XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Druk: ARGRAF, Warszawa

ROBOTY

STEROWANIE NIEHOLONOMICZNYM SYSTEMEM ŁAŃCUCHOWYM METODĄ ORIENTOWANIA POLA WEKTOROWEGO†

Maciej MICHAŁEK, Krzysztof KOZŁOWSKI

Politechnika Poznańska, Instytut Sterowania i Inżynierii Systemów
ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań, e-mail:imie.nazwisko@put.poznan.pl

Streszczenie: Artykuł prezentuje propozycję rozwiązania zadania śledzenia trajektorii dla nieholonomicznego systemu łańcuchowego z trójwymiarowym wektorem stanu. Metodologia projektowania prawa sterowania (zwana metodą orientowania pola wektorowego [11, 12]) wynika z analizy postaci pól-generatorów w modelu kinematyki rozważanego systemu i geometrycznej interpretacji jego ewolucji w odpowiedzi na sygnały wejściowe. Praca wyjaśnia proponowaną strategię sterowania oraz zawiera jej symulacyjną weryfikację.

Słowa kluczowe: system łańcuchowy, ograniczenia nieholonomiczne, śledzenie trajektorii, pole wektorowe.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie sterowania układami nieholonomicznymi, czyli silnie nieliniowymi układami z nałożonymi niecałkowalnymi więzami prędkościowymi, stanowi od dłuższego już czasu pole intensywnych badań. Trudności w projektowaniu sterowania dla wspomnianej klasy systemów dynamicznych wynikają z mniejszej liczby sygnałów sterujących w stosunku do liczby sterowanych zmiennych stanu przy jednoczesnej obecności więzów nieholonomicznych. Własność sterowalności rozważanych układów nie determinuje w ogólności ich stabilizowalności – zgodnie z [4] nie istnieje statyczne i ciągłe sprzężenie od stanu pozwalające na stabilizację takich układów w punkcie. Występowanie więzów nieholonomicznych utrudnia również projektowanie praw stabilizacji trajektorii (zadanie śledzenia trajektorii). W ciągu ostatnich kilkunastu lat zaproponowano wiele metod rozwiązujących lokalnie bądź globalnie poszczególne problemy sterowania dla systemów nieholonomicznych [10, 13, 3, 15]. Metody te wykorzystują takie techniki, jak linearyzacja dynamiczna [5, 16, 18], transformacje modeli do innych przestrzeni [2, 1], teoria stabilności Lapunowa [1, 9, 6, 7], teoria algebr i grup Liego [14] i inne. Należy zauważyć, że część proponowanych w literaturze rozwiązań wymaga nałożenia znacznych ograniczeń na sygnały referencyjne lub stosuje się do jednego tylko wybranego modelu systemu nieholonomicznego. Ciągle zatem otwartymi problemami pozostają: unifikacja podejścia do sterowania całymi podklasami układów nieholonomicznych (atrakcyjne podejście gwarantujące stabilność praktyczną zaproponowano np. w pracy [14]), kwestia syntezy regulatorów oraz jakość regulacji w stanach przejściowych. Problemy z syntezą praw sterowania wynikają głównie ze stosowania abstrakcyjnego aparatu matematycznego do formułowania prawa sterowania i tym samym braku fizykalnej interpretacji poszczególnych jego składników. W niniejszej pracy zaprezentowana zostanie propozycja rozwiązania zadania śledzenia trajektorii dla nieholonomicznego układu łańcuchowego:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

z trójwymiarowym wektorem stanu $x \triangleq [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ i dwoma sterowaniami u_1, u_2 z zastosowaniem metody orientowania pola wektorowego. Metoda ta opiera się na prostej analizie postaci pól-generatorów bezdryfowego modelu kinematyki (1) oraz na geometrycznej interpretacji ewolucji rozważanego systemu w odpowiedzi na sygnały sterujące. Zastosowanie metody orientowania pól wektorowych dotyczy całej podklasy systemów nieholonomicznych o specyficznych własnościach modelu, a jej zastosowanie do rozwiązania zadania śledzenia dla jednokołowego robota mobilnego oraz nieholonomicznego manipulatora można znaleźć w pracach [11, 12]. Rozważany model systemu łańcuchowego stanowi ważny przykład próby unifikacji podejścia do sterowania systemami nieholonomicznymi z tego względu, iż bardzo wiele takich systemów można (przynajmniej lokalnie) zastąpić modelem łańcuchowym poprzez odpowiednią transformację wektora stanu oraz zmianę definicji sygnałów wejściowych (przykłady można znaleźć w pracach [2, 6, 17]).

2. KINEMATYKA SYSTEMU

W dalszej części pracy rozważać będziemy 3-wymiarowy układ łańcuchowy o wektorze stanu $x \triangleq [x_1\ x_2\ x_3]^T \in$

†Praca finansowana ze środków MNiI–KBN w latach 2004-2006 jako projekt badawczy 3 T11A 009 27.

$\mathbb{R}^3$ oraz sterowaniach $u = [u_1\ u_2]^T \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\triangleq u_2, \\ \dot{x}_2 &\triangleq u_1, \\ \dot{x}_3 &\triangleq x_2 u_2, \end{aligned} \tag{2}$$

który można zapisać w ogólnej formie kinematyki bezdryfowej:

$$\dot{x} \triangleq g_1 u_1 + g_2(x) u_2, \tag{3}$$

gdzie w tym przypadku pola-generatory mają postać

$$g_1 = [0\ 1\ 0]^T, \quad g_2(x_2) = [1\ 0\ x_2]^T. \tag{4}$$

Z pierwszego i trzeciego równania w (2) dostajemy następujące niecałkowalne ograniczenia prędkościowe:

$$\dot{x}_3 - x_2 \dot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x)\dot{x} = 0, \tag{5}$$

gdzie $A(x) = [-x_2\ 0\ 1]$ jest macierzą ograniczeń.

Wyróżnimy w układzie (2) 2-wymiarowy podsystem:

$$\dot{x}^* \triangleq g_2^*(x_2) u_2 \tag{6}$$

utworzony poprzez wycięcie drugiego wiersza w (3), gdzie:

$$x^* \triangleq [x_1\ x_3]^T, \qquad g_2^*(x_2) \triangleq [1\ x_2]^T. \tag{7}$$

Zakładamy ponadto, że model referencyjny definiujący trajektorię referencyjną ma strukturę zgodną z (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1t} &\triangleq u_{2t}, \\ \dot{x}_{2t} &\triangleq u_{1t}, \\ \dot{x}_{3t} &\triangleq x_{2t} u_{2t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Trajektoria referencyjna (tzw. trajektoria dopuszczalna[1]) $x_t(t) \triangleq [x_{1t}(t)\ x_{2t}(t)\ x_{3t}(t)]^T$ wynika z całkowania modelu (8) w całym czasowym horyzoncie sterowania $t \in [0, \tau]$ oraz zakłada się, że jest ona ustawicznie pobudzająca[2].

3. STRATEGIA STEROWANIA

Spróbujmy zinterpretować geometrycznie postać i potencjalną ewolucję systemu (3). Pierwsze pole-generator g_1 jest polem stałym skierowanym wzdłuż osi prędkości $\dot{x}_2$. Drugie pole-generator $g_2(x_2)$ jest funkcją tylko zmiennej x_2, która determinuje chwilową orientację (kierunek) tego pola w $\mathbb{R}^2$ (precyzyjniej w $\mathbb{R}^3$, ale druga składowa tożsamościowo równa jest zero – orientacja g_2 w $\mathbb{R}^3$ jest tożsama z orientacją g_2^* w $\mathbb{R}^2$). Skoro zmienna x_2 określa kierunek $g_2(x_2)$, to nazwiemy ją *zmienną orientującą*, a sterowanie u_1, które bezpośrednio wpływa na zmianę x_2 – *sterowaniem orientującym*. Sterowanie u_2 natomiast ma wpływ na zmianę jedynie zmiennych x_1 oraz x_3 wzdłuż pola $g_2(x_2)$. Można powiedzieć, że u_2 *popycha* podsystem (6) wzdłuż generatora $g_2(x_2)$, zatem u_2 nazwiemy sterowaniem *popychającym*. Załóżmy teraz, że dany jest pewien wektor zbieżności $h = [h_1\ h_2\ h_3]^T \in \mathbb{R}^3$ definiujący dystans[3] do trajektorii referencyjnej $x_t^* \triangleq [x_{1t}\ x_{3t}]^T$ oraz pożądany kierunek ewolucji systemu (2) gwarantujący zbieżność (2) do trajektorii referencyjnej x_t. Zadanie śledzenia można teraz podzielić na dwa podzadania: zadaniem sterowania u_1 będzie wymuszenie takiej ewolucji zmiennej x_2, by bieżący kierunek pola $g_2(x_2)$ nakładać na kierunek wektora h, co można zapisać jako:

$$u_1 : \left\{ \lim_{t\to\infty} \left(g_2(x_2)\, k = h\right) \right\}, \tag{9}$$

gdzie $k = k() \neq 0$ oznacza pewną skalarną funkcję. Podstawiając odpowiednie postaci pól do powyższej relacji oraz przyrównując poszczególne współrzędne tych pól uzyskamy następujące warunki wskazujące na sposób projektowania sterowania u_1 [11, 12]:

$$u_1 : \left\{ \lim_{t\to\infty} \left(x_2 = h_3/h_1\right) \wedge \lim_{t\to\infty} \left(h_2 = 0\right) \right\}, \tag{10}$$

