

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom II



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFczyk
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowci	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

METODY STOCHASTYCZNE
– PROBLEMY NIEDETERMINISTYCZNE

ZASTOSOWANIE ZMIENNYCH NIEPEWNYCH DO PODEJMOWANIA DECYZJI DLA OBIEKTU O STRUKTURZE RÓWNOLEGŁEJ[†]

Donat ORSKI

Politechnika Wroclawska, Instytut Informatyki Technicznej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: donat.orski@pwr.wroc.pl

Streszczenie: Praca dotyczy obiektu złożonego o wyjściu reprezentującym sumę wyjść obiektów składowych, które można interpretować jako niezależne jednostki produkcyjne. Działanie każdej jednostki opisane jest modelem relacyjnym z nieznanym parametrem, o którym zakłada się, że jest wartością *zmienną niepewną* charakteryzowaną rozkładem pewności podanym przez eksperta. Problem decyzyjny polega na wyznaczeniu takich wartości wejść jednostek produkcyjnych, które maksymalizują wskaźnik pewności tego, że spełnione jest wymaganie dla wyjścia obiektu złożonego. W pracy zaproponowano algorytm rozwiązania problemu oraz rozpatrzone przypadki szczególne. Sformułowano także pokrewny problem decyzyjny. Obydwa podejścia zilustrowano przykładami.

Słowa kluczowe: Zmienne niepewne, system ekspertowy, podejmowanie decyzji, obiekt złożony.

1. WSTĘP

Ważną klasą współczesnych komputerowych systemów wspomagania decyzji są systemy ekspertowe – budowane w oparciu o wiedzę specjalistyczną przekazaną przez tzw. eksperta. Jej formalizacja często prowadzi do nietradycyjnych modeli matematycznych zwanych reprezentacjami wiedzy, a jedną z typowych form zapisu wiedzy niepełnej i niepewnej jest zależność relacyjna z dodatkowo nieznanym parametrem. W szeregu prac, np. [1, 3], przyjmuje się, że parametr ten jest wartością *zmienną niepewną* scharakteryzowaną przez eksperta. Dotychczas opracowane zastosowania zmiennych niepewnych do podejmowania decyzji dla obiektów o takim właśnie opisie dotyczą obiektów o różnej naturze i różnej strukturze [2, 4, 6]. Wyniki uzyskane dla obiektów o strukturze równoległej, obejmujące także ocenę jakości [4] oraz adaptację [5], dotyczyły kompleksów operacji równoległych charakteryzowanych zależnością czasu realizacji od ilości przydzielonego zasobu lub rozmiaru zadania, przy czym czas realizacji całego kompleksu był największym z czasów realizacji poszczególnych operacji.

W niniejszej pracy rozpatruje się obiekt złożony z jednostek produkcyjnych, których efekty działania – rozmiar lub koszt produkcji – sumują się, a łączny efekt jest traktowany jako wyjście obiektu złożonego. W konsekwencji, wymagania dla wyjścia obiektu nie można dekomponować wprost na wymagania dla wyjść poszczególnych jednostek produkcyjnych, a otrzymany nowy problem wymaga opracowania nowego algorytmu rozwiązania. Celem pracy jest przedstawienie ogólnej metody rozwiązania problemu decyzyjnego dla rozpatrywanej klasy obiektów złożonych oraz konkretnych algorytmów uzyskanych dla typowych przypadków określonych formą opisu eksperta i wymagania użytkownika. Zamieszczone przykłady liczbowe służą zilustrowaniu prezentowanego podejścia i są punktem wyjścia dla wstępnej oceny własności opracowanych algorytmów.

W rozdziale 2 przedstawiono podstawowe definicje dotyczące zmiennych niepewnych oraz ogólne sformułowanie problemu decyzyjnego. Rozdział 3 prezentuje model rozpatrywanego obiektu złożonego, a także sformułowanie problemu i opracowaną metodę jego rozwiązania. Rozdział 4 poświęcony jest prezentacji szczególnych przypadków problemu decyzyjnego oraz odpowiadających im algorytmów i przykładów liczbowych. W rozdziale 5 przedstawiono inną wersję problemu decyzyjnego, która może mieć interesujące uzasadnienie praktyczne. Rozdział 6 zawiera m.in. sugestie dotyczące potencjalnych kierunków dalszych prac.

