XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom II

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFCZYK
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

TECHNIKA SYSTEMÓW – DIAGNOSTYKA

APROKSYMACYJNA STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW MECHANICZNYCH

Jerzy RESPONDEK

Politechnika Śląska, Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki
ul. Akademicka 16, 44-100, e-mail:Jerzy.Respondek@polsl.pl

Streszczenie: Rozdział jest poświęcony analizie aproksymacyjnej sterowalności z ograniczeniami w postaci nieujemnych sterowań wybranego typu układu mechanicznego opisanego przez równanie ewolucyjne z członami tłumiącymi. W tym celu wykorzystywane są rezultaty z pracy [2] dotyczące koniecznych i wystarczających warunków sterowalności bez- i z ograniczeniami rozważanej klasy systemów. Po zdefiniowaniu odpowiedniego operatora różniczkowego przekształca się równanie różniczkowe cząstkowe belki na liniowe abstrakcyjne równanie różniczkowe, dla którego stosuje się odpowiednie twierdzenie z pracy [2].

Słowa kluczowe: Sterowalność, operatory liniowe, ograniczenia, układ o parametrach rozłożonych

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Jednym z najczęściej badanych pojęć w dziedzinie układów dynamicznych jego sterowalność. Wynika to z ważności tego pojęcia. Często stanowi ona punkt wyjścia do badania bardziej szczegółowych problemów sterowania.

Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany następującym abstrakcyjnym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\left(\alpha_0+\alpha_1 A+\alpha_2 A^{\frac{1}{2}}\right)\frac{dx(t)}{dt}+ \\ +\left(\beta_0+\beta_1 A+\beta_2 A^{\frac{1}{2}}\right)x(t)=Bu(t) \qquad (0.1)$$

przy warunkach początkowych:

$$x(0)=x_0\in D(A),\ \dot{x}(0)=x_1\in X$$

gdzie $x(t)\in X$ (X oznacza przestrzeń Hilberta) oraz $\alpha_i\geq 0,\ i=0,1,2,\ \beta_0\geq 0,\beta_1\geq 0,\ \beta_2$ jest dowolnego znaku, włączając 0. Operator wejścia B jest zdefiniowany jak następuje:

$$Bu(t)=\sum_{k=1}^{p}b_k u_k(t),\quad B\in L(R^p,X)$$

gdzie:

$$B=[b_1,b_2,...,b_p],\quad u(t)=\left[u_1(t),u_2(t),...,u_p(t)\right]^T,$$

$$b_k\in X,\ k=1,2,...,p$$

Ponadto zakładamy, że sterowania należą do $L^2([0,\infty),U)$, gdzie U jest przestrzenią sterowań Hilberta, $\dim U=p$. Ponadto zakładamy, że $A:X\supset D(A)\to X$ jest liniowym, w ogólności nieograniczonym, samosprzężonym i dodatnio określonym operatorem o dziedzinie D(A) gęstej w X i zwartej rezolwencie $R(\lambda,A)$ dla wszystkich λ w zbiorze rezolwenty $\rho(A)$.

Celem artykułu jest weryfikacja sterowalności wybranej klasy układów mechanicznych o modelu opisanych abstrakcyjnym równaniem różniczkowym (0.1). W tym celu zdefiniowano odpowiedni operator różniczkowy. Pozwolił on na przekształcenie popularnego w mechanice modelu równań różniczkowych cząstkowych na model typu (0.1), bardziej przydatny z punktu widzenia automatyki. Następnie zweryfikowano jego sterowalność z ograniczeniami i bez, przy użyciu metod zaprezentowanych w pracy [2].