Zadaniem sterowania u_2 pozostanie popychanie podsystemu (6) wzdłuż chwilowego kierunku $g_2(x_2)$ (z tego względu, że nałożenie kierunku $g_2(x_2)$ na h nie może być zrealizowane natychmiastowo, uzasadnione wydaje się popychanie podsystemu (6) proporcjonalnie do chwilowego ortogonalnego rzutu wektora zbieżności na kierunek generatora $g_2(x_2)$). Postać wektora zbieżności h będzie miała decydujący wpływ na charakter stanów przejściowych systemu (2), czyli sposób dochodzenia do trajektorii referencyjnej. Dodatkowo konstrukcja wektora h winna zapewniać zbieżność zmiennej x_2 do wartości referencyjnej x_{2t} w pobliżu trajektorii referencyjnej $(x_{1t}, x_{3t}) \in \mathbb{R}^2$. W tym momencie należy zauważyć, że pole $g_2(x_2) = [g_1\ g_2\ g_3]^T = [1\ 0\ x_2]^T$ nie jest w pełni orientowalne [11], ponieważ jego pierwsza składowa nie jest funkcją zmiennej orientującej[4]. Nierealizowalny w układzie (2) jest jednak tylko jeden kierunek zdefiniowany polem wektorowym $g_{2s} = [0\ 0\ x_2]^T$, $\forall |x_2| < \infty$. Skoro w trakcie procesu orientowania pola $g_2(x_2)$ jego kierunek nakładany jest na chwilowy kierunek wektora zbieżności h, to kierunek osobliwy g_{2s} odpowiadać będzie wektorom zbieżności z zerową pierwszą współrzędną: $h_s = \{h : h_1 = 0\}$ – kierunek ten również nazwiemy osobliwym. Zerowanie się składowej h_1 w wektorze h będzie skutkować w tym przypadku osobliwością sterowania. Problem osobliwości będzie rozważony w dalszej części artykułu.

[1] Trajektoria dopuszczalna spełnia ograniczenia postaci (5).

[2] Wyjaśnienie ustawicznego pobudzenia dla trajektorii referencyjnej zawarto w dalszej części pracy.

[3] Jak się okaże w dalszej części pracy, dystans ten jest odległością w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

[4] Zgodnie z (4) pierwsza składowa $g_2(x_2)$ jest równa 1, lecz w rzeczywistości mamy dodatkowo możliwość wpływu na znak składowej pola $sgn(u_2)g_2(x_2)$ poprzez znak sterowania u_2 (por. (3)).

4. PRAWO STEROWANIA

Biorąc pod uwagę (10) zaproponujmy następującą postać wektora zbieżności:

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_p e_1 + \dot{x}_{1t} \\ x_{2d} - x_2 \\ k_p e_3 + \dot{x}_{3t} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

gdzie $k_p > 0$ jest parametrem projektowym, a sygnał x_{2d} definiuje zadaną orientację (kierunek) pola wektorowego $\boldsymbol{g}_2(x_2)$:

$$x_{2d} \triangleq \frac{h_3}{h_1} \overset{(11)}{=} \frac{k_p e_3 + \dot{x}_{3t}}{k_p e_1 + \dot{x}_{1t}}, \qquad h_1 \neq 0. \tag{12}$$

Zgodnie z rozważaniami z poprzedniego punktu sterowanie u_1 winno gwarantować realizację zadanego kierunku pola $\boldsymbol{g}_2(x_2)$. Skoro kierunek ten jest definiowany przez (12), to propozycja sterowania orientującego jest następująca:

$$u_1 \triangleq k_1(x_{2d} - x_2) + \dot{x}_{2d}, \tag{13}$$

gdzie $k_1 > 0$ stanowi parametr projektowy oraz

$$\dot{x}_{2d} \overset{(12)}{=} \frac{\dot{h}_3 h_1 - h_3 \dot{h}_1}{h_1^2}, \tag{14}$$

gdzie (por. (11), (2) i (8)):

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= k_p(u_{2t} - u_2) + \ddot{x}_{1t}, && (15) \\ \dot{h}_3 &= k_p(x_{2t}u_{2t} - x_2 u_2) + \ddot{x}_{3t}. && (16) \end{aligned}$$

Zadaniem sterowania u_2 ma być popychanie podsystemu (6). Uwzględniając wcześniejsze rozważania, niech działanie u_2 będzie proporcjonalnie do chwilowego rzutu wektora $\boldsymbol{h}^* = [h_1\ h_3]^T \in \mathbb{R}^2$ na bieżący kierunek pola $\boldsymbol{g}_2^*(x_2)$. Weźmy zatem:

$$u_2 \triangleq k_2 \|\boldsymbol{h}^*\| \cos\alpha, \qquad \cos\alpha \triangleq \frac{\boldsymbol{g}_2^{*T}\boldsymbol{h}^*}{\|\boldsymbol{g}_2^*\|\,\|\boldsymbol{h}^*\|}, \tag{17}$$

gdzie: $\alpha\angle(\boldsymbol{g}_2^*, \boldsymbol{h}^*)$ oraz

$$\begin{aligned} k_2 &\triangleq \frac{1}{\|\boldsymbol{g}_2^*\|} \overset{(7)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}, && (18) \\ \|\boldsymbol{h}^*\| &= \sqrt{h_1^2 + h_3^2}. && (19) \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że propozycję (17)-(18) daje się zapisać w prostszej postaci:

$$u_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2^{*T}\boldsymbol{h}^*}{1 + x_2^2}, \tag{20}$$

która jest dobrze określona także dla $\|\boldsymbol{h}^*\| = 0$.

