t,u),\ldots,F^{(a)}(t,u)$ określonych przez (4.39) taką, że

(vi) $\exists\, N(u)\ \forall\, n > N(u)\ F(a_n(u)t + b_n(u),u) = 0$ dla $t < t_0(u)$,

$$F(a_n(u)t + b_n(u),u) \neq 0 \text{ dla } t \geq t_0(u),$$

gdzie $t_0(u) \in <-\infty,\infty)$,

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{(i)}(a_n(u)t+b_n(u),u)}{F(a_n(u)t+b_n(u),u)} \leq 1$ dla $t \geq t_0(u)$, $i = 1,2,\ldots,a$, $u = 1,2,\ldots,z$,

i ponadto istnieją niemalejące funkcje

$$\text{(viii)} \quad \bar{d}_i\,(t,u) = \begin{cases} 0 & dla\ t < t_o(u) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \bar{d}_i(a_n(u)t+b_n(u),u) & dla\ t \geq t_o(u), \end{cases} \tag{6.53}$$

gdzie

$$\bar{d}_i(a_n(u)t+b_n(u),u) = [\frac{F^{(i)}(a_n(u)t+b_n(u),u)}{F(a_n(u)t+b_n(u),u)}]^{l_n},$$

to

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,\cdot) = [1,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,1),\ldots,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną wielostanową funkcją niezawodności, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}'_{k_n,l_n}(a_n(u)t + b_n(u),u) = \bar{\mathfrak{R}}'(t,u) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.54}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}[F(a_n(u)t+b_n(u),u)]^{l_n} = \mathfrak{I}_0(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{I}_0(u)},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.55}$$

gdzie $\mathfrak{I}_0(t,u)$ jest niezdegenerowaną dystrybuantą i ponadto

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,u) = \prod_{i=1}^{a}[1 - d_i(t,u)\ \mathfrak{I}_0(t,u)]^{q_{ik}},\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\ldots,z. \tag{6.56}$$

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,\ldots,z$, założenia (i)-(viii) Lematu 6.12 są takie same jak założenia (i)-(viii) Lematu 5.20 i ponadto warunek (6.54) jest identyczny z warunkiem (5.74), natomiast warunek (6.55) jest identyczny z warunkiem (5.75). Na podstawie Lematu 5.20 warunki (5.74) i (5.75) są równoważne, więc warunki (6.54) i (6.55) są równoważne i ponadto wobec (5.76) równość (6.56) zachodzi. □

Zastosowanie Lematu 6.11, Lematu 6.12 oraz Twierdzenia 5.8 z Rozdziału 5, pozwala ustalić klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności dla niejednorodnych regularnych systemów równoległo-szeregowych wyszczególnionych w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 6.8
Klasa granicznych funkcji niezawodności niejednorodnego regularnego wielostanowego systemu równoległo-szeregowego składa się z $3^z + 4^z + 3^z$ funkcji postaci

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,\cdot) = [1,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,1),\ldots,\ \bar{\mathfrak{R}}'(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty), \tag{6.57}$$

gdzie

Przypadek 1. $k_n = n$, $|l_n - c \log n| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1 i założeniach Lematu 6.11).

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,u) \in \{\ \bar{\mathfrak{R}}'_1(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_2(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_3(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.58}$$

oraz $\bar{\mathfrak{R}}'_i(t)$, $i = 1,2,3$, są określone wzorami (5.77)-(5.79) z $\bar{d}(t) = \bar{d}(t,u)$, $u = 1,2,\ldots z$, gdzie $\bar{d}(t,u)$ określone jest przez (6.50),

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \sim s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$ (przy założeniach Lematu 6.11).

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,u) \in \{\ \bar{\mathfrak{R}}'_4(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_5(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_6(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_7(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.59}$$

oraz $\bar{\mathfrak{R}}'_i(t)$, $i = 4,5,6,7$, są określone wzorami (5.80)-(5.83) z $\bar{d}(t) = \bar{d}(t,u)$, $u = 1,2,\ldots z$, gdzie $\bar{d}(t,u)$ określone jest przez (6.50),

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$ (przy założeniach Lematu 6.12).

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t,u) \in \{\ \bar{\mathfrak{R}}'_8(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_9(t),\ \bar{\mathfrak{R}}'_{10}(t)\},\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{6.60}$$

oraz $\bar{\mathfrak{R}}'_i(t)$, $i = 8,9,10$, są określone wzorami (5.84)-(5.86) z $\bar{d}_i(t) = \bar{d}_i(t,u)$, $u = 1,2,\ldots z$, gdzie $\bar{d}_i(t,u)$ określone jest przez (6.53).

Uzasadnienie: Dla każdego ustalonego u, $u = 1,2,...,z$, składowa $\overline{\mathfrak{R}}'(t,u)$ wektora $\overline{\mathfrak{R}}'(t,\cdot)$ określonego wzorem (6.57), wobec Twierdzenia 5.8, będącego konsekwencją Lematu 5.19 oraz Lematu 5.20, może być funkcją niezawodności jednego z trzech typów określonych wzorami (5.77)-(5.79) albo jednego z czterech typów określonych wzorami (5.80)-(5.83) z $\overline{d}(t) = \overline{d}(t,u)$, gdzie $\overline{d}(t,u)$ określone jest przez (6.50), albo jednego z trzech typów określonych wzorami (5.84)-(5.86) z $\overline{d}_i(t) = \overline{d}_i(t,u)$, gdzie $\overline{d}_i(t,u)$ określone jest przez (6.53). Zatem różnych granicznych wielostanowych funkcji niezawodności rozważanego systemu jest tyle, ile jest wariacji z-wyrazowych zbiorów 3-elementowych określonych przez (6.58) i (6.60) oraz zbioru 4-elementowego określonego przez (6.59), tzn. $3^z + 4^z + 3^z$ i są one postaci (6.57). □

Krzysztof Kołowrocki

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Książka zawiera opis metod oraz wyniki badań niezawodności dużych systemów.

Rozważane są nieodnawialne systemy dwustanowe oraz systemy wielostanowe ze starzejącymi się elementami uszkadzającymi się niezależnie.

Ustalone zostały klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności dla dwu i wielostanowych jednorodnych i niejednorodnych systemów szeregowych, równoległych, szeregowo-równoległych i równoległo-szeregowych. Problem wyznaczania granicznych funkcji niezawodności dla tych systemów został rozwiązany całościowo przy dowolnych funkcjach niezawodności ich elementów.

Przytoczone zostały przykłady zastosowań wyników do oceny niezawodności modelowych dużych systemów dwustanowych. Wyniki dotyczące systemów wielostanowych zastosowane zostały do oszacowania charakterystyk niezawodnościowych dużych systemów transportu portowego i stoczniowego.

Sformułowane zostały problemy otwarte oraz wytyczona została perspektywa dalszych badań nad metodami oceny i optymalizacji niezawodności dużych systemów.

Monografia przeznaczona jest dla czytelników zainteresowanych badaniami niezawodności oraz bezpieczeństwa eksploatacji dużych systemów technicznych na etapach ich projektowania i eksploatacji.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-58-8

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl