POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY
Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 29

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

wyd. wiure - 20.11

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk
Prof. dr hab. inż. Franciszek Milkiewicz

ISBN 83-85847-69-3
ISSN 0208-8029

3. RÓWNANIA I UKŁADY RÓWNAŃ ROZMYTYCH

3.1 Wprowadzenie

Rozdział ten poświęcony jest głównie równaniom i układom równań rozmytych. Dyskutuje się w nim głównie zależności pomiędzy rozmytym jawnym i niejawnym rozwiązaniem układów równań liniowych z rozmytymi współczynnikami. Przypomina się niezbędne podstawy z zakresu teorii zbiorów rozmytych, arytmetyki przedziałów liczbowych oraz arytmetyki liczb rozmytych.

Zagadnienie szeregowania czynników z wykorzystaniem metody porównywania parami z danymi rozmytymi sprowadza się w większości przypadków do rozwiązania odpowiedniego układu równań liniowych z rozmytymi współczynnikami. Równania te z kolei są rozwiązywane z wykorzystaniem arytmetyki liczb rozmytych lub arytmetyki przedziałów liczbowych dla wybranej liczby wcześniej zdefiniowanych α-przekrojów liczb rozmytych. W efekcie otrzymuje się układ lub zbiór układów równań z ostrymi współczynnikami, które rozwiązuje się za pomocą jednego z dostępnych algorytmów do rozwiązywania ostrych układów równań.

W rozważanym zagadnieniu stosowana jest arytmetyka przedziałowa wprowadzona przez Moore'a (1966, 1979), arytmetyka liczb rozmytych oparta o ich reprezentację parametryczną zaproponowana przez Dubois i Prade'a (1978, 1979, 1980, 1987, 1998), arytmetyka w reprezentacji van Laarhovena i Pedrycza (1983), czy też podejście Kauffmanna i Gupta'y (1985). Na uwagę zasługuje również koncepcja Chanasa (1988).

W zakresie rozwiązywania równań z rozmytymi współczynnikami istotne znaczenie posiadają prace Buckley'a i Qu (1990a, 1990b, 1991a) oraz Buckley'a (1992a, 1992b). Prezentują one głównie metody oparte na koncepcji α-przekroju i arytmetyki przedziałów liczbowych.

Z punktu widzenia rozważanego zagadnienia układu równań z rozmytymi parametrami istotne wydają się prace podejmowane przez Buckley'a i Qu (1991a, 1991b) oraz Dubois i Prade'a (1980). Większość przedstawionych podejść w tym zakresie jest bardzo trudna w realizacji praktycznej albo sprowadza zagadnienie rozmyte do postaci nie posiadającej rozwiązania.

Z przeprowadzonej analizy, dotyczącej szeregowania czynników z danymi ostrymi wynika, że jedyną metodą aproksymacji, którą można zastosować w rozważanym przypadku jest metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów. Jej rozmyte rozwinięcie może być oparte o układ równań normalnych (Laarhoven i Pedrycz 1983). Wtedy rozwiązanie problemu sprowadza się do znalezienia rozmytego rozwiązania układu równań liniowych z rozmytym wektorem prawych stron. Proponowane dotychczas metody rozwiązania zagadnienia (Laarhoven i Pedrycz 1983; Boender i inni 1985, 1989) często dawały nieprawidłowe wyniki (Kwiesielewicz 1998). Opierały się one na przekształceniu rozmytej wersji układu równań normalnych do postaci układu równań ostrych w oparciu o parametryczną reprezentację liczb rozmytych i ich arytmetykę.

W niniejszym rozdziale dyskutuje się i porównuje dwa podejścia do rozwiązania układu równań liniowych z rozmytym wektorem prawych stron. Pierwsze zwane niejawnym, zastosowane przez Laarhovena i Pedrycza (1982, 1983), sprowadza się do wykorzystania arytmetyki liczb rozmytych w celu przekształcenia go do układu równań liniowych z ostrymi współczynnikami. Drugie natomiast, zwane jawnym (Kwiesielewicz 1993b, 1995b) i bliższe intuicyjnie analizie przedziałowej, bezpośrednio wykorzystuje arytmetykę liczb rozmytych.

Wykorzystuje się tutaj niezbędne elementy teorii zbiorów rozmytych oraz analizy przedziałowej i arytmetyki liczb rozmytych.

3.2 Analiza przedziałowa

Przedział liczbowy $\bar{a}$ można wyrazić jako:

$$\bar{a} = [l_a, u_a],$$

gdzie l_a oraz u_a są odpowiednio lewym i prawym końcem tego przedziału liczbowego. Oczywiście powinien być spełniony warunek:

$$l_a \leq u_a. \tag{3.1}$$

Warto zwrócić uwagę, że dla $l_a = u_a = a$ otrzymujemy liczbę rzeczywistą, którą w notacji przedziałowej można przestawić jako: $\bar{a} = [a, a]$.

Arytmetyka przedziałów liczbowych została wprowadzona przez Moore'a (1966, 1979) do celów obliczeń związanych z propagacją błędu w trakcie komputerowej realizacji algorytmów numerycznych.

Jeśli znak „*" będzie oznaczał jeden z symboli „+", „−", „·", „/", to odpowiednie operacje liczbowe na przedziałach $\bar{a}$ oraz $\bar{b}$ można zdefiniować jako (Moore 1966):

$$\bar{a} * \bar{b} = [l_a, u_a] * [l_b, u_b] = \{x * y,\ x, y \in \Re;\ l_a \le u_a, l_b \le u_b\}, \tag{3.2}$$

zastrzegając przy tym, że nie możemy zdefiniować $\bar{a} / \bar{b}$ jeśli $0 \in [l_b, u_b]$.