Przypomnijmy własności operatora A: [5]

- Operator A ma czysto dyskretne widmo punktowe składające się całkowicie z odosobnionych, rzeczywistych i dodatnich wartości własnych λ_i skończonej krotności m_i $(m_i<\infty)$:

$$0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_i<\lambda_{i+1}<...,\ \lim_{i\to\infty}=\infty \qquad (0.2)$$

- Funkcje własne operatora A $\{\ \phi_{ij},\ i=1,2,3,...,\ j=1,2,...,m_i\}$ tworzą zupełny i ortogonalny układ w przestrzenie Hilberta X. Stąd dla każdego $x\in X$ ma miejsce następujące rozwinięcie:

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}<x,\phi_{ij}>_X\ \phi_{ij}$$

- Operator A ma następującą reprezentację spektralną:

$$\forall_{x\in D(A)}\ Ax=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_i<x,\phi_{ij}>_X\ \phi_{ij} \qquad (0.3)$$

$$D(A)=\left\{x\in X:\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_i^2\left|<x,\phi_{ij}>_X\right|^2<\infty\right\}$$

-Ułamkowa potęga operatora A jest zdefiniowana następująco:

$$\forall_{x\in D(A^\beta),\beta\in(0,1)} \quad A^\beta x=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_i^\beta<x,\phi_{ij}>_X\phi_{ij}$$

$$D(A^\beta)=\left\{x\in X:\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_i^{2\beta}\left|<x,\phi_{ij}>_X\right|^2<\infty\right\} \quad (1)$$

- Operator A^α, $0<\alpha<1$ jest także samosprzężony i dodatnio określony o dziedzinie $D(A^\alpha)$ gęstej w X.

2. APROKSYMACYJNA STEROWALNOŚĆ BEZ OGRANICZEŃ

Układ dynamiczny (0.1) jest aproksymacyjnie sterowalny bez ograniczeń wtedy i tylko wtedy, gdy rząd następującego nieskończonego ciąg macierzy:

$$\begin{bmatrix}<b_1,\phi_{i1}>_X & \cdots & <b_k,\phi_{i1}>_X & \cdots & <b_p,\phi_{i1}>_X\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ <b_1,\phi_{il}>_X & \cdots & <b_k,\phi_{il}>_X & \cdots & <b_p,\phi_{il}>_X\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ <b_1,\phi_{im_i}>_X & \cdots & <b_k,\phi_{im_i}>_X & \cdots & <b_p,\phi_{im_i}>_X\end{bmatrix}$$

jest równy m_i dla $i=1,2,3,\ldots$ [2]

3. APROKSYMACYJNA STEROWALNOŚĆ PRZY NIEUJEMNYCH STEROWNIACH

3.1. Definicja 1 [1]

Układ dynamiczny (0.1) nazywamy *U*-sterowalnym do zera z dowolnego stanu początkowego w przestrzeni stanu wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego stanu początkowego $x(t_0)=x_0$ $x'(t_0)=x_1$, istnieje dopuszczalne sterowanie $u\in L^2([0,\infty),U)$ takie, że odpowiadająca trajektoria x(t,x(t₀),x'(t₀),u) rozpatrywanego układu dynamicznego spełnia dla pewnego $t_1\in[t_0,\infty)$ warunek:

$$x(t_1,x(t_0),x'(t_0),u)=0$$

3.2. Definicja 2 [1]

System dynamiczny (0.1) nazywamy globalnie U-sterowalnym do zera w skończonym czasie wtedy i tylko wtedy, gdy jest U-sterowalny do zera z dowolnego stanu początkowego z przestrzeni stanu X.

W kolejnym podrozdziale przedstawimy twierdzenie podające konieczne i wystarczające warunki aproksymacyjnej sterowalności przy nieujemnych sterowaniach i bez ograniczeń na sterowania rozważanego układu (0.1). Wpierw wprowadźmy oznaczenia [2]:

$$\alpha_i^*=2\left(\alpha_0+\alpha_1\lambda_i+\alpha_2\sqrt{\lambda_i}\right) \quad i=1,2,3,\ldots$$

$$\beta_i^*=\beta_0+\beta_1\lambda_i+\beta_2\sqrt{\lambda_i} \quad i=1,2,3,\ldots$$

$$s_{i1,2}=\frac{-\alpha_i^*\mp\sqrt{\alpha_i^{*2}-4\beta_i^*}}{2} \quad i=1,2,3,\ldots \text{(0.5)}$$

