



**Instytut Badań Systemowych
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

**Barbara Maźbic-Kulma
Anna Pogorzelec
Ewa Komorowska**

**LOKALIZACJA OBIEKTÓW
Wybrane modele,
algorytmy i zastosowania**



LOKALIZACJA OBIEKTÓW

Wybrane modele, algorytmy i zastosowania

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 39

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2005

**Barbara Maźbic-Kulma
Anna Pogorzelec
Ewa Komorowska**

**LOKALIZACJA OBIEKTÓW
Wybrane modele, algorytmy i zastosowania**

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Ireneusz Nykowski

Dr hab. Włodzimierz Ogryczak (prof. PW)

© Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2005

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw
tel. 837-68-22

ISBN 83-85847-98-7

ISSN 0208-8029

3. METODY ROZWIĄZYWANIA WYBRANYCH ZAGADNIENÍ LOKALIZACYJNYCH

3.1. Metody rozwiązywania zadań lokalizacji jednopoziomowej

3.1.1. Model lokalizacji jednopoziomowej

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m k_i y_i \quad (3.1.1)$$

ograniczenia:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1.5)$$

gdzie:

x_{ij} - udział i -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania j -tego odbiorcy

$y_i = \begin{cases} 1 & \text{– jeśli lokalizacja } i \text{ – tego dostawcy jest rozpatrywana} \\ 0 & \text{– w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

c_{ij} - jednostkowe koszty inwestycyjno-eksploatacyjne gdy zapotrzebowanie j -tego odbiorcy jest realizowane przez i -tego dostawcę ($c_{ij} = t_{ij} + s_i$),

k_i - koszty stałe dla odbiorcy i ,

b_j - zapotrzebowanie j -tego odbiorcy,

a_i - możliwości i -tego dostawcy,

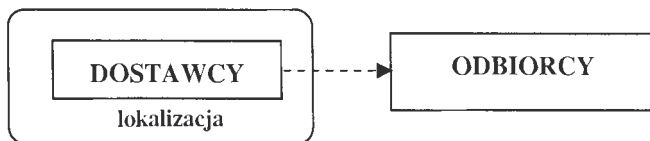
m - liczba potencjalnych dostawców,

n - liczba odbiorców.

Funkcja celu (3.1.1) jest sumą kosztów transportu i lokalizacji. n ograniczeń (3.1.2) gwarantuje spełnienie zapotrzebowania. m nierówności (3.1.3) gwarantuje, że możliwości dostaw nie zostaną przekroczone.

Dla ustalonych $y_j = 1$ problem może zostać zredukowany do klasycznego problemu transportowego, który jest w prosty sposób rozwiązywany.

Opisany powyżej model można zobrazować następująco:



Model ten jest najprostszym przykładem w klasie jednopoziomowych zadań lokalizacji.

W literaturze istnieje wiele różnych sformułowań zagadnienia lokalizacji z ograniczonymi możliwościami dostaw. Najbardziej ogólne sformułowanie tego problemu ma następującą postać:

$$\min \sum_{i \in M} \varphi_i(x_i) + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \quad (3.1.6)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \quad j \in N \quad (3.1.7)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = x_i \quad i \in M \quad (3.1.8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in M, \quad j \in N \quad (3.1.8a)$$

$$x_i \leq a_i \quad i \in M \quad (3.1.9)$$

gdzie d_{ij} są to jednostkowe koszty związane z dostarczeniem towaru z i -tego magazynu do j -tego odbiorcy (koszty transportu). Ponadto z lokalizacją każdego magazynu $i \in M$, gdzie $M = \{1, 2, \dots, m\}$ związana jest funkcja kosztów $\varphi_i(x)$, na którą składają się koszty budowy oraz koszty związane z eksploatacją magazynu. Funkcja $\varphi_i(x)$ może być aproksymowana jako suma funkcji stałej f_i , tj. kosztów związanych z budową magazynu oraz funkcji liniowej o współczynniku kierunkowym c_i , tj. kosztów związanych z eksploatacją magazynu.

Tak więc

$$\varphi_i(x) = f_i \operatorname{sgn} x + c_i \quad f_i > 0 \quad c_i \geq 0 \quad (3.1.10)$$

Funkcję o postaci (3.1.10) nazywamy funkcją niejednorodną. Korzystając z powyższego problem w postaci (3.1.6)-(3.1.9) może być przeformułowany do następującej postaci:

$$\min \sum_{i \in M} f_i \operatorname{sgn} x_i + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_i + d_{ij}) x_{ij} \quad (3.1.11)$$

przy ograniczeniach (3.1.7) - (3.1.9).

Zauważmy, że jeśli funkcja $\varphi_i(x)$ jest jednorodna, tzn.

$$\varphi_i(x) = c_i x$$

a więc koszty stałe związane z budową magazynu są nieistotne, to zadanie (3.1.11) - (3.1.15) przyjmując postać następującego zadania transportowego:

$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_i + d_{ij}) x_{ij} \quad (3.1.12)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \quad j \in N \quad (3.1.13)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i \quad i \in M \quad (3.1.14)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in M, \quad j \in N \quad (3.1.15)$$

Powracając do rozpatrywanego przez nas zagadnienia w postaci (3.1.11) - (3.1.15) wprowadźmy binarną zmienną decyzyjną $z_i = 1(0)$, jeśli i -ty magazyn jest (nie jest) budowany. Oznaczmy też sumę $c_i + d_{ij}$ jako c_{ij} . Wówczas sformułowanie (3.1.11) - (3.1.15) przyjmie następującą równoważną postać:

$$\min \sum_{i \in M} f_i z_i + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1.16)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \quad j \in N \quad (3.1.17)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i \quad i \in M \quad (3.1.18)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in M, \quad j \in N \quad (3.1.19)$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad i \in M \quad (3.1.20)$$

Zadanie o tej postaci jest liniowym zadaniem programowania mieszanego, dla którego jedną z metod rozwiązania jest algorytm podziału i oszacowań.

Zauważmy, że rozwiązanie zadania o postaci (3.1.20) - (3.1.24) można przeprowadzić na dwóch etapach:

a) dla każdego binarnego wektora $z = (z_1, \dots, z_m)$ określić:

$$F(z) = \sum_{i \in M} f_i z_i + \min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1.21)$$

przy ograniczeniach (3.1.17) - (3.1.19).

A następnie znaleźć wektor z^* , dla którego:

$$F(z^*) = \min\{F(z) : z \in Z\}$$

gdzie Z - zbiór wszystkich binarnych elementów z , przy których wyznaczono $F(z)$.

b) dla danego ustalonego wektora z określić zbiór charakterystyczny $\omega(z) = \{i : z_i = 1\}$.

Wówczas

$$F(\omega(z)) = \sum_{i \in \omega(z)} f_i + T(\omega(z)) \quad (3.1.22)$$

gdzie:

$$T(\omega) = \min \sum_{i \in \omega} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1.23)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i \in \omega} x_{ij} = b_j \quad j \in N \quad (3.1.24)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i \quad i \in \omega \quad (3.1.25)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in \omega, \quad j \in N \quad (3.1.26)$$

Zadanie (3.1.23) - (3.1.26) jest zadaniem transportowym. Tak więc rozwiązanie zadania (3.1.20)-(3.1.24) daje się sprowadzić do wyboru takiego podzbioru $\omega^* \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, dla którego funkcja celu $F(\omega)$ osiąga minimum. Oczywistym życzeniem jest, aby przejrzeć jak najmniej podzbiorów zbioru $M = \{1, 2, \dots, m\}$ (wektorów z).