Poniżej przedstawiona zostanie propozycja prawa stabilizacji trajektorii systemu (2) przy założeniu, że wektor zbieżności nie przechodzi przez kierunek osobliwy: $\forall_{t\geqslant 0}: \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{h}_s$.

Propozycja 1 *Zakładając, że trajektoria referencyjna $\boldsymbol{x}_t(t)$ jest nieustannie pobudzająca, czyli:*

$$\forall_{t\geqslant 0}: \|\dot{\boldsymbol{x}}_t^*\| = \sqrt{\dot{x}_{1t}^2 + \dot{x}_{3t}^2} \neq 0 \overset{(8)}{\Rightarrow} |u_{2t}| \neq 0, \tag{21}$$

zakładając ponadto ciągłość i ograniczoność sygnałów referencyjnych

$$x_{it} \in C^2,\ i = 1,2,3, \qquad u_{1t}, u_{2t} \in \mathcal{L}_\infty \tag{22}$$

oraz niezerową wartość pierwszej współrzędnej wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$:

$$\forall_{t\geqslant 0}: h_1 \neq 0, \tag{23}$$

prawo sterowania definiowane przez (13)-(19) zastosowane do systemu (2) gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia

$$\boldsymbol{e} = [e_1\ e_2\ e_3]^T \triangleq [x_{1t} - x_1 \quad x_{2t} - x_2 \quad x_{3t} - x_3]^T$$

do zera dla $t \to \infty$.

Dowód 1 *Rozważmy na początku zachowanie się błędu kierunku $e_{2d} = x_{2d} - x_2$ pola $\boldsymbol{g}_2^*(x_2)$. Podstawiając (13) do drugiego równania w (2) otrzymujemy:*

$$\dot{e}_{2d} + k_1 e_{2d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x_2 = x_{2d}. \tag{24}$$

Zatem sterowanie (13) gwarantuje nakładanie kierunku pola $\boldsymbol{g}_2$ na chwilowy kierunek wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$. Rozważmy teraz ewolucję błędu $\boldsymbol{e}^* = [e_1\ e_3]^T \triangleq \boldsymbol{x}_t^* - \boldsymbol{x}^*$. Bezpośrednie połączenie zależności:

$$\boldsymbol{h}^* \overset{(11)}{=} k_p \boldsymbol{e}^* + \dot{\boldsymbol{x}}_t^*, \tag{25}$$

oraz

$$\dot{\boldsymbol{e}}^* = \dot{\boldsymbol{x}}_t^* - \dot{\boldsymbol{x}}^* \tag{26}$$

daje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{\boldsymbol{e}}^* + k_p \boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{h}^* - \dot{\boldsymbol{x}}^*. \tag{27}$$

Wykonując elementarne obliczenia można pokazać, że prawdziwe są relacje (patrz Dodatek):

$$\|\boldsymbol{r}\|^2 = \|\boldsymbol{h}^*\|^2 (1 - \cos^2\alpha), \tag{28}$$

$$\lim_{x_2 \to x_{2d}} (1 - \cos^2\alpha) = 0. \tag{29}$$

Zdefiniujmy następującą skalarną funkcję klasy K_∞ [19]:

$$V(\boldsymbol{e}^*) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{*T}\boldsymbol{e}^*, \tag{30}$$

której pochodną wzdłuż trajektorii (27) można oszacować jak następuje:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{e}^{*T}\dot{\boldsymbol{e}}^* \overset{(27)}{=} \boldsymbol{e}^{*T}(-k_p\boldsymbol{e}^* + \boldsymbol{r}) = \\ &= -k_p \boldsymbol{e}^{*T}\boldsymbol{e}^* + \boldsymbol{e}^{*T}\boldsymbol{r} \leqslant \\ &\leqslant -k_p\|\boldsymbol{e}^*\|^2 + \|\boldsymbol{e}^*\|\,\|\boldsymbol{r}\| \overset{(28)}{=} \\ &\overset{(28)}{=} -k_p\|\boldsymbol{e}^*\|^2 + \|\boldsymbol{e}^*\|\,\|\boldsymbol{h}^*\|\gamma \leqslant \\ &\leqslant -k_p\|\boldsymbol{e}^*\|^2 + \|\boldsymbol{e}^*\|(k_p\|\boldsymbol{e}^*\| + \|\dot{\boldsymbol{x}}_t^*\|)\gamma \end{aligned}$$

gdzie: $\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \leqslant 1\ \forall_{\alpha\in T^1}$. Zatem ostatecznie:

$$\dot{V} \leqslant -W(\boldsymbol{e}^*, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*, \gamma), \tag{31}$$

gdzie ciągła funkcja:

$$W(\boldsymbol{e}^*, \dot{\boldsymbol{x}}_t^*, \gamma) = k_p(1-\gamma)\|\boldsymbol{e}^*\|^2 - \|\boldsymbol{e}^*\|\,\|\dot{\boldsymbol{x}}_t^*\|\gamma \tag{32}$$

jest dodatnio określona dla

$$\|e^*\| > \Gamma, \quad \Gamma = \frac{\gamma \|\dot{x}_t^*\|}{k_p(1-\gamma)}. \tag{33}$$