2. ZMIENNE NIEPEWNE. PROBLEM DECYZYJNY

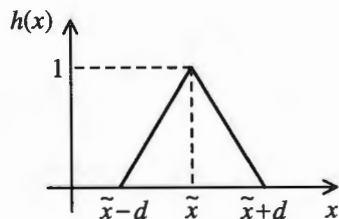
2.1. Zmienna niepewna

Zmienna niepewna \bar{x} zdefiniowana jest przez zbiór wartości X oraz rozkład pewności $h(x): X \rightarrow [0,1]$ (rys. 1) reprezentujący subiektywną ocenę eksperta dotyczącą różnych możliwych wartości zmiennej [3].

[†]Praca została sfinansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005-2007 w ramach projektu badawczego nr 3 T11A 031 28.

Dla ustalonego x wartość $h(x)$ określa wskaźnik pewności tego, że \bar{x} jest w przybliżeniu równe x , tzn. $h(x) \equiv v(\bar{x} \cong x)$. Dla danego zbioru $D_x \subset X$ wskaźnik pewności tego, że \bar{x} w przybliżeniu należy do D_x oblicza się następująco:

$$v(\bar{x} \in D_x) = \max_{x \in D_x} h(x).$$



Rys. 1. Trójkątny rozkład pewności.

2.2. Problem decyzyjny dla obiektu relacyjnego

W przypadku, gdy obiekt z wejściem $u \in U$ i wyjściem $y \in Y$ opisany relacją $R(u, y; x) \subset U \times Y$ z parametrem $x \in X$ jest traktowany jako obiekt podejmowania decyzji, to wymagania dla wyjścia użytkownik określa podając zbiór $D_y \subset Y$, tzn. użytkownik żąda aby $y \in D_y$.

Jeżeli x jest wartością zmiennej niepewnej scharakteryzowaną przez eksperta, to również y jest wartością zmiennej niepewnej i **problem decyzyjny** formułuje się następująco: dla danych R , $h(x)$ oraz D_y wyznaczyć decyzję $u^* \in U$ maksymalizującą wskaźnik pewności

$$v[\bar{y} \in D_y] = v[D_y(u; \bar{x}) \subseteq D_y] \triangleq v(u), \quad (1)$$

gdzie $D_y(u; x)$ jest zbiorem możliwych wyjść, tzn.

$$D_y(u; x) = \{y \in Y : (u, y) \in R\}.$$

Poszukiwane rozwiązanie określone jest zależnością [3]

$$u^* = \arg \max_{u \in U} \max_{x \in D_x(u)} h(x), \quad (2)$$

gdzie

$$D_x(u) = \{x \in X : D_y(u; x) \subseteq D_y\}. \quad (3)$$

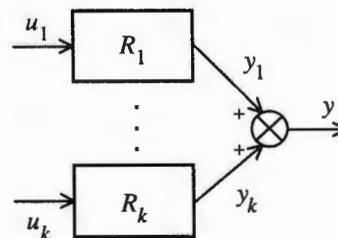
3. STRUKTURA RÓWNOLEGŁA. ALGORYTM ROZWIĄZANIA

3.1. Problem decyzyjny dla obiektu złożonego

Rozważmy obiekt złożony (rys. 2) powstały przez równoległe połączenie obiektów składowych (jednostek produkcyjnych) opisanych zależnościami relacyjnymi

$$R_i(u_i, y_i; x_i), \quad i \in \overline{1, k}, \quad (4)$$

gdzie u_i, y_i są odpowiednio wejściem i wyjściem i -tej jednostki produkcyjnej, $u \triangleq (u_1, \dots, u_k) \in U$, $y_i \in Y$, natomiast $x \triangleq (x_1, \dots, x_k)$ jest wektorem nieznanymi parametrów. Zakładamy, że nieznanne parametry są wartościami niezależnych zmiennych niepewnych $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ o rozkładach pewności $h_1(x_1), \dots, h_k(x_k)$ podanych przez eksperta.



Rys. 2. Obiekt relacyjny o strukturze równoległej.

Zbiór możliwych wyjść y obiektu złożonego określony jest następującą zależnością

$$D_y(u; x) = \{y \in Y : \bigvee_{y_1, \dots, y_k} [\bigwedge_i (u_i, y_i) \in R_i \wedge \sum_{i=1}^k y_i = y]\}. \quad (5)$$

W konsekwencji **problem decyzyjny** można sformułować następująco: dla danych relacji R_1, \dots, R_k , rozkładów pewności h_1, \dots, h_k oraz zbioru $D_y \subset Y$ definiującego wymagania użytkownika wyznaczyć decyzję $u^* \in U$ maksymalizującą wskaźnik pewności (1). Analogicznie do (2) rozwiązanie u^* otrzymamy tym razem z równania

$$u^* = \arg \max_{u \in U} \max_{x \in D_x(u)} \min_i h_i(x_i), \quad (6)$$

gdzie $D_x(u)$ zdefiniowany jest przez (3) oraz (5).

3.2. Algorytm rozwiązania

W zależności od wymaganego przez użytkownika zbioru D_y może wystąpić jedna z następujących sytuacji określonych wartością $v(u^*) \triangleq v^*$:

- $v(u) = 0$ dla wszystkich $u \in U$ (wymaganie za ostre),
- $0 < v^* < 1$,
- $v^* = 1$ i $u^* \in D_u^*$ (słabe wymagania).

W przypadku a) rozwiązanie nie istnieje, natomiast w przypadku c) istnieje cały zbiór rozwiązań optymalnych D_u^* . Można go wyznaczyć w następujący sposób, przy założeniu że $h_i(x_i) = 1$ dla $x_i = \bar{x}_i$ oraz $h_i(x_i) < 1$ dla $x_i \neq \bar{x}_i$. Najpierw wyznaczamy zbiór $\hat{D}_u^* = \{u \in U :$

$\tilde{x} \in D_x(u)$, a następnie zbiór $D_u^* = \hat{D}_u^* \cap U$. Jeśli $D_u^* \neq \emptyset$, to dla każdego $u \in D_u^*$ zachodzi $v(u) = 1$.

W przypadku b), który z praktycznego punktu widzenia jest najbardziej interesujący, można zastosować procedurę opierającą się na założeniu, że $X_i = R^1$ a $h_i(x_i)$ jest dla $x_i \leq \bar{x}_i$ rosnącą funkcją $\underline{h}_i(x_i)$ oraz dla $x_i \geq \bar{x}_i$ jest malejącą funkcją $\bar{h}_i(x_i)$. Oznaczając

$$\max_x \min_i h_i(x_i) \triangleq \gamma$$

procedurę można przedstawić w następujących krokach:
1. Z równań $h_i(x_i) = \gamma$ dla ustalonego γ wyznaczyć $x_{i,\min}$ oraz $x_{i,\max}$ i do dalszych obliczeń przyjąć przedziały $\Delta_{x_i}(\gamma) = [x_{i,\min}, x_{i,\max}]$.

2. Wyznaczyć zbiór

$$\hat{D}_u(\gamma) = \{u : D_x(u) \cap \hat{D}_x(\gamma) \neq \emptyset\},$$

gdzie

$$\hat{D}_x(\gamma) = \Delta_{x_1}(\gamma) \times \Delta_{x_2}(\gamma) \times \dots \times \Delta_{x_k}(\gamma).$$

3. Wyznaczyć największe $\gamma \triangleq \gamma_{\max}$ takie, że $\hat{D}_u(\gamma) \cap U \neq \emptyset$; $u^* = \hat{D}_u(\gamma_{\max})$, $v(u^*) = \gamma_{\max}$.

4. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE. PRZYKŁADY

Stosowanie procedury przedstawionej w rozdziale 3 może być trudne i niewykonalne analitycznie. Celowe jest zatem rozpatrzenie pewnych szczególnych przypadków.

Przypadek 1. Przyjmijmy że $u_i, y_i, x_i \in R^+, i \in \overline{1, k}$, wymaganie użytkownika ma postać $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$, a relacje (4) są dane w postaci nierówności

$$e_i x_i u_i \leq y_i \leq c_i x_i u_i, \quad (7)$$

gdzie $0 \leq e_i \leq c_i$. Tak opisany obiekt o strukturze równoległej można interpretować jako połączeni niezależnych jednostek produkcyjnych o jednakowym rodzaju produkcji we wszystkich jednostkach. Dalej idące interpretacje pozwalają wyróżnić następujące wersje problemu:

- $c_i = \infty, y_{\max} = \infty, u_i$ jest ilością nakładów na produkcję a y_i – efektem rozumianym jako zysk lub ilość produktu;
- $e_i = 0, y_{\min} = 0, u_i$ jest ilością surowca wykorzystywanego podczas produkcji a y_i – kosztem produkcji;
- $e_i, c_i, y_{\min} > 0, y_{\max} < \infty, u_i$ może być ilością nakładów lub ilością surowca, natomiast y jest charakteryzującą produkt liczbową cechą, której wartość powinna się mieścić w określonym przedziale, np. stałe z pewną tolerancją natężenie strumienia produktu.