Równoważny zbiór odpowiednich definicji można przedstawić następująco (Moore 1966):

Dodawanie

$$\bar{a} + \bar{b} = [l_a, u_a] + [l_b, u_b] = [l_a + l_b, u_a + u_b], \tag{3.3}$$

Odejmowanie

$$\bar{a} - \bar{b} = [l_a, u_a] - [l_b, u_b] = [l_a - u_b, u_a - l_b], \tag{3.4}$$

Mnożenie

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= [l_a, u_a] \cdot [l_b, u_b] = \\ &= [\min(l_a l_b, l_a u_b, u_a l_b, u_a u_b), \max(l_a l_b, l_a u_b, u_a l_b, u_a u_b)], \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dzielenie (dla $0 \notin [l_b, u_b]$)

$$\bar{a} / \bar{b} = [l_a, u_a] / [l_b, u_b] = [l_a / u_b, u_a / l_b]. \tag{3.6}$$

Dodawanie i mnożenie przedziałów liczbowych jest łączne i przemienne oraz posiada własności półgrupy przemiennej. Stąd prawo rozdzielności operacji mnożenia przedziałów liczbowych względem dodawania w przypadku ogólnym nie zachodzi. Spełnione są natomiast własności przedstawione w poniższym twierdzeniu (Moore 1966).

Twierdzenie 3.1

(i) *Dla dowolnych przedziałów liczbowych $\bar{a}$, $\bar{b}$ i $\bar{c}$ zachodzi własność słabej rozdzielności (ang. weak distributivity) lub podrozdzielności (ang. subdistributivity).*

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) \subset \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}. \tag{3.7}$$

(ii) *Jeśli $\bar{a} = [a, a]$ ($\bar{a}$ jest liczbą rzeczywistą), to*

$$\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} . \tag{3.8}$$

(iii) *Jeśli przedziały $\overline{b}$ i $\overline{c}$ całkowicie zawierają się w ujemnej, bądź dodatniej półosi liczb rzeczywistych: $\overline{a} \cdot \overline{b} > 0$, wówczas*

$$\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} , \tag{3.9}$$

przy czym $\overline{a} < \overline{b} \Leftrightarrow l_b < u_a$.

Zachodzi również następujące twierdzenie (Moore 1966):

Twierdzenie 3.2

Arytmetyka przedziałowa jest monotoniczna w sensie zawierania się przedziałów liczbowych, tzn. jeśli $\overline{a} \subset \overline{c}$ i $\overline{b} \subset \overline{d}$ oraz $0 \notin \overline{d}$, to zachodzą następujące zależności:

(i) $\overline{a} + \overline{b} \subset \overline{c} + \overline{d}$, (3.10)

(ii) $\overline{a} - \overline{b} \subset \overline{c} - \overline{d}$, (3.11)

(iii) $\overline{a} \cdot \overline{b} \subset \overline{c} \cdot \overline{d}$, (3.12)

(iv) $\overline{a} / \overline{b} \subset \overline{c} / \overline{d}$. (3.13)

Uwaga. Warunek związany z nie zawieraniem zera przez przedział liczbowy w przypadku operacji dzielenia może być pominięty przy zastosowaniu tzw. rozszerzonej arytmetyki przedziałowej (*ang. extended interval arithmetic*) (Hansen 1992).

3.3 Arytmetyka liczb rozmytych i równania rozmyte

3.3.1 Wybrane własności zbiorów rozmytych

Przypomnijmy podstawowe definicje związane z teorią zbiorów rozmytych (Zadeh 1965).

Definicja 3.1 *Zbiór rozmyty A jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}, \mu_A\left(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\right) \geq \min\left(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right). \tag{3.14}$$

Definicja 3.2 *Zbiór rozmyty A jest znormalizowany wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1 . \tag{3.15}$$

Definicja 3.3 *Suma* $A \cup B$ *oraz przecięcie* $A \cap B$ *zbiorów rozmytych A i B są zdefiniowane odpowiednio jako:*

$$\forall x \in \boldsymbol{X},\ \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

oraz

$$\forall x \in \boldsymbol{X},\ \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Zdefiniujmy zawieranie się zbioru rozmytego *A* w zbiorze rozmytym *B*.

Definicja 3.4 *Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B, co zapisujemy* $A \subset B$ *wtedy, gdy:*

$$\forall x \in \boldsymbol{X},\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Własność 3.1 *Jeśli A, B ,C ,D są znormalizowanymi i wypukłymi zbiorami rozmytymi, takimi że* $A \subset B$ *i* $C \subset D$ *, wówczas:*

$$A \cap C \subset B \cap D .$$

Własność ta wynika bezpośrednio z definicji przecięcia zbiorów rozmytych (Def. 3.3).

Definicja 3.5 *Nośnikiem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór nierozmyty:*

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X}, \mu_A(x) \geq 0\}. \tag{3.16}$$

Definicja 3.6 *Dla* $\alpha \in [0,1]$ *α-poziomem zbioru rozmytego A nazywamy następujący zbiór nierozmyty:*

$$A_\alpha = \{x \in \boldsymbol{X}, \mu_A(x) \geq \alpha\}, \tag{3.17}$$

gdzie:

$$\mu_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1, \text{ gdy } x\in A_\alpha \\ 0, \text{ gdy } x\notin A_\alpha\end{cases}. \tag{3.18}$$

Często α-poziom definiowany jest oddzielnie dla $\alpha=0$, np. (Buckley i Qu 1990b) jako domknięcie nośnika, w przypadku kiedy jest on ograniczony. Ma to istotne znaczenie w przypadku operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych z wykorzystaniem α-poziomów i analizy przedziałowej.