Zgodnie z twierdzeniam La Salla-Yoshizawy[5] *[19] zachodzi*[6]*:*

$$\forall_{\|e^*\|>\Gamma} : \lim_{t\to\infty} W \to 0_+ \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|e^*\| \to \Gamma_+. \tag{34}$$

Zatem $\|e^*\|$ *nie wzrasta dla* $\gamma < 1$. *Co więcej, na podstawie (24) i (29) mamy:*

$$\lim_{t\to\infty} \gamma = 0 \overset{(33)}{\Rightarrow} \lim_{t\to\infty} \Gamma = 0 \overset{(34)}{\Rightarrow} \lim_{t\to\infty} \|e^*\| = 0. \tag{35}$$

Z definicji (11), (12) i (8) oraz z wniosku (24) wynika, że:

$$\lim_{e^*\to 0} x_{2d} = x_{2t} \Rightarrow \lim_{x_2\to x_{2d}, e^*\to 0} x_2 = x_{2t}. \tag{36}$$

Zatem ostatecznie wnioskuje się, że

$$\lim_{t\to\infty} e_2 = 0 \tag{37}$$

i tym samym uchyby $e = [e_1\, e_2\, e_3]^T$ *zmierzają jednostajnie asymptotycznie do zera dla* $t \to \infty$ *i* $h_1 \neq 0$. *Z założeń (22) i (23) oraz równań (13), (20), (14), (11), (36), (37) oraz (8) wynika, że sterowania* u_1, u_2 *są ciągłe i ograniczone oraz:* $\lim_{t\to\infty} u_i = u_{it}$, $i = 1, 2$. □

Uwaga 1 Powyższe rozważania pokazują asymptotyczną zbieżność błędu e^* do zera nie dając żadnej informacji o szybkości tej zbieżności. Jak pokażą wyniki symulacyjne, w istocie zbieżność ta jest szybka, a wskazywać na ten fakt może bezpośrednia analiza równania (27). Mianowicie, skoro prawa strona równania różniczkowego w (27) zmierza do zera dowolnie szybko (zgodnie z (24) i (29)), to ewolucja błędu e^* jest zbliżona do dynamiki pierwszego rzędu z zerową prawą stroną równania[7] (27).

Uwaga 2 Proponowane wyżej prawo sterowania staje się osobliwe, gdy w trakcie ewolucji sterowanego systemu (2) wymagane jest przejście przez kierunek osobliwy $\boldsymbol{h}_s = \{\boldsymbol{h} : h_1 = 0\}$. Wówczas sygnał zadany x_{2d} z (12), a tym samym sterowanie u_1 z (13) stają się nieograniczone. Zdefiniujmy pewien obszar w przestrzeni błędu e_1:

$$D = \{e_1 : (e_1 u_{2t} < 0) \wedge (k_p |e_1| > |u_{2t}|)\}. \tag{38}$$

Zgodnie z definicją (11) $h_1 = k_p e_1 + \dot{x}_{1t}$, a warunki dostateczne na przejście przez osobliwość $h_1 = 0$ można określić następująco:

$$e_1 \in D \Rightarrow \exists_{\bar{t}<\infty} : h_1(\bar{t}) = 0. \tag{39}$$

Problem osobliwości można rozwiazać w jeden z następujących sposobów:
a) poprzez unikanie osobliwości – postać pierwszego równania w (2) pozwala na zastosowanie chwilowo takiego sterowania $u_2 = \overline{u}_2$, by wyprowadzić e_1 z obszaru D,
b) poprzez modyfikację pewnych sygnałów w pobliżu osobliwości tak, aby współrzędna h_1 wektora zbieżności przeszła w sposób ciągły przez punkt osobliwy, a sygnały zmodyfikowane *przeskoczyły* punkt osobliwy [8].
Oba sposoby uchylają własność ciągłości sterowań u_1, u_2 na rzecz ciągłości odcinkami.

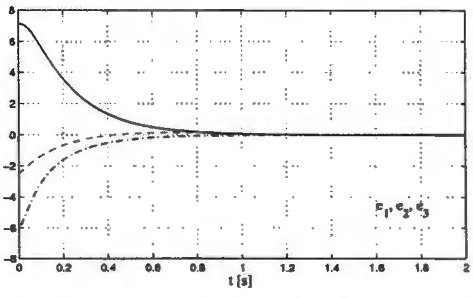
[5] Funkcja (30) spełnia warunek twierdzenia La Salla-Yoshizawy [19] postaci: $\gamma_1(\|e^*\|) \leqslant V(e^*) \leqslant \gamma_2(\|e^*\|)$, dla $\gamma_1(\|e^*\|) = \gamma_2(\|e^*\|) = V(e^*)$, gdyż (30) jest funkcją klasy K_∞.

[6] Zgodnie z (24) i (29) istnieje skończona chwila $t_\gamma < \infty$ taka, że $\forall_{t\geqslant t_\gamma} : 0 < \gamma < 1 \Rightarrow \forall_{t\geqslant t_\gamma} : \Gamma < \infty$.