W wersji a) zbiór $D_x(u)$ (3) określony jest nierównością

$$y_{\min} \leq e_1 x_1 u_1 + \dots + e_k x_k u_k. \quad (8)$$

Przy braku dodatkowych ograniczeń na u nierówność będzie spełniona ze wskaźnikiem $v^* = 1$ dla każdej decyzji u , takiej że $y_{\min} \leq e_1 \tilde{x}_1 u_1 + \dots + e_k \tilde{x}_k u_k$. Najczęściej dysponować można jednak tylko skończoną, z góry zadaną łączną ilością nakładów na produkcję \bar{U} , co opisują następujące ograniczenia dodatkowe

$$\sum_{i=1}^k u_i = \bar{U}, \quad \bigwedge_i u_i \geq 0. \quad (9)$$

Jeśli nie istnieje rozdział nakładów, dla którego $v^* = 1$, to dla $0 < v^* < 1$ należy zastosować procedurę przedstawioną w rozdziale 3. Korzystając z założenia o monotoniczności h_i , wyznaczamy $x_{i,\min} = \underline{h}_i^{-1}(\gamma)$, $x_{i,\max} = \bar{h}_i^{-1}(\gamma)$ oraz przyjmujemy $\Delta_{x_i}(\gamma) = [\underline{h}_i^{-1}(\gamma), \bar{h}_i^{-1}(\gamma)]$. Ze względu na zwrot nierówności (8) w następnym kroku bierzemy pod uwagę tylko wartości $x_{i,\max}$, otrzymując zbiór $\hat{D}_u(\gamma)$ określony nierównością $y_{\min} \leq \sum_{i=1}^k e_i \bar{h}_i^{-1}(\gamma) u_i$. Warunek

$\hat{D}_u(\gamma) \cap U \neq \emptyset$ jest spełniony dla konkretnego γ , jeśli

$$y_{\min} \leq \max_{u \in U} \sum_{i=1}^k e_i \bar{h}_i^{-1}(\gamma) u_i, \quad \text{przy czym dla } \gamma = \gamma_{\max}$$

zachodzi równość $y_{\min} = \max_{u \in U} \sum_{i=1}^k e_i \bar{h}_i^{-1}(\gamma_{\max}) u_i$.

Przeprowadzając maksymalizację liniowej funkcji zmiennej u przy liniowych ograniczeniach (9), dostajemy

$$y_{\min} = \max_i e_i \bar{h}_i^{-1}(\gamma_{\max}) \bar{U},$$

$$\gamma_{\max} = \min_i \bar{h}_i \left(\frac{y_{\min}}{e_i \bar{U}} \right).$$

Stąd

$$u_i^* = \begin{cases} \bar{U} & \text{gdy } \bar{h}_i \left(\frac{y_{\min}}{e_i \bar{U}} \right) = \min_j \bar{h}_j \left(\frac{y_{\min}}{e_j \bar{U}} \right), \quad i \in \overline{1, k}. \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (10)$$

W wersji b) zbiór $D_x(u)$ (3) określony jest nierównością

$$c_1 x_1 u_1 + \dots + c_k x_k u_k \leq y_{\max}. \quad (11)$$

Rozwiązanie otrzymuje się w sposób analogiczny jak dla wersji a). W szczególności, jeśli $0 < v^* < 1$ i obowiązują ograniczenia (9), to zastosowanie procedury

proceedzi do takich samych jak poprzednio przedziałów $\Delta_{x_i}(\gamma)$, zbioru $\hat{D}_u(\gamma)$ określonego nierównością $\sum_{i=1}^k c_i \bar{h}_i^{-1}(\gamma) u_i \leq y_{\max}$ oraz

$$\gamma_{\max} = \max_i \bar{h}_i \left(\frac{y_{\max}}{c_i U} \right).$$

Rozdział surowca u^* jest wyznaczany według (10) z \underline{h} , c , \max w miejsce odpowiednio \bar{h} , e , \min .

W wersji c) zbiór $D_x(u)$ (3) określony jest nierównościami (8) i (11). Przy ograniczeniach (9) może nie istnieć decyzja $u \in U$ zapewniająca $v(u) = 1$. Jeśli dla

każdego $u \in U$ zachodzi $\sum_{i=1}^k e_i \tilde{x}_i u_i < y_{\min}$ lub

$\sum_{i=1}^k c_i \tilde{x}_i u_i > y_{\max}$, to $v(u^*) < 1$ i u^* wyznaczamy sto-

jąc opisaną procedurę. Odpowiednio, rozwiązanie problemu w wersji c) sprowadza się do rozwiązania problemu w wersji a) lub w wersji b).