Każdy zbiór rozmyty A może być wyrażony jako suma α-poziomów:

$$A=\sum_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha . \tag{3.19}$$

gdzie αA_α jest zbiorem rozmytym z funkcją charakterystyczną:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x)=\begin{cases}\alpha, \text{ gdy } x\in A_\alpha \\ 0, \text{ gdy } x\notin A_\alpha\end{cases}. \tag{3.20}$$

3.3.2 Liczby rozmyte i arytmetyka liczb rozmytych

Jako liczbę rozmytą przyjmuje się najczęściej wypukły, znormalizowany zbiór rozmyty, określony na zbiorze liczb rzeczywistych. Zakłada się ponadto, że α-poziomy liczby rozmytej są zamkniętymi przedziałami liczbowymi. Liczba rozmyta jest wypukła, jeśli jej wszystkie α-poziomy są wypukłe.

Operacje na liczbach rozmytych mogą być wyprowadzane w oparciu o zasadę rozszerzania Zadeha (1975):

$$\mu_{\tilde{m}*\tilde{n}}(z)=\sup_{z=x*y}\min(\mu_{\tilde{m}}(x),\mu_{\tilde{n}}(y)); \quad (x,y,z)\in\Re^3 . \tag{3.21}$$

Jeśli jako $\tilde{m}$ oraz $\tilde{n}$ oznaczymy liczby rozmyte, wówczas wykorzystując zasadę rozszerzania, możemy przykładowo zapisać:

$$\mu_{-\tilde{n}}(z)=\sup_{z=-x}\min(\mu_{\tilde{n}}(x)); \quad (x,z)\in\Re^2 . \tag{3.22}$$

$$\mu_{\tilde{m}+\tilde{n}}(z)=\sup_{z=x+y}\min(\mu_{\tilde{m}}(x),\mu_{\tilde{n}}(y)); \quad (x,y,z)\in\Re^3, \tag{3.23}$$

$$\mu_{\tilde{m}\cdot\tilde{n}}(z)=\sup_{z=x\cdot y}\min(\mu_{\tilde{m}}(x),\mu_{\tilde{n}}(y)); \quad (x,y,z)\in\Re^3. \tag{3.24}$$

Własność 3.2 *Dodawanie i odejmowanie liczb rozmytych posiada własność monotonicznego zawierania co oznacza, że dla liczb rozmytych* $\tilde{m}$, $\tilde{n}$, $\tilde{p}$ *oraz* $\tilde{q}$ *takich, że* $\tilde{m}\subset\tilde{n}$ *i* $\tilde{p}\subset\tilde{q}$, *otrzymujemy:*

$$\tilde{m}+\tilde{p}\subset\tilde{n}+\tilde{q}$$

oraz:

$$\tilde{m}-\tilde{p}\subset\tilde{n}-\tilde{q}.$$

Dowód wynika z zasady rozszerzania Zadeha oraz własności 3.1.

Twierdzenie 3.3 (Dubois i Prade 1978, 1979)

1. *Dodawanie liczb rozmytych jest przemienne i łączne.*
2. $\tilde{m}-\tilde{n}=\tilde{m}+(-\tilde{n})$ *gdzie* $-\tilde{n}$ *jest liczbą przeciwną do* $\tilde{n}$.
3. *Mnożenie dodatnich liczb rozmytych jest przemienne i łączne. Liczba rozmyta* $\tilde{n}$ *jest dodatnia (ujemna), gdy* $\forall x\le 0\ \mu_{\tilde{n}}(x)=0$ ($\forall x\ge 0\ \mu_{\tilde{n}}(x)=0$).
4. $\tilde{m}\cdot(-\tilde{n})=-(\tilde{m}\cdot\tilde{n})$.
5. $(-\tilde{m})\cdot(-\tilde{n})=(\tilde{m}\cdot\tilde{n})$.

Dowody własności 1-5 można znaleźć w następujących pracach (Dubois i Prade 1978, 1979, 1980, 1988).

Rozdzielność mnożenia względem dodawania

Tak, jak w przypadku przedziałów liczbowych, tak i w przypadku liczb rozmytych nie zachodzi prawo rozdzielności mnożenia liczb rozmytych względem ich dodawania w przypadku ogólnym. Można jednak udowodnić pewne własności szczegółowe związane z tym prawem.

Twierdzenie 3.4

1. *Jeśli liczba rozmyta $\tilde{m}$ jest albo dodatnia (dziedzina jej funkcji przynależności stanowi podzbiór liczb rzeczywistych dodatnich), albo ujemna (dziedzina jej funkcji przynależności stanowi podzbiór liczb rzeczywistych ujemnych) oraz liczby rozmyte $\tilde{n}$ i $\tilde{p}$ są tego samego znaku, to zachodzi następująca zależność:*

$$\tilde{m}\cdot(\tilde{n}+\tilde{p})=(\tilde{m}\cdot\tilde{n})+(\tilde{m}\cdot\tilde{p}). \tag{3.25}$$

2. *Jeśli $\tilde{m}$ jest liczbą rzeczywistą $\tilde{m}=m$, to powyższa zależność zachodzi dla wszystkich par $\tilde{n}$ i $\tilde{p}$:*

$$m\cdot(\tilde{n}+\tilde{p})=(m\cdot\tilde{n})+(m\cdot\tilde{p}). \tag{3.26}$$

3. *W przypadku ogólnym zachodzi własność słabej rozdzielności (ang. weak distributivity):*

$$\tilde{m}\cdot(\tilde{n}+\tilde{p})\subset(\tilde{m}\cdot\tilde{n})+(\tilde{m}\cdot\tilde{p}). \tag{3.27}$$

Aby udowodnić twierdzenia 3.3 oraz 3.4 można wykorzystać definicję 3.6 oraz wyniki uzyskane przez Nguyena dotyczące wykorzystania α-poziomów do operacji na liczbach rozmytych (Nguyen 1978; Dubois i Prade 1978, 1979, 1980, 1988).