(0.4)

Ponadto podzielmy dziedzinę parametru i na 4 podzbiory [2]:

$$\forall_{i\in Z_1}\ \beta_i^*\neq0,\ \beta_i^*\neq\frac{\alpha_i^{*2}}{4}$$

$$\forall_{i\in Z_2}\ \beta_i^*=0,\ \alpha_i^*\neq0$$

$$\forall_{i\in Z_3}\ \beta_i^*=\frac{\alpha_i^{*2}}{4},\ \alpha_i^*\neq0$$

$$\forall_{i\in Z_4}\ \alpha_i^*=\beta_i^*=0$$

Powyższe cztery przypadki wyczerpują wszystkie kombinacje parametrów macierzy stanu więc zbiory Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 muszą być rozłączne I ich suma jest zbiorem liczb całkowitych dodatnich:

$$\forall_{i\neq j;\ i,j\in\{1,2,3,4\}} Z_i\cap Z_j=\varnothing, \quad \bigcup_{k=1,2,3,4} Z_k=Z_+$$

3.3. Twierdzenie 1 [2]

Układ dynamiczny (0.1) jest globalnie aproksymacyjnie sterowalny do zera przy nieujemnych sterowaniach, wtedy i tylko wtedy, gy następujące warunki są jednocześnie spełnione:

Istnieje $w_i\in U$ takie że $B_iw_i=0$ dla każdego i=1,2,3,...

Otoczka wypukła CH(U) ma niepuste wnętrze w przestrzeni R^p.

Układ (0.1) jest sterowalny bez ograniczeń.

$\forall_{i\in Z_1}$ muszą być spełnione warunki 0-0:

Dla każdego współczynnika $i\in S_1\subset Z_1$, odpowiadającego rzeczywistej wartości własnej (0.5) $\left(\alpha_i^{*2}\geq4\beta_i^*\right)$, muszą być spełnione warunki 0-0:

$p\geq2$

$\forall_{l=1,2,\ldots,m_i}\ \exists_{k_1,k_2\in\{1,2,\ldots,p\},\ k_1\neq k_2}\ \left\langle b_{k_1},\phi_{il}\right\rangle_X\left\langle b_{k_2},\phi_{il}\right\rangle_X<0$ dla każdego $i\in S_1$.

$\beta_i^*>0$ dla każdego $i\in S_1$.

Dla każdego współczynnika $i\in S_2=Z_1\setminus S_1\subset Z_1$, odpowiadającego zespolonej wartości własnej (0.5) $\left(\alpha_i^{*2}<4\beta_i^*\right)$, muszą być spełnione warunki 0:

$p\geq1$.

$\forall_{i \in Z_3}$ muszą być spełnione warunki 0-0:

$$\forall_{l=1,2,\dots,m_i} \; \exists_{k_1,k_2 \in \{1,2,\dots,p\},\, k_1 \neq k_2} \left\langle b_{k_1}, \phi_{il} \right\rangle_X \left\langle b_{k_2}, \phi_{il} \right\rangle_X < 0 \quad \text{dla}$$

każdego $i \in Z_3$

$p \geq 2$

Jeżeli $\exists \; i \in Z_2 \cup Z_4$ wtedy układ dynamiczny (0.1) nie jest U-sterowalny do zera przy nieujemnych sterowaniach.