Metoda podziału i oszacowań pozwala odrzucić nieperspektywiczne w określonym sensie podzbiory. Zwykle efektywność algorytmu podziału i oszacowań określana jest przez następujące czynniki:

- sposób przeglądu drzewa rozwiązań (podzbiorów w zbiorze M),
- obliczanie oszacowań w wierzchołkach drzewa (dolnych i górnych).

Przy różnych sposobach przeglądu drzewa rozwiązań oraz różnych sposobach wyliczania oszacowań otrzymuje się różne algorytmy rozwiązania dla zagadnienia lokalizacji z ograniczonymi możliwościami dostaw w postaci (3.1.16) - (3.1.20). Algorytmy te można znaleźć np. w pracach [4], [8], [12]. W algorytmie przeglądu zbioru rozwiązań problemu o postaci (3.1.16) - (3.1.20) można również korzystać z submodularności funkcji celu w postaci (3.1.16). Redukcja liczby wariantów lokalizacji magazynów możliwa jest dzięki wykorzystaniu własności submodularności przedstawionej poniżej wraz z twierdzeniem Czerenina.

Niech $M = \{1, 2, \dots, m\}$ będzie zbiorem możliwych lokalizacji. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru M , zaś ω dowolnym elementem Ω , $\omega \in \Omega$. ω

jest wariantem lokalizacji. Liczba wszystkich możliwych podzbiorów zbioru M wynosi 2^m , a więc jest to również maksymalna liczba możliwych rozwiązań (wariantów lokalizacji) zadania (3.1.20)-(3.1.24). Jeżeli F jest funkcją zdefiniowaną na zbiorze Ω , to w celu zredukowania liczby możliwych wariantów lokalizacji, przeglądanych w algorytmie, można wykorzystać następującą własność i twierdzenie:

Własność Czerenina:

Dla dowolnych podzbiorów $\omega_1, \omega_2 \subset M$

$$F(\omega_1) + F(\omega_2) - F(\omega_1 \cup \omega_2) - F(\omega_1 \cap \omega_2) \leq 0$$

Twierdzenie Czerenina:

Niech funkcja $F(\omega)$ spełnia własność Czerenina i niech ω^* będzie podzbiorem, dla którego funkcja celu przyjmie wartość optymalną. Wówczas dla dowolnego ciągu $\{\omega_i\}$ zawierającego ω^* , takiego że $\omega_i \subset \omega_{i+1}$, funkcja $F(\omega)$ jest monotonicznie nierosnąca dla $\omega_i \subset \omega^*$ i monotonicznie niemalejąca dla $\omega_i \supset \omega^*$.

Funkcja spełniająca powyższe twierdzenie nazywana jest funkcją submodularną [31]. W pracy [4] Babayev wykazał, że twierdzenie Czerenina i własności które sformułował Frieze w [24] dla funkcji submodularnych są równoważne. Można pokazać, że funkcja celu o postaci (3.1.20) spełnia własność Czerenina.

Niech:

$$\varepsilon = \omega_1 \cap \omega_2$$

$$\delta = \omega_1 \cup \omega_2$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} F(\omega_1) + F(\omega_2) - f(\delta) - F(\varepsilon) &= \sum_{i \in \omega_1} f_i + \sum_{i \in \omega_2} f_i - \sum_{i \in \delta} f_i - \sum_{i \in \varepsilon} f_i + \\ &+ \min \sum_{i \in \omega_1} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in \delta} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \\ &- \min \sum_{i \in \varepsilon} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$\min \sum_{i \in \delta} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} = \min \sum_{i \in \omega_1} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1.28)$$

lub

$$\min \sum_{i \in \delta} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} = \min \sum_{i \in \omega_2} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

oraz

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \geq \min \sum_{i \in \omega_1} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1.29)$$

i

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \geq \min \sum_{i \in \omega_2} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

Z (3.1.28) i (3.1.29) wynika spełnienie (3.1.27) przez funkcję (3.1.16). Wartość ta została wykorzystana w opracowanym algorytmie.

3.1.2. Algorytm LOCAL 1

Zanim przejdziemy do szczegółowego opisu algorytmu omówimy pokrótce zasadę jego działania:

- każdy wierzchołek drzewa rozwiązań odpowiada pewnemu podzbirowi $\omega \subset M$. Wszystkie podzbiory mające tę samą liczbę elementów tworzą jeden poziom drzewa rozwiązań. Wierzchołki należące do tego samego poziomu są generowane w porządku leksykograficznym. Niech $|\omega| = k$ będzie numerem poziomu, zaś zbiór wszystkich podzbiorów danego poziomu oznaczymy jako Ω_k . Drzewo rozwiązań jest generowane poziomami od $k = 0$ do $k = m$;
- z każdego wierzchołka ω , $|\omega| = k$ możemy utworzyć (wygenerować) $m - k$ wierzchołków ω_s poziomu następnego (następników wierzchołka) w następujący sposób:

$$\omega_s = \omega \cup \{s\}, \quad \text{gdzie: } s \in M \setminus \omega.$$

W drzewie rozwiązań dla każdego ω , $|\omega| = k$ istnieje $(m - k)$ łuków skierowanych do następnego poziomu i k łuków wychodzących z poziomu poprzedniego,

- dla danego poziomu k zapamiętywane są tylko tzw. wierzchołki perspektywiczne. Wierzchołek ω , $|\omega| = k$ jest nieperspektywiczny, jeśli dla wszystkich jego poprzedników α (tzn. wszystkich α takich, że $|\alpha| = k - 1$ i $\alpha \subset \omega$ zachodzi $f(\alpha) < f(\omega)$).

Zbiór wierzchołków perspektywicznych na poziomie o numerze k oznaczymy jako R_k , $R_k \subset \Omega_k$. Jeśli wierzchołek ω jest nieperspektywiczny, to odpowiadające mu zadanie transportowe nie musi być rozwiązywane.

Oznaczmy przez $L(\omega) = \sum_{i \in \omega} \sum_{j \in N} c_{ij}$ koszty transportowe związane z wierzchołkiem ω ,

zaś przez $k(\omega) = \sum_{i \in \omega} f_i$ koszty stałe związane z wierzchołkiem ω . Tak więc koszty

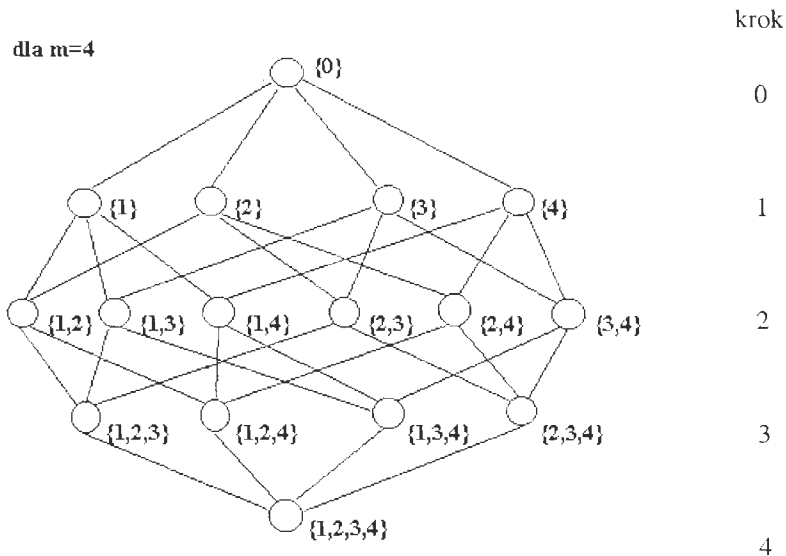
całkowite związane z wierzchołkiem wynoszą $F(\omega) = k(\omega) + L(\omega)$. Niech $L(M)$

oznacza wartość funkcji celu otrzymaną w wyniku rozwiązania zadania transportowego w przypadku, gdy wszystkie magazyny są budowane (minimalna wartość tych kosztów). Niech F^* oznacza najlepszą bieżącą wartość funkcji celu. Jeśli

$k(\omega) + L(M) > F^*$, to wierzchołek ω jest nieperspektywiczny;

- drzewo rozwiązań jest generowane poziomami, ale dla danego poziomu k generowane i badane są tylko te wierzchołki, które mogą być otrzymane z perspektywicznych wierzchołków poziomu poprzedniego.

Dla $m = 4$ drzewo pełnego przeglądu ma postać przedstawioną na Rys. 3.1.2.1.



Rys. 3.1.2.1. Drzewo pełnego przeglądu dla $m = 4$

Krok 0: Oblicz $L(M)$,
 $F^* = \alpha$, $\omega^* = \{\emptyset\}$
 $k = 0$, $R_k = \{\emptyset\}$

Krok 1: $k = k + 1$,
 $\Omega_k = \{\emptyset\}$, $R_k = \{\emptyset\}$
 utwórz wszystkie podzbiory $\omega_s \in \Omega_k^*$ dla k -tego poziomu, które zawierają perspektywiczne wierzchołki $\omega \in R_{k-1}$. Elementy zbioru $\Omega_k^* \subset \Omega_k$ muszą być generowane w porządku leksykograficznym.

Krok 2: dla każdego $\omega \in \Omega_k^*$

- jeśli $k(\omega) + L(M) < F^*$, idź do kroku 2b), w przeciwnym przypadku ω jest nieperspektywiczny, zbadaj następny element zbioru Ω_k^* .
- jeśli $k(\omega) + L(M) > F^*$ dla wszystkich poprzedników ω (tzn. $\alpha \in \Omega_{k-1}$, $\alpha \subset \omega$), to wierzchołek ω jest nieperspektywiczny, zbadaj następny element zbioru Ω_k^* . W przeciwnym przypadku idź do kroku 2c),

- c) oblicz $F(\omega)$. Wymaga to rozwiązania zadania transportowego. Jeśli $F(\omega) > F(\alpha)$ dla wszystkich $\alpha \in R_{k-1}$ i $\alpha \subset \omega$ to ω jest nieperspektywiczny i należy przejść do badania następnego $\omega \in \Omega_{k-1}$. W przeciwnym przypadku idź do kroku 2d),
- d) jeśli $F(\omega) < F^*$, to $F^* = F(\omega)$, $\omega^* = \omega$, $R_k = R_{k-1} \cup \{\omega\}$,

Krok 3: Jeśli $R_k = \{\emptyset\}$, idź do kroku 1, w przeciwnym przypadku algorytm kończy działanie, a ω^* jest rozwiązaniem optymalnym o wartości funkcji celu równej F^* .

W rozpatrywanym algorytmie istotny czas obliczeń zajmuje wyznaczenie wartości funkcji $L(\omega)$ (rozwiązanie zadania transportowego). W celu przyspieszenia działania algorytmu można dodatkowo sprawdzić następujące kryterium, które pozwala a priori wyeliminować pewien zbiór wierzchołków.

Niech k_{\min} będzie minimalną liczbą magazynów, których pojemność pozwala na zrealizowanie wszystkich zapotrzebowań $B = \sum_{j \in N} b_j$. Wówczas algorytm rozpoczyna działanie od poziomu k_{\min} , co pozwala na redukcję drzewa rozwiązań. Realizacja komputerowa algorytmu jest zmodyfikowana w stosunku do opisu zamieszczonego powyżej, co wynika z konieczności uwzględnienia istniejących już magazynów. Jest to możliwe poprzez rozwiązywanie zadania transportowego na sumarycznym zbiorze magazynów tzn. istniejących lokalizacji i aktualnej kombinacji dla magazynów, które mogą być budowane.

3.1.3. Zadanie lokalizacji magazynów produktów naftowych dla Biura Projektów NAFTOPROJEKT

W 1985 roku w ramach umowy zawartej pomiędzy Biurem Projektów „NAFTOPROJEKT” a IBS PAN wykonana została w Zakładzie Badań Operacyjnych praca pt. „Opracowanie modelu transportowego dla rozwózki produktów naftowych”. Głównym celem tej pracy było wyznaczenie rejonów oddziaływania poszczególnych magazynów produktów naftowych (tzn. przyporządkowanie im odbiorców zlokalizowanych na danym terenie), tak aby zminimalizować łączny koszt transportu tych produktów.

W trakcie wykonywania w/w umowy wyłonił się interesujący problem badawczy związany z rozbudową istniejącej sieci dystrybucyjnej produktów naftowych.

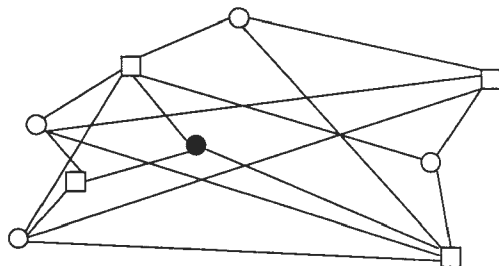
Problem ten można przedstawić następująco:

Wyznaczyć lokalizację nowych bądź rozbudowę istniejących magazynów produktów naftowych tak, aby zminimalizować sumę kosztów inwestycyjnych, eksploatacyjnych i transportowych.

W przedstawionym powyżej zadaniu występują trzy rodzaje magazynów:

- magazyny już istniejące o zadanej pojemności,
- magazyny już istniejące, które można rozbudować (tzn. powiększyć ich pojemność),
- planowane miejsca budowy nowych magazynów.

Można to przykładowo przedstawić za pomocą rysunku 3.1.3.1:



- gdzie:
- - magazyn typu a,
 - - magazyn typu b,
 - - magazyn typu c,
 - - odbiorcy produktów naftowych.

Rys. 3.1.3.1. Przykładowa lokalizacja magazynów produktów naftowych

Dla dalszych rozważań zakłada się, że istniejące magazyny produktów naftowych, których pojemność może być powiększona (rozbudowana), zostaje rozdzielona na następujące dwa typy magazynów:

- magazyn istniejący o zadanej pojemności,
- miejsce budowy nowego magazynu.

Odległość pomiędzy tymi magazynami będzie wynosiła 0. Przyjmując powyższe założenie, w dalszej części pracy rozpatrywać będziemy tylko dwa rodzaje magazynów.

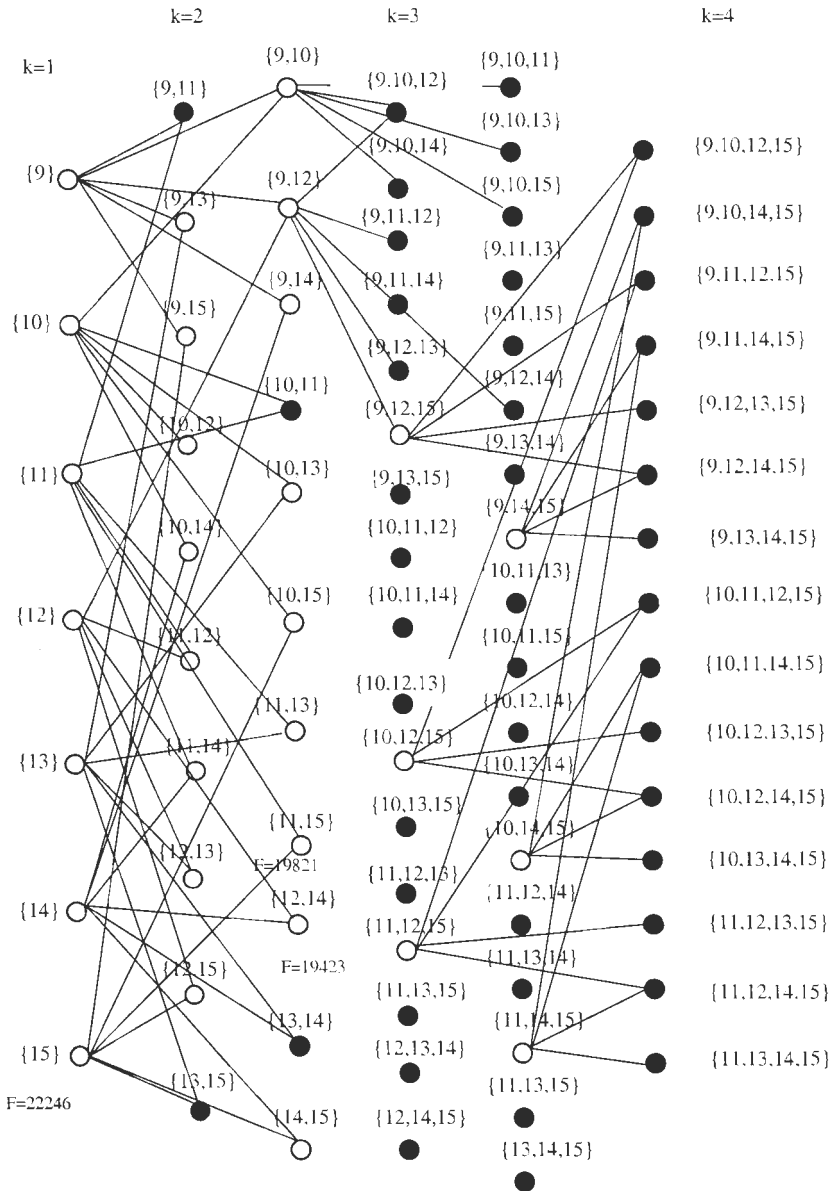
Rozpatrywane przez zadanie rzeczywiste, jest problemem jednoasortymentowym. Wynika to z faktu, że nie można łączyć benzyny z olejami itp.

Przyjmując powyższe założenia opis matematyczny problemu przyjmuje postać (3.1.1)-(3.1.5).

W rozpatrywanym przykładzie występowało 15 lokalizacji magazynów, w tym 8 już istniejących. Wszystkie potencjalne lokalizacje mają taką samą pojemność równą 600 tys. ton oraz stałe koszty budowy wynoszące 2000. Koszty eksploatacyjne przyjęto w tym przypadku jako zerowe. Dodatkowo magazyn zlokalizowany w miejscowości Mościska (o numerze 6) o pojemności 200 tys. ton może być rozbudowany do pojemności 600 tys. ton. Koszt tej rozbudowy jest dwukrotnie mniejszy od kosztu budowy nowego magazynu. Jak już wspomniano przy opisie algorytmu w takim przypadku magazyn ten zostaje zastąpiony przez dwa magazyny – jeden o ustalonej (poprzedniej) pojemności 200 tys. ton i ustalonej lokalizacji oraz drugi, traktowany jako potencjalna lokalizacja nowego magazynu w

miejsowości Mościska o pojemności 400 tys. ton i koszcie stałym budowy 1000. Nowy magazyn otrzymuje numer 15. Modyfikacji ulega również macierz kosztów $[c_{ij}]$. Suma wszystkich zapotrzebowań, a więc $\sum_{j \in N} b_j = 589$ ton, zaś suma pojemności istniejących

magazynów wynosi $\sum_{i=1}^8 a_i = 472.8$.



Rys. 3.1.3.2. Drzewo rozwiązań

Ponieważ $\sum_{j \in N} b_j - \sum_{i=1}^8 a_i = 589 - 472.8 = 116.2$, a więc wybudowanie jednego

nowego magazynu (rozbudowanie starego) pozwala na zaspokojenie wszystkich zapotrzebowań. Dlatego też przegląd możliwych wariantów rozwiązania rozpoczynamy od pierwszego poziomu, tzn. jednoelementowych podzbiorów lokalizacji nowych potencjalnych magazynów (patrz rys. 3.1.3.2).

W tym przypadku wartość $L(M) = 12183$ a $F^* = \infty$. Wśród jednoelementowych kombinacji możliwych wariantów lokalizacji minimalną wartość funkcji celu daje zlokalizowanie nowego magazynu w miejscowości Mościska $i=15$ (a więc jego rozbudowa). $F(15) = 22246$.

3.2. Metody rozwiązywania zadań lokalizacji jednopoziomowej z uwzględnieniem ograniczeń czasowych

3.2.1. Model lokalizacji jednopoziomowej z ograniczeniami czasowymi

Poniżej przedstawiony jest opis zadania wraz z modelem matematycznym dla zagadnienia optymalnego rozmieszczenia stacji pogotowia ratunkowego. W pewnej klasie przykładów praktycznych spotykamy się ze zjawiskiem, gdy nie istnieje możliwość określenia punktów na sieci, które w zadaniach lokalizacji są nazywane odbiorcami. Natomiast dla istniejących lub potencjalnych dostawców mamy ściśle określone wierzchołki. Zauważmy, że nie określony w sposób jawny zbiór wierzchołków odbiorców, gdy istnieje możliwość ich wystąpienia na całej rozpatrywanej przestrzeni, sprowadza to zadanie do problemu znanego w literaturze jako problem pokrycia. Z takim zagadnieniem mamy do czynienia w przypadku lokalizacji (rozmieszczenia) np. stacji pogotowia ratunkowego. Zakładamy, że sieć tych stacji powinna pokrywać obszar cały rozpatrywany obszar (np. miasta, gminy, województwa itp.).