3.3.3 Parametryczna reprezentacja liczby rozmytej w notacji typu LR Dubois i Prade

Dubois i Prade (1978) wprowadzili opis parametryczny liczb rozmytych i opierając się o zasadę rozszerzania Zadeha wyprowadzili podstawowe operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych. Funkcja przynależności liczby rozmytej $\tilde{m}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ (liczba typu LR) zdefiniowana jest jako:

$$\mu_{\tilde{m}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & \text{gdy } x\le m, \alpha\ge 0 \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & \text{gdy } x>m, \beta\ge 0 \end{cases}, \tag{3.28}$$

gdzie m nazywamy wartością modalną liczby rozmytej; L oraz R odpowiednio funkcjami odniesienia lewostronną i prawostronną, natomiast α i β odpowiednio lewostronnym i prawostronnym rozrzutem liczby rozmytej.

Zakładając, że lewostronne i prawostronne funkcje odniesienia liczby rozmytej $\tilde{m}$ są takie same, liczbę rozmytą $\tilde{m}$ w postaci parametrycznej można wyrazić jako $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)$. Wówczas podstawowe operacje na liczbach rozmytych można sprowadzić do operacji na ich parametrach.

Dodawanie

$$\tilde{m} + \tilde{n} = (m, \alpha, \beta) + (n, \gamma, \delta) = (m + n, \alpha + \beta, \delta + \delta). \qquad (3.29)$$

Liczba przeciwna

$$-\tilde{n} = -(n, \gamma, \delta) = (-n, \delta, \gamma). \qquad (3.30)$$

Odejmowanie

$$\tilde{m} - \tilde{n} = (m, \alpha, \beta) - (n, \gamma, \delta) = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma). \qquad (3.31)$$

Operację odejmowania można zrealizować również wykorzystując operację dodawania (3.29) i zależność na liczbę przeciwną (3.30) (Twierdzenie 3.3).

Mnożenie liczby rozmytej przez liczbę rzeczywistą

$$\tilde{m} \cdot n = (m, \alpha, \beta) \cdot (n, 0, 0) = (m \cdot n, n\alpha, n\beta) \qquad (3.32)$$

dla n dodatniego oraz

$$\tilde{m} \cdot n = (m, \alpha, \beta) \cdot (n, 0, 0) = (m \cdot n, -n\beta, -n\alpha) \qquad (3.33)$$

dla n ujemnego.

Mnożenie

Dla dwóch dodatnich liczb rozmytych mamy formułę przybliżoną:

$$\tilde{m} \cdot \tilde{n} = (m, \alpha, \beta) \cdot (n, \gamma, \delta) \cong (m \cdot n, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta), \qquad (3.34)$$

która może być stosowana kiedy rozrzuty liczb rozmytych są dużo mniejsze od ich wartości modalnych. Dla przypadku liczb rozmytych o różnych znakach oraz dwóch ujemnych liczb rozmytych można wykorzystać własności operacji mnożenia (Twierdzenie 3.3).

Element odwrotny

Jeśli $\tilde{m}$ jest dodatnią liczbą rozmytą, wówczas jej element odwrotny określony jest zależnością przybliżoną:

$$\tilde{m}^{-1} = (m, \alpha, \beta)^{-1} \cong \left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m^2}, \frac{\alpha}{m^2} \right). \tag{3.35}$$

Dzielenie

Dla dwóch dodatnich liczb rozmytych mamy również formułę przybliżoną:

$$\tilde{m} \div \tilde{n} = (m, \alpha, \beta)/(n, \gamma, \delta) \cong \left(\frac{m}{n}, \frac{m\delta + n\alpha}{n^2}, \frac{m\gamma + n\beta}{n^2} \right). \tag{3.36}$$

W przypadku operacji dodawania (3.29), odejmowania (3.31) i mnożenia przez liczbę rzeczywistą (3.32)-(3.33) zachowywany jest kształt funkcji odniesienia. W przypadku mnożenia i dzielenia liczb rozmytych (3.34)-(3.36) zmienia się zarówno postać lewostronnej, jak i prawostronnej funkcji odniesienia.

Uogólnieniem liczby rozmytej jest przedział rozmyty $\tilde{m} = \left(\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta\right)_{LR}$ (Dubois i Prade 1980, 1988; Dubois 1984) (płaska liczba typu LR), który posiada następującą funkcję przynależności:

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\underline{m} - x}{\alpha}\right), & \text{gdy } x \le \underline{m}, \alpha \ge 0 \\ R\left(\dfrac{x - \overline{m}}{\beta}\right), & \text{gdy } x > \overline{m}, \beta \ge 0 \\ 1, & \text{gdy } \underline{m} < x \le \overline{m}, \underline{m} \le \overline{m} \end{cases} \tag{3.37}$$

Zakładając, że lewostronne i prawostronne funkcje odniesienia przedziału rozmytego $\tilde{m}$ są takie same, przedział ten w postaci parametrycznej można wyrazić jako $\tilde{m} = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$. Warto zauważyć, że liczba rozmyta jest szczególnym przypadkiem przedziału rozmytego dla $\underline{m} = \overline{m}$, a liczba rzeczywista szczególnym przypadkiem liczby rozmytej dla $\alpha = \beta = 0$, natomiast przedział liczbowy jest szczególnym przypadkiem przedziału rozmytego również dla $\alpha = \beta = 0$.