Przypadek 2. W porównaniu z przypadkiem 1 różnica polega na założeniu $x_i = p_i x$, gdzie $x \in R^+$ jest wartością zmiennej niepewnej scharakteryzowanej za pomocą rozkładu pewności $h(x)$ podanego przez eksperta. Współczynniki proporcjonalności p_i są znane i ustalone, a ich wartości mogą wynikać z wymagań technologicznych. Podobnie jak w przypadku 1, można wyróżnić wersje a), b) i c) problemu decyzyjnego. Przykładowo w wersji a) zbiór $D_x(u)$ (3) określony jest następująco

$$\frac{y_{\min}}{e_1 p_1 u_1 + \dots + e_k p_k u_k} \leq x.$$

Stosując opisaną procedurę rozpatrujemy prawy koniec przedziału $\Delta_x(\gamma) = [\underline{h}^{-1}(\gamma), \bar{h}^{-1}(\gamma)]$ i dla $\gamma = \gamma_{\max}$

dostajemy $y_{\min} = \bar{h}^{-1}(\gamma_{\max}) \cdot \max_{u \in U} \sum_{i=1}^k e_i p_i u_i$.

Uwzględniając ograniczenia (9) otrzymujemy

$$\gamma_{\max} = \min_i \bar{h} \left(\frac{y_{\min}}{e_i p_i U} \right) \quad \text{oraz} \quad u_i^* = \bar{U}, \quad \text{gdy}$$

$$e_i p_i = \max_j e_j p_j \quad \text{i} \quad u_i^* = 0 \quad \text{w przeciwnym wypadku.}$$

Przypadek 3. W porównaniu z przypadkiem 1 różnica polega na założeniu $u_1 = u_2 = \dots = u_k = u$, tzn. $u \in R^+$ może być rozumiane jako wartość liczbową pewnej cechy jednolitego surowca, wykorzystywanego we wszystkich jednostkach produkcyjnych. Ewentualne dodatkowe ograniczenie może mieć postać $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$. Przykładowo, dla wersji b) problemu decyzyjnego, stosując opisaną procedurę otrzymujemy

zbiór $D_x(u)$ (3) określony nierównością

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k \leq \frac{y_{\max}}{u}.$$

Rozpatrując lewe końce przedziałów $\Delta_{x_i}(\gamma) = [\underline{h}_i^{-1}(\gamma), \bar{h}_i^{-1}(\gamma)]$, dla $\gamma = \gamma_{\max}$ dostajemy

$$y_{\max} = \min_{u \in U} u \cdot \sum_{i=1}^k c_i \bar{h}_i^{-1}(\gamma_{\max}). \quad \text{Przy dodatkowym}$$

ograniczeniu otrzymujemy $u^* = u_{\min}$ oraz

$$\gamma_{\max} = \max_i \bar{h}_i \left(\frac{y_{\max}}{c_i u_{\min}} \right).$$

Charakterystyczną cechą rozdziału nakładów (surowca) wyznaczonego w rozpatrywanych przypadkach na podstawie wiedzy eksperta jest przydział całej ilości dostępnych nakładów (surowca) do konkretnej jednostki produkcyjnej. Taką cechą może posiadać również rozdział optymalny dla modeli dokładnych, które nie są znane. Wówczas decyzja oparta na wiedzy eksperta da najlepszy rezultat, gdy wybrana zostanie właściwa jednostka produkcyjna. Problem ten przeanalizujemy na prostych przykładach, z których pierwszy ma charakter wprowadzający i ilustruje rozwiązanie problemu decyzyjnego dla przypadku 1 oraz trójkątnych rozkładów pewności.

Przykład 1. Rozkłady pewności h_i mają postać jak na rys. 1, tzn. $\underline{h}_i(x_i) = 1 + \frac{(x_i - \tilde{x}_i)}{d_i}$, $\bar{h}_i(x_i) = 1 - \frac{(x_i - \tilde{x}_i)}{d_i}$ oraz $0 \leq d_i \leq \tilde{x}_i$. W przypadku 1 otrzymujemy $0 < v^* < 1$, gdy w wersji a)

$$\max_i e_i (\tilde{x}_i + d_i) > \frac{y_{\min}}{U} > \max_i e_i \tilde{x}_i,$$

lub gdy w wersji b)

$$\min_i c_i (\tilde{x}_i - d_i) < \frac{y_{\max}}{U} < \min_i c_i \tilde{x}_i.$$