Rozpatrywany problem posiada trzy następujące, istotne charakterystyki, które powinny być uwzględnione w modelu:

- I. minimalizacja kosztów transportowych w tym przypadku może być pominięta, ponieważ trudno jest mówić o ograniczeniach kosztów, gdy chodzi o życie ludzkie,
- II. rozpatrywany teren musi być w pełni pokryty usługą,
- III. koszty stałe można pominąć, ponieważ wszystkie jednostki pogotowia ratunkowego rozmieszczone są w istniejących placówkach, a nowe lokalizacje powinny uwzględniać fakt istnienia w wybranym miejscu struktur organizacyjnych służby zdrowia zblizonych swoim działaniem (np. szpitale, przychodnie).

W ogólnym ujęciu model zadania można przedstawić następująco:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (3.2.1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq 1, \quad i \in I, \quad (3.2.2)$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J, \quad (3.2.3)$$

$$\sum_{j \in J} t_{ij} x_{ij} \leq T_i, \quad i \in I, \quad (3.2.4)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{gdy } j \text{ realizuje obsługę regionu } i \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

$$y_j = \begin{cases} 1 - \text{gdy w } j \text{ jest zainstalowana stacja pogotowia ratunkowego,} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (3.2.6)$$

gdzie:

- $i \in I$ - regiony objęte obsługą pogotowia,
- $j \in J$ - lokalizacje stacji pogotowia ratunkowego,
- c_{ij} - koszty transportowo-eksploatacyjną,
- f_j - koszty założenia (lokalizacji) w j ,
- t_{ij} - czas dotarcia z j do i ,
- T_i - maksymalny akceptowalny czas obsługi regionu i .

Funkcja celu (3.2.1) minimalizuje sumę kosztów transportowo-eksploatacyjnych oraz kosztów budowy stacji pogotowia ratunkowego. Ograniczenia (3.2.2) zapewniają obsługę każdego regionu. Ze względu na charakter usług konkretną obsługę realizuje dokładnie jedna stacja. Ograniczenia (3.2.3) gwarantują lokalizację stacji obsługującej zadany obszar. Ograniczenia (3.2.4) zapewniają realizację obsługi w czasie nieprzekraczającym maksymalnego akceptowalnego czasu.

Sformułowanie (3.2.1) - (3.2.6) pozwala zakwalifikować badane zadanie do semi-dynamicznych problemów lokalizacyjnych. Parametr czasu jest bardzo istotną charakterystyką rozważanego zadanie, ale występuje jedynie w ograniczeniach modelu.

Uwzględnienie wymogów I - III pozwala na przeformułowanie modelu (3.2.1) - (3.2.6). Przyjęcie założenia I umożliwia wyeliminowanie pierwszej składowej funkcji celu opisującej koszty transportowo-eksploatacyjne. Natomiast wzięcie pod uwagę założenia III pozwala przyjąć, że $f_j = 1$ dla wszystkich $j \in J$. Ostateczne sformułowanie matematyczne, w którym wyeliminowano zmienną decyzyjną x_{ij} , przyjmuje postać:

$$\min \sum_{j \in J} y_j \quad (3.2.7)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq 1, \quad i \in I, \quad (3.2.8)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{gdy } t_{ij} \leq T_i, \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad (3.2.10)$$

Ograniczenie (3.2.8) jest agregacją trzech ograniczeń: (3.2.2), (3.2.3) i (3.2.4). Zadanie (3.2.7) - (3.2.10) jest zadaniem lokalizacji obiektów znanym w literaturze jako *the minimum cost covering problem*.

W 1992 roku autorki opracowały algorytm LOCAL 1 optymalnego rozwiązywania prostego zadania lokalizacji jednopoziomowej [59]. Jak to było wykazane przez Xu i Lowe [90], istnieją równoważne przekształcenia z prostego zadania lokalizacji obiektów (P) do zadania pokryć (C) oraz z (C) do (P). Posługując się transformacją zagadnienia pokryć (7) - (10) do równoważnego, prostego zagadnienia lokalizacji obiektów, autorki zastosowały algorytm LOCAL 1 do wyznaczenia optymalnego rozwiązania. Rozwiązania zadania (P) zostały wykorzystane do skonstruowania rozwiązań zadania (C) modelu (7) - (10).

Jak pokazano powyżej pewna klasa zadań lokalizacyjnych może być sformułowana jako problem pokrycia. Najbardziej popularne modele pokrycia są definiowane na strukturze grafów i sieci. Jeżeli przyjmiemy, że dany jest zbiór odbiorców o określonych zapotrzebowaniach na usługi lub towary to problem sprowadza się do ustalenia sieci dostawców dla odbiorców, tak aby spełnione były ich zapotrzebowania. Gdy odbiorca został obsłużony przez dostawcę, to mówimy, że zapotrzebowanie jego zostało pokryte przez danego dostawcę i problem pokrycia należy sformułować określając numer i lokalizację dostawcy, tak aby nastąpiło pokrycie rozpatrywanego obszaru o minimalnym koszcie. Punkty na sieci, gdzie dostawca może być lokalizowany określane są jako potencjalne miejsca jego lokalizacji.

Lokalizując dostawców bierzemy pod uwagę trzy typy kosztów:

- 1) Koszt inwestycyjny, czyli koszt ustalenia lokalizacji dostawcy w danym miejscu. W przypadku, gdy dostawcy mogą być lokalizowani w dowolnym punkcie na sieci, to przyjmujemy, że wszystkie tego typu koszty są równe.
- 2) Koszty transportowe świadczonych usług lub przewozu towarów między odbiorcą, a dostawcą określone przez nierosnącą funkcję odległości.
- 3) Koszt "karny", który ma zastosowanie tylko wtedy, jeżeli odbiorca nie jest obsłużony przez żadnego z dostawców.

W występujących w literaturze modelach zawarte są ograniczenia, dotyczące zarówno odbiorców, jak i dostawców.

Oдноśnie odbiorców wymaga się, aby każdy z nich był obsłużony przez dostawcę, który jest zlokalizowany w określonej odległości od danego odbiorcy. Ustalony poprzez punkty obszar odległości dostawcy od odbiorcy jest regionem atrakcyjnym dla odbiorcy. Problem ten występuje na przykład przy rozważaniu wejścia nowego przedsiębiorstwa na istniejący rynek.

Ograniczenia nałożone na dostawców, dotyczą przypadku, gdy dostawca może tylko obsłużyć odbiorców, którzy są zlokalizowani w danej, niewielkiej odległości od niego. Tutaj możemy przyjąć, że połączenie z odbiorcami, którzy znajdują się w dalszych odległościach daje bardzo duże koszty transportowe świadczonej usługi.

Zgodnie z powyższymi ograniczeniami wyróżnia się następujące zagadnienia:

- minimalizacji maksymalnych kosztów transportowych,
- minimalizacji sumy kosztów transportowych,
- minimalizacji sumy kosztów transportowych i kosztów inwestycyjnych,
- minimalizacji sumy kosztów "karnych" i kosztów inwestycyjnych,
- minimalizacji kosztów "karnych",
- minimalizacji kosztów inwestycyjnych.