Arytmetyka przedziałów rozmytych stanowi rozwinięcie arytmetyki liczb rozmytych. Szczegóły dotyczące arytmetyki przedziałów rozmytych można znaleźć m. in. w pracach (Dubois i Prade 1980, 1988; Prade 1984).

Szczególnym przypadkiem liczby rozmytej jest liczba rozmyta z trójkątną funkcją przynależności:

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} \dfrac{m-x}{\alpha}, & \text{gdy } x \le m, \alpha \ge 0 \\ \dfrac{x-m}{\beta}, & \text{gdy } x > m, \beta \ge 0 \end{cases}, \tag{3.38}$$

natomiast szczególnym przypadkiem przedziału rozmytego jest przedział rozmyty z trapezoidalną funkcją przynależności:

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} \dfrac{\underline{m}-x}{\alpha\_}, & \text{gdy } x \le \underline{m}, \alpha \ge 0 \\ \dfrac{x-m}{\beta}, & \text{gdy } x > \overline{m}, \beta \ge 0 \\ 1, & \text{gdy } \underline{m} < x \le \overline{m}, \underline{m} \le \overline{m} \end{cases}. \tag{3.39}$$

3.3.4 Parametryczna reprezentacja liczby rozmytej w notacji van Laarhovena i Pedrycza

Jeśli przedział rozmyty ma ograniczony nośnik, wówczas wygodna okazuje się reprezentacja parametryczna $\tilde{m} = \left(l, \underline{m}, \overline{m}, u\right)_{LR}$ z następującą funkcją przynależności:

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\underline{m} - x}{\underline{m} - l}\right), & \text{gdy } x \le \underline{m} \\ R\left(\dfrac{x - \overline{m}}{u - \overline{m}}\right), & \text{gdy } x > \overline{m} \\ 1, & \text{gdy } \underline{m} < x \le \overline{m} \end{cases}, \quad l \le \underline{m} \le \overline{m} \le u, \tag{3.40}$$

gdzie l nazywa się wartością dolną rozmytego przedziału liczbowego, u wartością górną oraz $\underline{m}$ i $\overline{m}$ odpowiednio dolną i górną wartością modalną.

Zakładając, że lewostronne i prawostronne funkcje odniesienia przedziału rozmytego $\tilde{m}$ są takie same, przedział ten w postaci parametrycznej można wyrazić jako $\tilde{m} = \left(l, \underline{m}, \overline{m}, u\right)$.

Warto zwrócić uwagę na następujące fakty:

- Jeśli $\underline{m} = \overline{m}$, to otrzymujemy liczbę rozmytą, co możemy zapisać $\tilde{m} = \left(l, m, u\right)$.
- Jeśli lewostronne i prawostronne funkcje odniesienia są liniowe, to otrzymujemy następujące zależności:

$$l = \underline{m} - \alpha, \tag{3.41}$$

$$u = \overline{m} + \beta. \tag{3.42}$$

Spełniony musi być wówczas warunek uporządkowania parametrów przedziału liczbowego z trapezoidalną funkcją przynależności:

$$l \le \underline{m} \le \overline{m} \le u. \tag{3.43}$$

Przedział liczbowy z trapezoidalną funkcją przynależności sprowadza się do:

1. Liczby rozmytej z trójkątną funkcją przynależności, gdy $\underline{m} = \overline{m}$;
2. Przedziału liczbowego, gdy $l = \underline{m}$ i $\overline{m} = u$;
3. Liczby rzeczywistej, gdy $l = \underline{m} = \overline{m} = u$.

Arytmetyka przedziałów rozmytych z ograniczonym nośnikiem sprowadza się do operacji na ich parametrach. Załóżmy, że mamy dwa przedziały rozmyte $\tilde{m} = \left(l_m, \underline{m}, \overline{m}, u_m\right)$ i $\tilde{n} = \left(l_n, \underline{n}, \overline{n}, u_n\right)$.

Dodawanie

$$\begin{aligned} \tilde{m} + \tilde{n} &= \left(l_m, \underline{m}, \overline{m}, u_m\right) + \left(l_n, \underline{n}, \overline{n}, u_n\right) = \\ &= \left(l_m + l_n, \underline{m} + \underline{n}, \overline{m} + \overline{n}, u_m + u_n\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Element przeciwny

$$-\tilde{m} = -\left(l_m, \underline{m}, \overline{m}, u_m\right) = \left(-u_m, -\overline{m}, -\underline{m}, -l_m\right). \tag{3.45}$$

Mnożenie przez liczbę rzeczywistą

$$\tilde{m} \cdot n = \left(nl_m, n\underline{m}, n\overline{m}, nu_m\right), \tag{3.46}$$

dla n dodatniego oraz

$$\tilde{m} \cdot n = \left(nu_m, n\overline{m}, n\underline{m}, nl_m\right), \tag{3.47}$$

dla n ujemnego.