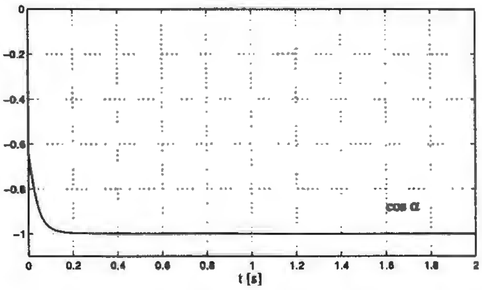
[7] Zakładając brak przejścia przez osobliwość.

5. WYNIKI SYMULACYJNE

Jakość działania zaproponowanego prawa sterowania pokazują uzyskane wyniki symulacyjne wykonane dla dyskretnej dziedziny czasu w horyzoncie $\tau = 20[s]$ ze stałym okresem próbkowania $T_p = 0.005[s]$ dla warunków początkowych: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x_{1t}(0) = -6.1$, $x_{2t}(0) = -2.5$, $x_{3t}(0) = 7.1$. Podczas symulacji przyjęto następujące wartości parametrów: $k_p = 5$, $k_1 = 5$. Trajektoria referencyjna wynikała z numerycznego całkowania równań (8) ze stałym okresem próbkowania $T_p = 0.005[s]$ dla sterowań referencyjnych $u_{1t} = \sin 0.5t$, $u_{2t} = -0.7$.

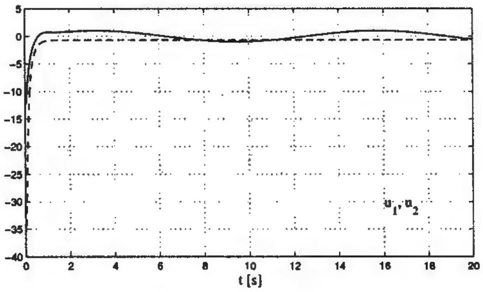


Rysunek 1. Skrócone przebiegi błędów śledzenia: e_1(-.-), e_2(--), e_3(–) dla przypadku bez przejścia przez osobliwość $h_1 = 0$.



Rysunek 2. Skrócony przebieg $\cos\alpha$ dla przypadku bez przejścia przez osobliwość $h_1 = 0$.

Rys. 1 do 3 przedstawiają uzyskane przebiegi dla przypadku nieprzechodzenia przez kierunek osobliwy. Na uwagę zasługuje szybka zbieżność błędów śledzenia do zera oraz ograniczoność i mały koszt energetyczny sterowań (ewolucja systemu w stanach przejściowych nie wykazuje oscylacji). Należy zauważyć, iż kierunek pola g_2 został w przybliżeniu nałożony na kierunek wektora zbieżności $\boldsymbol{h}$ już po około $t = 0.2[s]$ (rys.2), zatem przed osiagnięciem przez błędy śledzenia otoczenia zera (rys.1), co potwierdza zasadność strategii sterowania przedstawionej w rozdziale 3. Wartość $\cos\alpha$ zmierza asymptotycznie do -1 ze względu na strategię *popycha-*



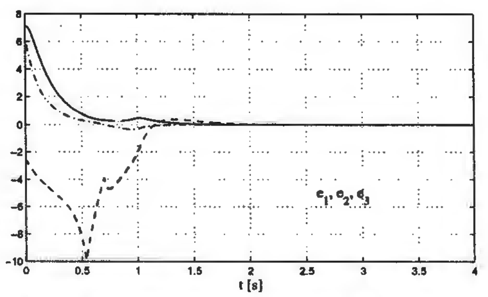
Rysunek 3. Przebiegi sygnałów sterujących: u_1(–), u_2(- -) dla przypadku bez przejścia przez osobliwość $h_1 = 0$.

nia w tył (ruchu *do tyłu*) przyjętą dla systemu referencyjnego (sterowanie $u_{2t} < 0$).

Przeprowadzono także symulacje dla przypadku, w którym wymagane jest przejście przez osobliwość $h_1 = 0$. Wszystkie wartości parametrów oraz sterowania referencyjne pozostały takie, jak w poprzednim przypadku. Zmianie uległy natomiast warunki początkowe, mianowicie: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x_{1t}(0) = 6.1$, $x_{2t}(0) = -2.5$, $x_{3t}(0) = 7.1$. Łatwo zauważyć, że błąd śledzenia $e_1(0)$ należy do obszaru D (definicja (38)). W celu przejścia przez osobliwość zastosowano algorytm tunelowy [8]: w otoczeniu osobliwości dla $|h_1| \leqslant \delta$ (gdzie $\delta = 0.9|u_{2t}| = 0.63$) przyjęto $x_{2d} = h_3/(-sgn(h_1(\bar{t}))\delta)$, $\dot{x}_{2d} = \dot{h}_3/(-sgn(h_1(\bar{t}))\delta)$, gdzie

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \\ -1, & \text{dla} \quad x < 0, \end{cases} \tag{40}$$