Rozwiązanie problemu decyzyjnego w wersji c) sprowadza się do rozwiązania problemu w wersji a) lub b), w zależności od tego czy spełniony jest pierwszy czy drugi z powyższych warunków. Uwzględniając (9) dostajemy w wersji a)

$$v^* = 1 - \max_i \left(\frac{y_{\min}}{d_i e_i U} - \frac{\tilde{x}_i}{d_i} \right)$$

oraz w wersji b)

$$v^* = 1 - \min_i \left(\frac{\tilde{x}_i}{d_i} - \frac{y_{\max}}{d_i c_i U} \right).$$

Przy dodatkowym założeniu $\frac{\tilde{x}_1}{d_1} = \dots = \frac{\tilde{x}_k}{d_k} \triangleq r$, które może mieć uzasadnienie praktyczne, otrzymujemy

$$v^* = 1 + r - r \frac{y_{\min}}{U \cdot \min\{c_1 \tilde{x}_1, c_2 \tilde{x}_2, \dots, c_k \tilde{x}_k\}}$$

oraz

$$v^* = 1 - r + r \frac{y_{\max}}{U \cdot \max\{c_1 \tilde{x}_1, c_2 \tilde{x}_2, \dots, c_k \tilde{x}_k\}},$$

odpowiednio, w wersji a) i w wersji b). W takim wypadku problem sprowadza się do wyboru jednostki charakteryzowanej, odpowiednio, najmniejszą i największą wartością $c_i \tilde{x}_i$. Łatwo zauważyć, że do tego samego rezultatu prowadzi również założenie $d_1 = d_2 = \dots = d_k$.

Przykład 2. Dla $k = 2$, trójkątnych rozkładów pewności z $\tilde{x}_1 = 8$, $\tilde{x}_2 = 6$ oraz $\bar{U} = 10$ i $y_{\max} = 55$ rozwiązuje problem w wersji b) dla $c_1 = c_2 = 1$ i z uwzględnieniem (9). Dla $d_1 = 6$, $d_2 = 2$ dostajemy $u_1^* = 0$, $u_2^* = 10$, $v^* = 0,75$. Natomiast dla $d_1 = 8$, $d_2 = 1$ dostajemy $u_1^* = 10$, $u_2^* = 0$, $v^* = 0,69$.

Uzyskany rezultat oznacza, że dla $\frac{\tilde{x}_1}{d_1} \neq \frac{\tilde{x}_2}{d_2}$ duży

wpływ na wynik mogą mieć wartości rozrzutu d_1 i d_2 . W konsekwencji, nawet decyzja wyznaczona na podstawie wiedzy eksperta prawidłowo wskazującego \tilde{x}_1 i \tilde{x}_2 jako najbardziej pewne wartości parametrów może dać słaby efekt, jeżeli równocześnie wystąpi duża dysproporcja w przekonaniu eksperta o słuszności własnej oceny wartości x_1 i x_2 . Problem jakości decyzji wyznaczonej w oparciu o taką wiedzę ilustruje przykład 3.

Przykład 3. Dla $k = 2$ dokładne modele jednostek produkcyjnych są postaci $y_1 = 8u_1$, $y_2 = 6u_2$, a ich opis podany przez eksperta jest jak w przykładzie 2. Zatem ekspert przypisuje największe wskaźniki pewności rzeczywistym wartościom parametrów. Rozwiązujemy problem w wersji b) dla $\bar{U} = 10$, $y_{\max} = 55$, z uwzględnieniem (9). Dla $d_1 = 6$, $d_2 = 2$ dostajemy $u_1^* = 0$, $u_2^* = 10$ oraz efekt tej decyzji $y^* = 60$. Natomiast dla $d_1 = 8$, $d_2 = 1$ dostajemy $u_1^* = 10$, $u_2^* = 0$ oraz $y^* = 80$.

Podobnie jak w [4, 6] można zdefiniować wskaźnik jakości

$$Q \triangleq \frac{y^*}{y_{\text{opt}}},$$

gdzie y^* oraz y_{opt} oznaczają, odpowiednio, efekt decyzji opartej na wiedzy eksperta i efekt decyzji optymalnej, a następnie zastosować go do oceny jakości decyzji wyznaczonej dla $k = 2$ i wersji b) problemu decyzyjnego. Załóżmy, że $y_1 = c_1 \tilde{x}_1 u_1$, $y_2 = c_2 \tilde{x}_2 u_2$,

$c_1 \tilde{x}_1 > c_2 \tilde{x}_2$, ekspert podaje trójkątne rozkłady pewności, $d_1 > d_2$ oraz $\lambda \triangleq \frac{d_2}{d_1}$ ($1 - \lambda$ może być miarą dys-