Mnożenie dodatnich przedziałów rozmytych

$$\tilde{m} \cdot \tilde{n} = \left(l_m, \underline{m}, \overline{m}, u_m\right) \cdot \left(l_n, \underline{n}, \overline{n}, u_n\right) = \left(l_m \cdot l_n, \underline{m} \cdot \underline{n}, \overline{m} \cdot \overline{n}, u_m \cdot u_n\right). \tag{3.48}$$

Dzielenie dodatnich przedziałów rozmytych

$$\begin{aligned}\tilde{m}/\tilde{n} &= \left(l_m, \underline{m}, \overline{m}, u_m\right)/\left(l_n, \underline{n}, \overline{n}, u_n\right) = \\ &= \left(l_m / u_n, \underline{m}/\overline{n}, \overline{m}/\underline{n}, u_m / l_n\right)\end{aligned} \tag{3.49}$$

Wszystkie operacje algebraiczne na ograniczonych przedziałach rozmytych dają dokładne wartości parametrów liczb rozmytych. Nie jest zachowany jednak kształt funkcji przynależności dla operacji mnożenia oraz dzielenia.

Warto zwrócić uwagę, że wszystkie operacie na ograniczonych przedziałach liczbowych dają się zdekomponować na operację na ich nośnikach (przedziały liczbowe) oraz operację na wartościach modalnych (liczby rzeczywiste).

3.3.5 Liczba rozmyta w postaci sumy α-przekrojów

Mimo, iż przedstawione wcześniej podstawowe operacje na liczbach rozmytych sprowadzają się do operacji arytmetycznych na ich parametrach, co staje się bardzo atrakcyjne z punktu widzenia ich realizacji numerycznej, niedogodnym pozostaje fakt, że dla niektórych operacji korzysta się z formuł przybliżonych. Alternatywnym rozwiązaniem jest dekompozycja liczb rozmytych na skończoną liczbę α-przekrojów, wykonanie operacji na nich z wykorzystaniem arytmetyki przedziałów liczbowych oraz ponowne złożenie wyniku. Na tego typu procedurę pozwala twierdzenie udowodnione przez Nguyena (1978).

Twierdzenie 3.5.
Jeśli liczby rozmyte $\tilde{m}, \tilde{n}$ posiadają domknięte i ograniczone α-poziomy oraz funkcja $f : \Re \times \Re \to \Re$ jest ciągła, wówczas $\left[f\left(\tilde{m}, \tilde{n}\right)\right]_\alpha = f\left(\tilde{m}_\alpha, \tilde{n}_\alpha\right), \forall \alpha \in [0,1]$, gdzie $\tilde{m}_\alpha$ i $\tilde{n}_\alpha$ są α-poziomami odpowiednio liczby rozmytej $\tilde{m}$ i $\tilde{n}$.

Wykorzystując powyższe twierdzenie można również obliczenia dla funkcji dowolnej funkcji ciągłej.

Wykorzystując notację Laarhovena i Pedrycza rozmyte wartości funkcji logarytmicznej oraz wykładniczej zdefiniowane są następująco:

Funkcja logarytmiczna

$$\ln(l_m, m, u_m) = (\ln(l_m), \ln(m), \ln(u_m)); \tag{3.50}$$

Funkcja wykładnicza

$$\exp(l_m, m, u_m) = (\exp(l_m), \exp(m), \exp(u_m)). \tag{3.51}$$

Kuffmann i Gupta (1985) definiują liczbę rozmytą jako sumę przedziałów ufności dla różnych poziomów ufności z przedziału [0,1], a następnie wszystkie operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych wykonują w oparciu o analizę przedziałową. Wartości krańców przedziałów można przy takim podejściu wyrazić jako ostre funkcje α-poziomu. Szczegóły dotyczące takiego podejścia można znaleźć w pracach zespołu Buckley'a, np.: (Buckley i Qu 1990b, 1991a, b). Podobne podejście do Kauffmanna i Gupty można znaleźć w pracach Chanasa, np.: (Chanas 1988).

3.3.6 Równania rozmyte

Załóżmy, że mamy następujące równanie:

$$a + x = b, \tag{3.52}$$

gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi, natomiast x szukaną liczbą rzeczywistą. Rozmycia równania (3.52), w zależności od interpretacji, można dokonać na dwa sposoby, a mianowicie (Kwiesielewicz 1993b, 1995):

$$\tilde{a} + \tilde{x}^{imp} = \tilde{b} \tag{3.53}$$

lub

$$\tilde{x}^{exp} = \tilde{b} - \tilde{a}, \tag{3.54}$$

gdzie $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ są danymi liczbami rozmytymi, natomiast $\tilde{x}^{imp}$ i $\tilde{x}^{exp}$ są odpowiednio niejawnym i jawnym rozwiązaniem rozmytej wersji równania (3.52).

Rozwiązanie jawne istnieje zawsze. Istnienie rozwiązania niejawnego uzależnione jest od wartości parametrów liczb rozmytych $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$. $\tilde{x}^{imp}$ w równaniu (3.53) powinno tak kompensować rozmycie $\tilde{a}$, aby "dopasować" lewą stronę do $\tilde{b}$. Z kolei rozwiązanie równania (3.54) może być interpretowane jako wynik propagacji błędu podczas obliczeń. Z tego punktu widzenia rozwiązanie jawne jest zgodne intuicyjnie z analizą przedziałową (Moore 1966).