4. PRZYKŁAD ZASTOSOWAŃ W MECHANICE

Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany następujacym liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym:

$$\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} + 2\alpha \frac{\partial^5 x(z,t)}{\partial z^4 \partial t} - 2\beta \frac{\partial^3 x(z,t)}{\partial z^2 \partial t} =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} C_l e^z u_l(t) \qquad (0.6)$$

gdzie:

$$z \in (0,L), \quad t > 0$$

$$\alpha > 0, \; \beta \in [0,1) \qquad (0.7)$$

Warunki początkowe mają postać:

$$x(z,0) = u_0(z), \quad z \in (0,L)$$

$$\frac{\partial x(z,0)}{\partial t} = u_1(z), \quad z \in (0,L)$$

oraz następującymi warunkami brzegowymi:

$$x(0,t) = \frac{\partial x(0,t)}{\partial z} = 0, \quad t > 0$$

$$x(L,t) = \frac{\partial x(L,t)}{\partial z} = 0, \quad t > 0$$

Funkcja x(z,t) jest równa przesunięciu rozważanego elastycznego pręta w kierunku osi Y i w punkcie z (0<z<L).Zdefiniujmy nieograniczony operator różniczkowy $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ następująco:

$$Ax(z) = \frac{\partial^4 x(z)}{\partial z^4}, \quad x \in D(A)$$

$$D(A) = \{ x(z) \in L^2([0,L],R) :$$

$$\left. \int_0^L x^2(z)dz < \infty, x(0) = x'(0) = 0, x(L) = x'(L) = 0 \right\}$$

gdzie:

$$X = L^2([0,L],R)$$

jest przestrzenią Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale [0,L]. Pierwsze dwa wyrazy w równaniu (0.6) są wyrazami służącymi do opisu matematycznego ugięcia belki idealnie sprężystej. Pozostałe dwa wyrazy modelują zjawisko tarcia wewnętrznego. Można udowodnić [8] że operator A spełnia założenia operatora stanu z układu (0.1), a ponadto:

- każda z wartości własnych może być wyznaczona ze wzoru $\lambda_i = \eta_i^4$ gdzie η_i jest dodatnim pierwiastkiem następującego równania:

$$\cosh(\eta L)\cos(\eta L) - 1 = 0 \qquad (0.8)$$

- dla każdej wartości własnej istnieje odpowiadająca funkcja własna operatora A:

$$\phi_i(z) = k\{\cos(\eta_i z) - \cosh(\eta_i z) +$$

$$+ d_i [\sin(\eta_i z) - \sinh(\eta_i z)]\}$$

$$d_i = \frac{\cos(\eta_i L) - \cosh(\eta_i L)}{\sin(\eta_i L) - \sinh(\eta_i L)}$$

$$i = 1,2,3,\dots, \quad z \in (0,L), \quad k > 0$$

w szczególności zachodzi związek:

$$A^{\frac{1}{2}} x = -\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = \left\{ x \in H_0^{2,2}([0,L_0],R) : \frac{d^2}{dz^2} x(z) \in \right.$$

$$\left. \in L^2([0,L_0],R) : x(0) = x(L_0) = 0 \right\}$$

gdzie $H_0^{2,2}$ oznacza przestrzeń Soboleva drugiego rzędu na przedziale $[0, L_0]$ I $D(A) \subset D(A^{\frac{1}{2}})$.

W oparciu o definicję i własności operatora A równanie różniczkowe cząstkowe (0.6) może być przedstawione w postaci liniowego abstrakcyjnego równania różniczkowego w przestrzeni Hilberta X:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \left(2\alpha A + 2\beta A^{\frac{1}{2}} \right) \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = Bu(t) \qquad (0.9)$$

gdzie:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \frac{dx(t)}{dt}, x(t) \in X$$

oraz operator B:

$$B = [b_1 | b_2 | \dots | b_l | \dots | b_p], \quad b_l \in X, \quad l = 1..p$$

ponadto sterowania mają postać:

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)] \in R^p$$

Oznaczenia (0.5) dla układu (0.9)

$$\alpha_i^* = 2\alpha\lambda_i + 2\beta\lambda_i, \; i = 1,2,3,\dots$$

$$\beta_i^* = \lambda_i \qquad i = 1,2,3,\dots \; (0.10)$$

W celu zastosowania twierdzenia 1 [2] do rozpatrywanego układu (0.6) przede wszystkim należy podzielić dziedzinę parametru i między przedziały Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Ze wzorów (0.10) wynika, że widmo układu (0.6) nie należy do przedziałów Z_2, Z_4. W celu rozstrzygnięcia, czy w widmie występują współczynniki

i odpowiadające przedziałowi Z_3 rozpatrzmy równość:

$$\beta_i^* = \frac{\alpha_i^{*2}}{4} \Leftrightarrow (2\alpha\lambda_i + 2\beta\lambda_i)^2 = 4\beta_i^*$$

skąd:

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{1-\beta_i^*}{\alpha_i^*}} \quad (0.11)$$

Uwzględniając nierówności (0.7) prawa strona równania (0.11) jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, więc uwzględniając przypomniane w rozdziale 1 własności operatora A nie można wykluczyć spełnienia równania (0.11), i tym samym przypadku (5) Twierdzenia 1. Ponadto sprawdźmy czy w widmie występują zespolone warości własne (0.5):

$$\alpha_i^{*2} - 4\beta_i^* = \alpha_i \lambda_i^2 + 2\alpha_i \beta_i^* \lambda_i \sqrt{\lambda_i} + \beta_i^* \lambda_i - 4$$

Podobnie z powyższego wyrażenia i nierówności (0.7) wynika, że w widmie (0.5) występują zarówno rzeczywiste, jak i zespolone wartości własne. Ich dokładne wyznaczenie i zaklasyfikowanie jest niemożliwe metodami analitycznymi, ze względu na równanie przestępne (0.8). Z tej samej przyczyny nie jest możliwe sprawdzenie równości (0.11). Niemniej analizując różne przypadki twierdzenia 1 można ustalić warunek wystarczający aproksymacyjnej sterowalności układu (0.6), gdyż widmo układu (0.9) należy do zbioru $Z_1 \cup Z_3$. Stąd warunkiem wystarczający U-sterowalności belki (0.6) przy nieujemnych sterowaniach jest:

$$\underset{i=1,2,\dots,m_i}{\forall} \quad \underset{k_1,k_2 \in \{1,2,\dots,p\},\ k_1 \neq k_2}{\exists} \langle b_{k_1}, \phi_{il} \rangle_X \langle b_{k_2}, \phi_{il} \rangle_X < 0$$

$$p \geq 2$$

W publikacji [8] wykazano, że funkcje własne operatora stanu układu (0.6) są ujemne. Stąd znak iloczynów skalarnych $\langle b_k, \phi_{il} \rangle_X$ przy $b_l(z) = C_l e^z$ zależy od współczynnika C_l i na podstawie punktów (4) oraz (5) twierdzenia 1 można znaleźć wystarczający warunek U-sterowalności:

$$\underset{i=1,2,3,\dots}{\forall} \quad \underset{q,r \in \{1,2,\dots,p\},\ q \neq r}{\exists} C_q C_r < 0, p \geq 2$$

Literatura

[1] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems*. Kluwer, Dordrecht.

[2] Respondek J. (2005) Controllability of dynamical systems with constraints. *Systems & Control Letters*, **54**/4, 293-314.

[3] Respondek J. (2003) The Analisys of Controllability of a Mechanical System With Distributed Parameters. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Automatyka*, 138, 159-172.

[4] Sakawa Y. (1974) Controllability for partial differential equations of parabolic type. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 12, 389-400.

[5] Sakawa Y. (1984) Feedback control of second order evolution equations with damping. *SIAM Journal Control and Optimization*, **22**, 343-361.

[6] Sakawa Y. (1983) Feedback stabilization of linear diffusion system. *SIAM Journal Control and Optimization*, **21**, 5, 667-675.

[7] Tanabe H. (1979) *Equations of Evolution*. Pitman, London.

[8] Wyrwał J. (1996) Analiza układu o parametrach rozłożonych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Automatyka*, 120, 275-299.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4