3.2.2. Matematyczny opis zadania pokrycia

W wielu zadaniach pojawia się następujący problem: mając skończony zbiór V i ustalony zbiór podzbiorów V_k tego zbioru ($k=1, \dots, K$) spełniający warunek:

$$\bigcup_{k=1}^K V_k = V \quad (3.2.1.1)$$

należy wybrać taki zestaw podzbiorów V_k , aby w sumie tworzyły one cały zbiór V .

Mówimy, że pewien r -ty podzbiór $\{V_{rj}\}$ ($j=1, \dots, J_r$) zbiorów V_k tworzy pokrycie

zbioru V wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcup_{j=1}^{J_r} V_{rj} = V$. Pokrycie zbioru V nazywamy

minimalnym wtedy i tylko wtedy, gdy żaden podzbiór właściwy zbiorów pokrywających nie stanowi pokrycia [52].

Przyjmijmy następujące założenia:

1. Określmy pewien zbiór dla lokalizacji odbiorców - V , $v_i \in V$.
2. Dla istniejących lub potencjalnych dostawców mamy ściśle określony zbiór - $V_j, v_j \in V_j$.
3. Załóżmy, że wszyscy dostawcy mają nieograniczoną pojemność.

Przyjmijmy oznaczenia:

- i - odbiorcy $i=1, \dots, m$,
- j - dostawcy $j=1, \dots, n$,
- x_j - zmienna decyzyjna określająca lokalizację dostawcy, przyjmująca wartości:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli rozpatrywany jest } j - \text{ty dostawca} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- z_i - zmienna decyzyjna określająca zaspokojenie zapotrzebowań odbiorców i przyjmująca wartości:

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i - \text{ty odbiorca nie jest obsługiwany przez żadnego dostawcę} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

a_{ij} - macierz określająca wzajemne zależności odbiorcy z dostawcą, przyjmująca wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } j - \text{ty dostawca pokrył zapotrzebowanie } i - \text{tego odbiorcy} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_j - koszt inwestycyjny dla j -tego dostawcy, $c_j \geq 0$,

p_i - koszt "karny" wynikający z nieobsłużenia i -tego odbiorcy, $p_i \geq 0$,

S - podzbiór zbioru V_j definiowany następująco: $S = \{v_j; x_j = 1\}$,

r_i - promień obszaru, w którym zlokalizowany jest i -ty odbiorca,

s_j - promień obszaru, w którym zlokalizowany jest j -ty dostawca,

$d(v_i, v_j)$ - odległość między i -tym odbiorcą, a j -tym dostawcą,

$D(v_i, S)$ - odległość i -tego odbiorcy do dostawcy zlokalizowanego w zbiorze S .

W zadaniach lokalizacji zastosowanie zadania pokrycia polega na znalezieniu pokrycia o minimalnym koszcie i może być zapisane jako zadanie programowania całkowitoliczbowego ze zmiennymi binarnymi.

Poniżej przedstawione są różne warianty modeli matematycznych dla zadania pokrycia.

1) Model zadania pokrycia uwzględniający tylko koszty inwestycyjne:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.2.1.2)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad (3.2.1.3)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n. \quad (3.2.1.4)$$

2) Model zadania pokrycia uwzględniający koszty inwestycyjne i koszty "karne":

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m p_i z_i \quad (3.2.1.5)$$

przy ograniczeniach :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad (3.2.1.6)$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1, \dots, n, \quad (3.2.1.7)$$

$$z_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, m. \quad (3.2.1.8)$$

- 3) Model matematyczny zadania pokrycia uwzględniający koszty inwestycyjne i koszty transportowe.

Koszty transportowe dla i -tego odbiorcy określone są przez nierosnącą funkcję $f_i(d)$ określającą odległość między danym odbiorcą, a obsługującym go dostawcą.

$F_i(\infty)$ oznacza, że i -ty odbiorca nie jest obsłużony przez żadnego dostawcę. Problem przedstawia się wówczas następująco:

$$\min_{S \subseteq V_j} \left\{ \sum_{jv_j \in S} c_j + \sum_{i=1}^m f_i(D(v_i, S)) \right\} \quad (3.2.1.9)$$

przy ograniczeniach:

- dla dostawców:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } d(v_i, v_j) \leq s_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$a_{ij} = 0$ odpowiada ograniczeniu nałożonemu na dostawcę, które mówi, że połączenia z odbiorcami, którzy znajdują się w dalszych odległościach daje bardzo duże koszty transportowe świadczonej usługi.

- dla odbiorców:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } d(v_i, v_j) \geq r_i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Dla ustalonego kosztu "karnego", $p_i \geq 0$, zaspokojenie zapotrzebowań odbiorców określone przez zmienną z_i wyraża się następująco:

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \text{ lub } D(v_j, S) > r_i \\ 0 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \text{ lub } D(v_j, S) \leq r_i \end{cases}$$

Jeżeli zdefiniujemy funkcję $f_i(r)$ dla $i=1, \dots, m$ jako:

$$f_i(r) = \begin{cases} p_i & \text{jeżeli } r > r_i \\ 0 & \text{jeżeli } r \leq r_i \end{cases}$$

to wartość optymalna uzyskana na podstawie modelu uwzględniającego koszty inwestycyjne i koszty "karne" odpowiada wartości uzyskanej na podstawie modelu zawierającego koszty inwestycyjne i koszty transportowe.

Uwzględniając ograniczenia nałożone na odbiorców, funkcja celu (3.2.1.9) definiowana jest w następująco:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m f_i \left(\min_{\{v_i: x_j=1\}} \{d(v_i, v_j)\} \right) \right\} \quad (3.2.1.10)$$

$$\text{przy ograniczeniu, } x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2.1.11)$$

Poniżej opisane jest przekształcenie nieliniowej funkcji celu (3.2.1.10) do postaci liniowej.

Przyjmijmy następujące założenia:

1. Wprowadźmy $m \cdot n$ ograniczeń, $m \cdot n$ nowych wartości (0,1), aby zlinearyzować funkcję celu.
2. Oznaczmy przez $r_{i1} \leq r_{i2} \leq \dots \leq r_{in}$ odległość od i -tego odbiorcy do n potencjalnych miejsc lokalizacji dostawców w zbiorze V_j .
3. Przyjmijmy $r_{i,n+1} = \infty$.
4. Jeżeli w odległości r_{ik} od i -tego odbiorcy nie jest zlokalizowany żaden dostawca, to ustalmy go co najmniej w odległości $r_{i,k+1}$ od tegoż odbiorcy. W tym przypadku koszty transportowe dla i -tego odbiorcy wzrastają od wartości $f_i(r_{ik})$ (koszt lokalizacji dostawcy w odległości r_{ik} od odbiorcy) do wartości $f_i(r_{i,k+1})$. Tak więc koszt "karny" wynikający z nieustalenia lokalizacji dostawcy w odległości r_{ik} od i -tego odbiorcy jest określony przez różnicę funkcji $f_i(r_{i,k+1}) - f_i(r_{ik})$.

Zdefiniujmy zatem macierz $A = (a_{ik,j})_{(m \cdot n) \times n}$ i zmienną określającą zaspokojenie zapotrzebowań odbiorcy.