Zakładając, że $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ są liczbami rozmytymi w notacji Dubois i Prade'a (1978), równania rozmyte (3.53)-(3.54) można przedstawić jako:

$$(a,\alpha_a,\beta_a)+(x^{imp},\alpha_x^{imp},\beta_x^{imp})=(b,\alpha_b,\beta_b) \tag{3.55}$$

oraz

$$(x^{exp},\alpha_x^{exp},\beta_x^{exp})=(b,\alpha_b,\beta_b)-(a,\alpha_a,\beta_a). \tag{3.56}$$

Stosując zależności (3.29), (3.31) otrzymamy odpowiednio:

- dla rozwiązania niejawnego:

$$a+x^{imp}=b,\ \alpha_a+\alpha_x^{imp}=\alpha_b,\ \beta_a+\beta_x^{imp}=\beta_b$$

- oraz dla rozwiązania jawnego:

$$x^{exp}=b-a,\ \alpha_x^{exp}=\alpha_b-\beta_a,\ \beta_x^{exp}=\beta_b-\alpha_a\ .$$

Jest faktem oczywistym, że wartości modalne obydwu rozwiązań są sobie równe: $x^{imp}=x^{exp}$. Warunkiem istnienia rozwiązania niejawnego jest spełnienie następujących zależności:

$$\alpha_x^{imp}=\alpha_b-\alpha_a\geq 0,\ \beta_x^{imp}=\beta_b-\beta_a\geq 0.$$

3.4 Układy równań liniowych z rozmytymi współczynnikami

3.4.1 Wprowadzenie

Załóżmy, że mamy układ równań liniowych ze współczynnikami rzeczywistymi:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3.57}$$

gdzie **A** jest daną nieosobliwą macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, **b** jest danym wektorem prawych stron o wymiarze n, natomiast **x** wektorem o wymiarze n, który należy obliczyć.

Jeżeli założymy, że wektor prawych stron posiada elementy w postaci liczb rozmytych i poszukujemy rozwiązania również w postaci liczb rozmytych, to układ równań (3.57) można zapisać jako:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{3.58}$$

gdzie:

$$\tilde{x}_i = (x_i, \alpha_i, \beta_i),\ i = 1,2,\ldots,n,$$
$$\tilde{b}_i = (b_i, \delta_i, \gamma_i),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

W dalszej części pracy wektor, którego elementami są liczby rozmyte, będzie nazywany krótko wektorem rozmytym.

3.4.2 Rozwiązania jawne i niejawne układu równań rozmytych

Można sformułować następujące twierdzenie (Kwiesielewicz 1993b, 1995):

Twierdzenie 3.6. *Dla dowolnych rzeczywistych macierzy kwadratowych* **C** *i* **B** *o wymiarach* $n \times n$ *oraz wektora rozmytego* $\tilde{\mathbf{x}}$ *wymiaru* n *zachodzi następująca zależność:*

$$(\mathbf{C}\mathbf{B})\tilde{\mathbf{x}} \subset (\mathbf{C}(\mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}})).$$

Dowód można znaleźć w pracach (Kwiesielewicz 1993b, 1995). Wynika on z własności rozdzielności mnożenia względem dodawania liczb rozmytych.

Wniosek 3.1. *Podstawiając* $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ *i* $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ *do układu równań rozmytych* (3.57), *otrzymujemy*

$$\tilde{\mathbf{x}} \subset \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}\,. \tag{3.59}$$

gdzie $\mathbf{A}^{-1}$ *jest macierzą odwrotną do macierzy* $\mathbf{A}$.

Operacje arytmetyczne na wartościach modalnych sprowadzają się do operacji na liczbach rzeczywistych, skąd:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \subset \tilde{\mathbf{x}}\,. \tag{3.60}$$

W efekcie otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \subset \tilde{\mathbf{x}} \subset \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{x}}^{*}, \tag{3.61}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{x}}^{*} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$ może być rozumiane jako górne przybliżenie rozwiązania niejawnego rozmytej wersji (3.58) układu równań (3.57), jak również jako rozwiązanie jawne rozmytej wersji układu równań (3.57).

Koncepcja rozwiązania jawnego została wykorzystana w pracy (Kwiesielewicz i Stolc 1989) do obliczeń postoptymalizacyjnych w procedurze rozwiązywania zagadnienia rozmytego programowania liniowego.

Dokonajmy porównania obydwu rozwiązań. Wprowadźmy następującą notację:

$$\tilde{x}_i = (x_i, \alpha_i, \beta_i),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\tilde{x}_i^{*} = (x_i^{*}, \alpha_i^{*}, \beta_i^{*}),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\tilde{b}_i = (b_i, \delta_i, \gamma_i),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

gdzie $\tilde{x}^{*}$ jest rozmytym rozwiązaniem jawnym, natomiast $\tilde{x}$ rozmytym rozwiązaniem niejawnym oraz przyjmijmy dodatkowo następujące oznaczenia:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^T$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)^T$$

$$\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*)^T$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)^T$$

Ponadto załóżmy, że macierz $|\mathbf{A}|$ jest macierzą wartości bezwzględnych elementów macierzy **A**:

$$|\mathbf{A}| = \begin{cases} [a_{ij}] & \text{dla } a_{ij} \geq 0 \\ [-a_{ij}] & \text{dla } a_{ij} < 0 \end{cases},$$

gdzie macierz **A** jest macierzą lewych stron ograniczeń układu równań (3.57).