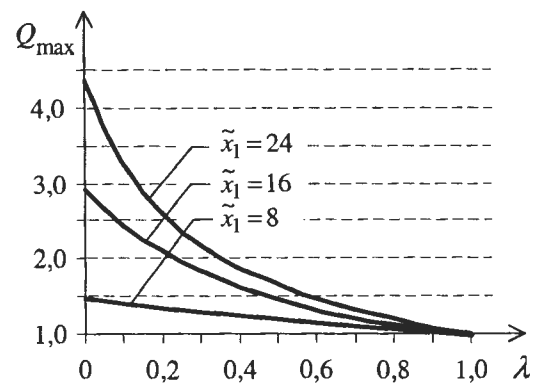
proporcji rozrzutów wartości x_2 i x_1). Wówczas

$Q = \frac{c_1 \tilde{x}_1}{c_2 \tilde{x}_2}$ i dla konkretnych \tilde{x}_1 oraz λ najgorsza

(największa) wartość wskaźnika jakości, która może wystąpić pomimo trafnego wytypowania przez eksperta wartości \tilde{x}_1 i \tilde{x}_2 dana jest wzorem

$$Q_{\max} = \frac{c_1 \tilde{x}_1}{\lambda c_2 \tilde{x}_1 + \frac{y_{\max}}{U} (1 - \frac{c_2}{c_1} \lambda)}$$

Przykładowo, dla $\bar{U} = 10$, $y_{\max} = 55$, $c_1 = c_2 = 1$ (rys. 3) jakość decyzji silnie zależy od λ i może być bardzo niska dla odpowiednio dużej dysproporcji rozrzutów.



Rys. 3. Zależność Q_{\max} od λ dla różnych \tilde{x}_1 .

Duża dysproporcja rozrzutów może być dla projektanta systemu wskazówką do skorzystania z pomocy innego eksperta lub zastosowania innego, mniej wrażliwego na parametry rozkładów pewności, sposobu wyznaczania decyzji na podstawie dostępnej wiedzy.

5. POKREWNY PROBLEM DECYZYJNY

Jeden ze sposobów innego wykorzystania wiedzy eksperta może polegać na rozwiązaniu problemu decyzyjnego z oddzielnymi wymaganiami dla każdej jednostki produkcyjnej. Ten pokrewny **problem decyzyjny** można sformułować następująco: dla danych relacji R_1, \dots, R_k , rozkładów pewności h_1, \dots, h_k oraz zbiorów D_{y_1}, \dots, D_{y_k} wyznaczyć decyzję $\hat{u} \in U$ maksymalizującą wskaźnik pewności

$$v[(\bar{y}_1 \in D_{y_1}) \wedge (\bar{y}_2 \in D_{y_2}) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_k \in D_{y_k})] \triangleq v(u).$$

Rozwiązanie \hat{u} otrzymamy tym razem z równania

$$\hat{u} = \arg \max_{u \in U} \min_i v_i(u_i),$$

gdzie

$$v_i(u_i) = v[\bar{y}_i \in D_{y_i}] = \max_{D_{x_i}(u_i)} h_i(x_i)$$

oraz $D_{x_i}(u_i) = \{x_i : D_{y_i}(u_i; x_i) \subseteq D_{y_i}\}$, $D_{y_i}(u_i; x_i) = \{y_i \in Y : (u_i, y_i) \in R_i\}$. Odpowiednio $\hat{v} \triangleq v(\hat{u})$. Zna-
na, uwzględniająca (9), metoda rozwiązania bazuje na
równaniu $v_1(\hat{u}_1) = v_2(\hat{u}_2) = \dots = v_k(\hat{u}_k)$ [3, 4].

Zbiory D_{y_i} mogą być wynikiem przeprowadzonej przy
pomocy eksperta dekompozycji wymagania użytkowni-
ka danego zbiorem $D_y \subset Y$. Oznacza to, że

$$(y_1 \in D_{y_1}) \wedge \dots \wedge (y_k \in D_{y_k}) \rightarrow (\sum_{i=1}^k y_i \in D_y),$$

oraz $\hat{v} \leq v^*$, czyli wymaganie dla problemu pokrewnego
jest bardziej restrykcyjne, co spowodowane jest
uwzględnieniem dodatkowej wiedzy o obiekcie. Analo-
gicznie jak w rozdziale 4 można rozpatrywać trzy wersje
problemu pokrewnego. Poniższy przykład nawiązuje
do przykładu 2 i ilustruje rozwiązanie problemu po-
krewnego w wersji b), gdy $0 < \hat{v} < 1$.