Macierz $A = (a_{ik,j})_{(m \cdot n) \times n}$ określająca wzajemne zależności odbiorcy z dostawcą przyjmuje następujące wartości:

$$a_{ik,j} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } d(v_i, v_j) \leq r_{ik} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zmienna z_{ik} jest definiowana jako:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli w odległości } r_{ik} \text{ od } i\text{-tego odbiorcy nie ma żadnego dostawcy} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przyjmijmy, że rozwiązaniem zadania określonego funkcją celu (3.2.1.10) jest wartość zmiennej x_j . Wówczas koszty transportowe dla i -tego odbiorcy przedstawiają się następująco:

$$f_i \left(\min_{\{v_j: x_j=1\}} \{d(v_i, v_j)\} \right) = \min_{k=1}^n \sum_{k=1}^n (f_i(r_{i,k+1}) - f_i(r_{ik})) z_{ik} + f_i(r_{i1}) \quad (3.2.1.12)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ik,j} x_j + z_{ik} \geq 1, \quad (3.2.1.13)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2.1.14)$$

Dla zdefiniowanych powyżej kosztów transportowych zmienna z_{ik} przyjmuje wartości:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ik,j} x_j = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } \sum_{j=1}^n a_{ik,j} x_j \geq 1 \end{cases}$$

Uwzględniając wszystkie założenia i ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne, nieliniowa funkcja celu przetransformowana jest do postaci liniowej, której postać jest następująca:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (f_i(r_{i,k+1}) - f_i(r_{ik})) z_{ik} + \sum_{i=1}^m f_i(r_{i1}) \quad (3.2.1.15)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ik,j} x_j + z_{ik} \geq 1, \quad (3.2.1.16)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.2.1.17)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2.1.18)$$

3.2.3. Zadanie wielokrotnego pokrycia

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

i - odbiorcy, $i = 1, \dots, m$,

j - dostawcy, $j = 1, \dots, n$,

b_i - liczba całkowita określająca ilość dostawców obsługujących i -tego odbiorcę,

u_j - liczba całkowita określająca ilość dostawców umieszczonych w j -tej lokalizacji,

x_j - zmienna decyzyjna określająca lokalizację dostawcy,

a_{ij} - macierz określająca wzajemne zależności odbiorcy z dostawcą, przyjmująca wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } j - \text{ty dostawca pokrył zapotrzebowanie } i - \text{tego odbiorcy} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

c_j - koszt inwestycyjny dla j -tego dostawcy $c_j \geq 0$.

Przyjmijmy, że każdy i -ty odbiorca musi być obsłużony przez b_i dostawców. Model matematyczny dla zadania wielokrotnego pokrycia przedstawia się wówczas następująco:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.2.2.1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (3.2.2.2)$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2.2.3)$$

Jeśli natomiast przyjmiemy koszty inwestycyjne równe np. $c_j = 1$, dla $j = 1, \dots, n$, to zmienna y_i jest zdefiniowana następująco: $y_i = u_j - x_j$. Wówczas zadanie wielokrotnego pokrycia przyjmuje postać:

$$\min \sum_{j=1}^n u_j - \sum_{j=1}^n y_j \quad (3.2.2.4)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j - b_i, \quad (3.2.2.5)$$

$$0 \leq y_j \leq u_j \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2.2.6)$$

Dla zdefiniowanego powyżej modelu zmienna określająca lokalizację dostawcy i będąca rozwiązaniem zadania wyznaczana jest w następujący sposób:

$$x_j = \max \left\{ 0, \max_{i: a_{ij}=1} \left\{ b_i - \sum_{k=j+1}^n a_{ik} u_k - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} x_k \right\} \right\} \quad (3.2.2.7)$$

gdzie:

$\sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} x_k$ - oznacza odbiorcę i -tego, który został obsłużony przez dostawcę już

zlokalizowanego,

$\sum_{k=j+1}^n a_{ik} u_k$ - górne ograniczenie nałożone na dostawcę, który mógłby być ustanowiony

w lokalizacji $j+1, \dots, n$, aby pokryć zapotrzebowania odbiorcy.

3.2.4. Zastosowanie teorii sieci i grafów do zadania pokrycia

Wprowadźmy następujące pojęcia:

Siecią nazywamy uporządkowaną trójkę $S = \langle G, \{\varepsilon_i\}, \{\psi_j\} \rangle$ przy czym:

$G = (V, E, P)$ - dowolny graf,

$|V| = n, |E| = m, P \subset V \times E \times V,$

$\{\varepsilon_i\}$ - zbiór funkcji $\varepsilon_i: V \rightarrow \mathbb{R}$, określonych na zbiorze wierzchołków grafu,

$\{\psi_j\}$ - zbiór funkcji $\psi_j: E \rightarrow \mathbb{R}$, określonych na zbiorze gałęzi grafu,

Jeżeli oba zbiory funkcji $\{\varepsilon_i\}$ i $\{\psi_j\}$ są puste, to sieć staje się grafem G .

Grafem nazywamy uporządkowaną trójkę $G = (V, E, P)$ przy czym:

V - zbiór wierzchołków grafu,

E - zbiór gałęzi grafu,

P - relacja trójczłonowa ($P \subset W \times U \times W$) spełniająca następujące warunki:

a/ dla każdej gałęzi u istnieje taka para wierzchołków $x, y \in W$, że $\langle x, u, y \rangle \in P$;

b/ jeżeli dla gałęzi u istnieją $\langle x, u, y \rangle \in P$ i $\langle v, u, z \rangle \in P$, to albo $x = v$ i

$y = z$ lub $x = z$ i $y = v$.

Szczególnym przypadkiem relacji P jest relacja, w której każdej gałęzi u odpowiada wzajemnie jednoznacznie jedna para uporządkowana $\langle x, y \rangle \in W \times W$, taka, że $\langle x, u, y \rangle \in P$. Wówczas takie grafy można zapisać w postaci dwójki uporządkowanej $G = (V, E)$, która nosi nazwę **grafu niezorientowanego**.

Dla grafu $G = (V, E, P)$ wierzchołek $x \in V$ i gałąź $u \in E$ są **incydentne**, gdy istnieje wierzchołek $y \in V$, taki, że $\langle x, u, y \rangle \in P$ lub $\langle y, u, x \rangle \in P$.

Stopniem wierzchołka grafu niezorientowanego nazywamy liczbę krawędzi incydentnych z danym wierzchołkiem.

Rozważmy zadanie lokalizacji, którego model matematyczny jest następujący:

$$\max_S \{z(S) : S \subseteq J, |S| = K\} \quad (3.2.3.1)$$

gdzie:

$z(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} a_{ij}$ - otrzymujemy na podstawie macierzy incydencji grafu niezorientowanego,

i - krawędź grafu, $i \in I$,

j - wierzchołek grafu, $j \in J$,

S - podzbiór zbioru wierzchołków, $S \subseteq J$,

K - podzbiór zbioru J , zawierający wierzchołki o największym stopniu,

a_{ij} - zero-jedynkowa macierz incydencji określona na podstawie grafu

$G = (V, E)$, przyjmująca wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gd}y \text{ krawędź } j - \text{ta i wierzchołek } i - \text{ty są incydentne} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Dla modelu matematycznego (3.1.3.1) zadanie pokrycia polega na wyznaczeniu zbioru wierzchołków S , pokrywającego maksymalną liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkami zbioru S .