Można sformułować następujące twierdzenie (Kwiesielewicz 1993b, 1995):

Twierdzenie 3.7. *Jeśli* $\det(|\mathbf{A}|) \neq 0$ *oraz* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, *to istnieje zarówno jawne, jak i niejawne rozwiązanie rozmytej wersji układu równań* (3.57) *i zachodzą następujące warunki:*

(i)
$$\boldsymbol{\alpha}^* - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Delta}, \tag{3.62}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Delta} = \left(|\mathbf{A}^{-1}| - |\mathbf{A}|^{-1}\right)(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\gamma})/2 \tag{3.63}$$

(ii)
$$\boldsymbol{\alpha} = \left(|\mathbf{A}|^{-1}(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\gamma})\right)/2 \tag{3.64}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(|\mathbf{A}|^{-1}(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma})\right)/2 \qquad (3.65)$$

(iii)
$$\boldsymbol{\alpha}^* = \left(|\mathbf{A}^{-1}|(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma})\right)/2 \qquad (3.66)$$

$$\boldsymbol{\beta}^* = \left(|\mathbf{A}^{-1}|(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\gamma})\right)/2 . \qquad (3.67)$$

Dla macierzy **A** z nieujemnymi elementami zależności (3.64), (3.65) sprowadzają się odpowiednio do:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta}, \qquad (3.68)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\gamma}. \qquad (3.69)$$

Rozwiązanie niejawne w przypadku ogólnym nie zawsze jest rozwiązaniem prawidłowym, tzn. nie zawsze spełniony jest warunek $\alpha, \beta \geq 0$. Zdarza się często, że pewne składowe rozwiązania mają ujemne rozrzuty. Przykładowe wyniki ilustrujące to zjawisko można znaleźć np. w pracy (Laarhoven i Pedrycz 1983). Rozwiązanie jawne jest zawsze prawidłowe w tym sensie.

3.4.3 Przykładowe obliczenia

Przykład 1. Rozpatrzmy następujący układ równań rozmytych:

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = (2,0.1,0.2),$$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = (2,0.2,0.3).$$

Otrzymujemy w tym przypadku:

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

oraz rozwiązanie niejawne

$$\tilde{x}_1 = (2/3, 1/10, 4/30), \quad \tilde{x}_2 = (2/3, 0, 1/30)$$

i rozwiązanie jawne:

$$\tilde{x}_1 = (2/3, 1/5, 7/30), \quad \tilde{x}_2 = (2/3, 1/6, 1/5).$$

Przykład 2. Rozważmy układ równań z przykładu 1, ale przy założeniu, że wektor prawych stron zdefiniowany jest następująco:

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} (2, 0.1, 0.2) \\ (2, 0.3, 0.3) \end{pmatrix}.$$

W tym przypadku rozwiązanie niejawne ma postać:

$$\tilde{x}_1 = (2/3, 1/6, 4/30), \quad \tilde{x}_2 = (2/3, -1/30, 1/30),$$

natomiast rozwiązanie jawne:

$$\tilde{x}_1 = (2/3, 8/30, 7/30), \quad \tilde{x}_2 = (2/3, 1/6, 7/30).$$

Druga składowa otrzymanego rozwiązana niejawnego posiada lewostronny rozrzut ujemny. W związku z tym nie można jej zaakceptować jako rozwiązania rozmytego

Przykład 3.

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = (2, 0.1, 0.2),$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (2, 0.2, 0.3).$$

Otrzymujemy w tym przypadku:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Rozmyte rozwiązanie jawne wyniesie:

$$\tilde{x}_1 = (2, 0.15, 0.25), \quad \tilde{x}_2 = (0, 0.2, 0.2).$$

W tym przypadku nie spełniony jest warunek $\det(|\mathbf{A}|) \neq 0$ i rozwiązanie jawne nie istnieje, co można pokazać w oparciu o twierdzenie 2.5 (Kwiesielewicz 1995).

3.5 Podsumowanie

W rozdziale dokonano porównania rozwiązań jawnych i niejawnych układów równań liniowych z rozmytymi prawymi stronami. Pokazano, że nie są one sobie równe w przypadku ogólnym. Rozmyte rozwiązanie jawne istnieje zawsze, podczas gdy istnienie jedynego rozwiązania niejawnego zależy od własności ostrej macierzy lewych stron układu. Czasami niejawne rozwiązanie rozmyte nie jest prawidłowe, tzn. otrzymywane są składowe wektora rozwiązania z ujemnymi rozrzutami. Jeśli rozmyte rozwiązanie niejawne istnieje i jest poprawne, to obydwa rozwiązania posiadają taki sam wektor wartości modalnych i rozwiązanie niejawne zawiera się w rozwiązaniu jawnym w sensie zawierania się liczb rozmytych dla odpowiednich składowych wektorów rozmytych.

Jakkolwiek koncepcja rozwiązania jawnego i niejawnego może być zastosowana dla przypadków bardziej ogólnych, tzn. dla układów równań z osobliwą macierzą lewych stron, to dla takiego przypadku należy przeprowadzić oddzielną analizę.

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY
Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Analityczny hierarchiczny proces decyzyjny (ang. Analytic Hierarchy Proces - AHP) należy do klasy metod wielokryterialnych podejmowania decyzji. Polega na wyborze najlepszego wariantu, ze skończonej, niezbyt dużej ich liczby, z uwzględnieniem wielu kryteriów. Metoda oparta jest na porównaniach parami wariantów, dokonywanych przez ekspertów, w oparciu o subiektywną preferencję jednego wariantu nad drugim. Wynikiem porównania może być ocena nierozmyta i rozmyta. Może również zaistnieć sytuacja braku ocen. Na podstawie uzyskanych ocen otrzymywane są wagi, wyrażające ważność poszczególnych wariantów.

Praca koncentruje się na analizie i ocenie głównych metod obliczania wag. Autor proponuje również własne podejście dla przypadku z brakującymi danymi oraz danymi nierozmytymi i rozmytymi.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-69-3