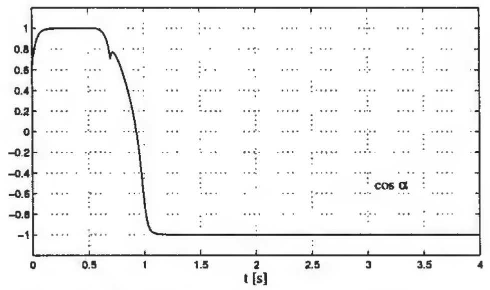
a $\bar{t}$ oznacza chwilę wejścia $|h_1|$ w tunel δ. Poza tunelem δ stosowano definicje wszystkich sygnałów, jak w przypadku bez osobliwości. Uzyskane wyniki przedstawiają rysunki 4 do 7. W przebiegach ograniczonych sygnałów sterujacych widać dwa punkty nieciągłości (rys.6) wynikające z przechodzenia składowej h_1 przez granice tunelu $\pm\delta$ (rys.7). Ostatecznie jednak cel sterowania został osiągnięty (również w tym przypadku zbieżność błędów jest szybka) – rys.4. Rys. 7 ukazuje zjawisko *przeskakiwania* przez sygnał x_{2d} punktu osobliwego $h_1 = 0$ przy jednoczesnym ciągłym przejściu h_1 przez punkt $h_1 = 0$.



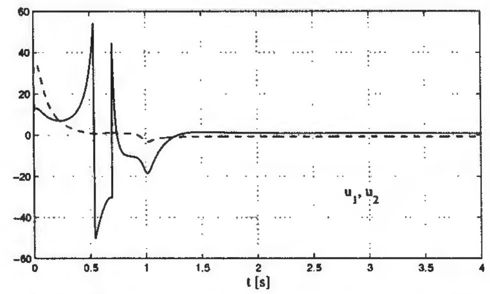
Rysunek 4. Skrócone przebiegi błędów śledzenia: e_1(-.-), e_2(- -), e_3(–) z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$.

6. PODSUMOWANIE

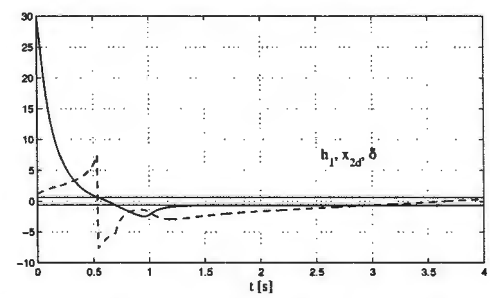
W artykule zaprezentowano prawo stabilizacji trajektorii wynikające z zastosowania metody orientowania pól



Rysunek 5. Skrócony przebieg cos α z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$.



Rysunek 6. Skrócone przebiegi sygnałów sterujących: $u_1(-)$, $u_2(--)$ z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$.



Rysunek 7. Skrócone przebiegi następujących sygnałów: $h_1(-)$, $x_{2d}(--)$ z przejściem przez osobliwość $h_1 = 0$. Zaznaczono tunel $\pm\delta$ w pobliżu osobliwości.

wektorowych wprowadzonej w pracach [11, 12]. Metoda ta wykorzystuje geometryczną interpretację postaci i potencjalnej ewolucji modelu kinematyki rozważanego systemu. Stosowanie metody orientowania pól wektorowych do układów łańcuchowych wiąże się z występowaniem osobliwości ze względu na niepełną orientowalność pola generatora g_2. Wyniki symulacyjne pokazały efektywność proponowanego podejścia – dobrą jakość statyczną i dynamiczną procesu stabilizacji trajektorii w przypadku bez osobliwości. Zaproponowano również dwa ogólne sposoby rozwiązania problemu osobliwości, a skuteczność jednej z metod (zaczerpniętej z pracy [8]) potwierdzono wynikami symulacji.

Wydaje się, że metoda orientowania pól wektorowych stanowi pewne uogólnienie sterowania we współrzędnych biegunowych. Charakterystycznymi cechami prawa sterowania uzyskanego w oparciu o tę metodę są: prostota syntezy regulatora (strojeniu podlegają tylko dwa parametry k_p i k_1 odpowiadające za szybkość zbieżności odpowiednich błędów do zera), geometryczna interpretacja poszczególnych składników sterowania, *naturalny* ruch systemu w stanach przejściowych skutkujący stosunkowo małym kosztem energetycznym sterowań (w porównaniu do innych metod znanych z literatury). Zaproponowane sterowanie dla trójwymiarowego systemu łańcuchowego daje się bezpośrednio uogólnić na system czterowymiarowy (i więcej wymiarowy) lecz wraz ze wzrostem różnicy między liczbą zmiennych sterowanych a liczbą sterowań należy spodziewać się zwiększenia kosztu sterowania (zwłaszcza sterowania orientującego). Przyszłe prace skoncentrowane zostaną na próbie rozwiązania zadania stabilizacji w punkcie w oparciu o metodę orientownia pól wektorowych.