Przykład 4. Dla $k = 2$ i danych jak w przykładzie 2,
dodatkowo przyjmujemy $y_{1,\max} = 35$ oraz
 $y_{2,\max} = 20$ ($y_{1,\max} + y_{2,\max} = y_{\max}$). Podstawiając
dane oraz $d_1 = 6$, $d_2 = 2$ do równania

$$\frac{1}{d_1} \frac{y_{1,\max}}{u_1} - \frac{\tilde{x}_1}{d_1} = \frac{1}{d_2} \frac{y_{2,\max}}{(U - u_1)} - \frac{\tilde{x}_2}{d_2}$$

i rozwiązując je ze względu na u_1 otrzymujemy
 $\hat{u}_1 \approx 6,17$, $\hat{u}_2 \approx 3,83$, $\hat{v} \approx 0,61$. Natomiast dla $d_1 = 8$,
 $d_2 = 1$ dostajemy $\hat{u}_1 \approx 6,48$, $\hat{u}_2 \approx 3,52$, $\hat{v} \approx 0,68$.
Warto zauważyć, że dla obu zestawów parametrów d_1 ,
 d_2 i dokładnych modeli jak w przykładzie 3 uzyskany
efekt jest lepszy od najgorszego tam otrzymanego.

Jeśli znane są decyzje u_i i ich efekty y_i zaobserwowa-
ne dla poprzedniego zadania produkcyjnego, to można
zapropionować $y_{i,\max} = k_i y_{\max}$, gdzie

$$k_i = z_i \left[\sum_{j=1}^k z_j \right]^{-1} \text{ oraz } z_i = \frac{y_i}{u_i}$$

wy koszt przetwarzania surowca w i -tej jednostce pro-
dukcyjnej.

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono sformułowanie i procedurę
rozwiązania problemu decyzyjnego dla obiektu o struk-
turze równoległej, którego komponenty mogą być inter-
pretowane jako niezależne jednostki produkcyjne i opi-
sane są w sposób przybliżony przez eksperta. Dla wy-
różnionych przypadków szczególnych opracowano

algorytmy rozwiązania i przykłady ilustracyjne oraz
przeprowadzono dyskusję wyników uwzględniającą
ocenę jakości decyzji opartych na wiedzy eksperta.
Wskazano na możliwość sformułowania i rozwiązania
pokrewnego problemu decyzyjnego, w sytuacji gdy
występują wątpliwości dotyczące jakości wiedzy eks-
perta i przesłanki dla dekompozycji wymagania użyt-
kownika.

Przyszłe prace dotyczące podejmowania decyzji dla
rozpatrywanego obiektu mogłyby obejmować także
inne formy opisu relacyjnego, definicje wskaźnika pew-
ności lepiej wykorzystujące wiedzę eksperta oraz dalszą
analizę jakości dla założonych typowych modeli do-
kładnych.

APPLICATION OF UNCERTAIN VARIABLES TO DECISION MAKING FOR A PLANT OF PARALLEL STRUCTURE

Abstract: The paper is concerned with a complex plant
composed of independent plants which may be considered as
production units. The output of the plant is calculated as a sum
of the outputs of particular units. Each unit is described by a
relational model with unknown parameter assumed to be a
value of *uncertain variable* characterized by an expert. The
decision problem consists in finding the input values for par-
ticular units, such that the certainty index for the user's re-
quirement concerning the output of the plant is maximized. In
the paper, the algorithm for determination of the decision is
proposed and some special cases are considered. Also, the
related decision problem is formulated. Both approaches are
illustrated with numerical examples.

Literatura

- [1] Bubnicki Z. (2001) Uncertain variables and their application to decision making. *IEEE Trans. SMC, Part A*, 31, 587-596.
- [2] Bubnicki Z. (2002) Application of uncertain variables to decision making in a class of distributed computer systems. *Proceedings of 17th IFIP WCC*, vol. „Intelligent Information Processing”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 261-264.
- [3] Bubnicki Z. (2004) *Analysis and Decision Making in Uncertain Systems*. Springer, Berlin, Londyn, New York.
- [4] Bubnicki Z. (2004) Quality of an operation system control based on uncertain variables. *Proceedings of MIC'04*, Acta Press, Zurich, 148-153.
- [5] Orski D., Sugisaka M. (2004) Application of uncertain variables in an adaptive decision system for a complex of operations. *Proceedings of 15th ICSS*, Wrocław, 2, 307-314.
- [6] Orski D. (2005) Quality of cascade operations control based on uncertain variables. *Artificial Life and Robotics*, 9 (w druku).



Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4