DODATEK

Wyprowadzenie zależności (28):

$$r \overset{(27)}{=} h^* - \dot{x}^* \overset{(6)}{=} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} u_2 \overset{(17)}{=}$$

$$\overset{(17)}{=} \| h^* \| \begin{bmatrix} \frac{h_1}{\| h^* \|} - k_2 \cos\alpha \\ \frac{h_3}{\| h^* \|} - x_2 k_2 \cos\alpha \end{bmatrix} = \| h^* \| \begin{bmatrix} r_{h1} \\ r_{h2} \end{bmatrix},$$

zatem

$$\begin{aligned} \| r \|^2 &= \| h^* \|^2 (r_{h1}^2 + r_{h2}^2) = \\ &= \| h^* \|^2 \left[1 + (1 + x_2^2) k_2^2 \cos^2\alpha - \right. \\ &- \left. 2k_2 \cos\alpha \frac{h_1 + h_3 x_2}{\| h^* \|} \right] \overset{(18)}{=} \\ &\overset{(18)}{=} \| h^* \|^2 \left(1 + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha \right) = \\ &= \| h^* \|^2 \left(1 - \cos^2\alpha \right). \end{aligned}$$

Wyprowadzenie zależności (29):

$$1 - \cos^2\alpha \overset{(17)}{=} 1 - \frac{(h_1 + h_3 x_2)^2}{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2)} =$$

$$= \frac{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2) - h_1^2 - 2h_1 h_3 x_2 - h_3^2 x_2^2}{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2)} =$$

$$= \frac{(h_3 - h_1 x_2)^2}{(1 + x_2^2)(h_1^2 + h_3^2)}.$$

Dla $x_2 \to x_{2d}$ mamy $x_2 \overset{(12)}{\to} h_3/h_1$, co po podstawieniu do powyższej formuły daje wynik (29).

TRACKING CONTROL WITH VECTOR FIELD ORIENTATION FOR 3-D CHAINED SYSTEM

Abstract: The article presents a proposition for solving a trajectory tracking task for the 3-D nonholonomic chained system. The control design methodology (*vector field orientation method* [11, 12]) comes from a simple analysis of vector fields (generators) of the considered kinematics and from a geometrical interpretation of the system evolution. The control strategy description and simulation results are included in the paper.

Literatura

[1] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, A. Balestrino. Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2:27–35, 1995.

[2] A. Astolfi. *Asymptotic stabilization of nonholonomic systems with discontinuous control.* Praca doktorska, Swiss Federal Intitute of Technology, Zurich, 1995.

[3] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control.* Systems and Control. Springer, New York, 2003.

[4] R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. R. W. Brockett, R. S. Millman, H. H. Sussmann, redaktorzy, *Differential Geometric Control Theory*, strony 181–191. Birkhauser, Boston, 1983.

[5] B. d'Andrea Novel, G. Campion, G. Bastin. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. *International Journal of Robotics Research*, strony 543–559, 1995.

[6] C. Canudas de Wit, H. Khennouf, C. Samson, O. J. Sørdalen. Nonlinear control design for mobile robots. Y.F. Zheng, redaktor, *Recent Trends in Mobile Robots*, wolumen 11, rozdział 5, strony 121–156. World Scientific, Singapore, 1993.

[7] W. E. Dixon, A. Behal, D. M. Dawson, S. P. Nagarkatti. *Nonlinear control of engineering systems. A Lyapunov-based approach.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[8] I. Dulęba. *Metody i algorytmy planowania ruchu robotów mobilnych i manipulacyjnych.* Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2001.

[9] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, T. Noguchi. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, strony 384–389, Maj 1990.

[10] I. Kolmanowsky, N. H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems*, strony 20–36, Grudzień 1995.

[11] M. Michałek, K. Kozłowski. Sterowanie nieholonomicznym robotem mobilnym metodą orientowania pola wektorowego. *VIII Krajowa Konferencja Robotyki*, 2004.

[12] M. Michałek, K. Kozłowski. Tracking controller with vector field orientation for 3-D nonholonomic manipulator. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 181–189, Puszczykowo, 2004.

[13] P. Morin, C. Samson. Feedback control of nonholonomic wheeled vehicles. A survey. K. Kozłowski, K. Tchoń, redaktorzy, *Archives of Control Sciences*, wolumen 12(XLVIII), strony 7–36. Silesian University of Technology, 2002.

[14] P. Morin, C. Samson. Practical stabilization of drifless systems on Lie groups: The transverse function approach. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 48(9):1496–1508, 2003.

[15] P. Morin, C. Samson. Trajectory tracking for nonholonomic vehicles: overview and case study. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 139–153, Puszczykowo, 2004.

[16] G. Oriolo, A. De Luca, M. Venditteli. WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation and experimental validation. *IEEE Transactions On Control System Technology*, strony 835–852, Listopad 2002.

[17] O. J. Sørdalen, Y. Nakamura, W. J. Chung. Control of a nonholonomic manipulator. L. Sciavicco, C. Bonivetto, F. Nicolo, redaktorzy, *Robot Control 1994*, strony 279–284. Pergamon, Capri, Italy, 1994.

[18] K. Tchoń, M. Kabała, M. Wnuk. Algorytm śledzenia trajektorii robota mobilnego mk. *XIV Krajowa Konferencja Automatyki*, strony 663–668, Zielona Góra, 2002.

[19] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne. Modele, planowanie ruchu, sterowanie.* Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4