Przyjmijmy następujące założenia:

1. Niech dla wierzchołków j, k funkcja $z(S)$ przyjmuje następujące wartości:

$$z(\{j\}) + z(\{k\}) = \begin{cases} z(\{j, k\}) + 1 & \text{gd}y \text{ istnieje krawędź łącząca wierzchołki } (j, k) \\ z(\{j, k\}) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

2. Ustalmy, że dla grafu $G = (V, E)$, $V(e)$ oznacza parę wierzchołków połączonych krawędzią $e \in E$.

Model matematyczny dla zadania pokrycia krawędzi grafu sformułowany w oparciu o powyższe założenia jest następujący:

$$\max \sum_{e \in E} \sum_{v \in V(e)} x_{ev} \quad (3.2.3.2)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{v \in V(e)} x_{ev} \leq 1, \quad (3.2.3.3)$$

$$x_{ev} - y_v \leq 0, \quad (3.2.3.4)$$

$$\sum_{e \in V} y_v = K, \quad (3.2.3.5)$$

$$x_{ev} \geq 0, \quad \forall e \in E, v \in V(e), \quad (3.2.3.6)$$

$$y_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V \quad (3.2.3.7)$$

gdzie:

y_v - zmienna decyzyjna przyjmująca wartości:

$$y_v = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli wierzchołek } v \text{ wchodzi do pokrycia} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

x_{ev} - zmienna decyzyjna określająca pokrycie krawędzi e przez wierzchołek v .

Jeżeli krawędź e zdefiniujemy w ten sposób, że $e = (u, v)$ dla pewnych wierzchołków u, v , to:

$$x_{eu} + x_{ev} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } y_u + y_v \geq 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Liniowe sformułowanie problemu pokrycia, uzyskujemy, jeżeli pominiemy warunki nałożone na zmienne decyzyjne w modelu (3.2.3.2). Model matematyczny dla liniowego problemu pokrycia przedstawia się następująco:

$$\max \sum_{e \in E} \sum_{v \in V(e)} x_{ev} \quad (3.2.3.8)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{v \in V(e)} x_{ev} \leq 1, \quad (3.2.3.9)$$

$$x_{ev} - y_v \leq 0, \quad (3.2.3.10)$$

$$\sum_{v \in V} y_v = K, \quad (3.2.3.11)$$

$$x_{ev} \geq 0, \quad \forall e \in E, v \in V(e), \quad (3.2.3.12)$$

$$0 \leq y_v \leq 1, \quad \forall v \in V \quad (3.2.3.13)$$

W tym przypadku zmienna decyzyjna y_v przyjmuje wartości:

$$y_v = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli wierzchołek } v \in K \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Na podstawie modelu matematycznego (3.2.3.2) można uzyskać wartości bardzo bliskie rozwiązaniu optymalnemu, gdy liczba wierzchołków grafu jest stosunkowo duża i istnieje zbiór K -wierzchołków o największym stopniu, którego wymiar nie wzrasta zbyt szybko wraz z ilością wierzchołków grafu.

3.2.5. Algorytm

Zauważmy, że istotnym parametrem, który wpływa na skuteczność zastosowanej metody podczas rozwiązywania zadań z programowania całkowitoliczbowego, jest rozmiar zadania. Rozwiązanie uzyskujemy stosując pewną ilość kroków redukcyjnych. W przypadku bardzo rozbudowanych zadań rozwiązanie optymalne jest trudne do osiągnięcia. Ogólnie stosowaną metodą traktowania trudnych zagadnień dyskretnych jest zredukowanie ich rozmiaru poprzez zastosowanie prostego algorytmu redukcji.

Dla zadania pokrycia istnieje wiele efektywnych metod rozwiązania. Przedstawiona w pracy metoda polega na redukcji macierzy określającej wzajemne zależności między odbiorcą, a dostawcą.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

I - zbiór wierszy, $i \in I, i=1, \dots, m,$

J - zbiór kolumn, $j \in J, j=1, \dots, n,$

R - wiersz macierzy, określający odbiorcę,

C - kolumna macierzy, określająca dostawcę,

P - podzbiór zbioru J , taki, że $P_j \subseteq I,$

c - koszt inwestycyjny,

p - koszt "karny",

x_j - zmienna opisująca dostawców i przyjmująca wartość 1 dla każdego rozwiązania dopuszczalnego.

Istnieją trzy warianty rozwiązania postawionego zadania, w przypadku gdy:

1. Nie uwzględniamy żadnych kosztów.
2. Uwzględniamy tylko koszty inwestycyjne.
3. Uwzględniamy koszty inwestycyjne i koszty "karne".

Dla każdego z powyższych warunków przedstawiony jest algorytm postępowania.

Wariant 1. Nie uwzględniamy żadnych kosztów.

Krok 1. Usunięcie zerowych wierszy.

Jeżeli R_i jest zerowym wektorem dla pewnego i , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego, gdyż i -te ograniczenie nie może być spełnione.

Krok 2. Usunięcie zerowych kolumn.

Jeżeli C_j jest zerowym wektorem dla pewnego j , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego. $J \leftarrow J - \{j\}$

Krok 1 i krok 2 są stosowane zazwyczaj tylko raz, na początku redukcji. Jakkolwiek zerowe wiersze, czy kolumny mogą pojawić się po zastosowaniu następnych kroków redukcji.

Krok 3. Oszacowanie wartości x .

Jeżeli $R_i = e_k$, gdzie e_k jest wektorem jednostkowym z jedynką na k -tej pozycji dla pewnych wartości i, k , to $x_k = 1$ dla każdego rozwiązania dopuszczalnego. Kolumnę C_k można usunąć. Również można usunąć każdy wiersz R_i taki dla którego $i \in P_k$. Jest tak dlatego, że R_i nie może być pokryty przez C_k , zaś każdy element P_k będzie pokryty przez C_k .

Krok 4. Usunięcie dominujących wierszy.

Jeżeli $R_i \geq R_p$ dla pewnych i, p , to wiersz R_i można usunąć, gdyż pokrycie wiersza R_p pokrywa również wiersz R_i . Zatem $I \leftarrow I - \{i\}$.

Krok 5. Usunięcie dominujących kolumn.

Jeżeli $C_j \leq C_k$ to kolumnę C_j można usunąć. $J \leftarrow J - \{j\}$.

Wariant 2. Uwzględniamy tylko koszty inwestycyjne.

Algorytm składa się z następujących kroków:

Krok 1. Usunięcie zerowych wierszy.

Jeżeli R_i jest zerowym wektorem dla pewnego i , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego, gdyż i -te ograniczenie nie może być spełnione.

Krok 2. Usunięcie zerowych kolumn.

Jeżeli C_j jest zerowym wektorem dla pewnego j , to zadanie nie ma rozwiązania dopuszczalnego. $J \leftarrow J - \{j\}$

Krok 3. Oszacowanie wartości x .

Jeżeli $R_i = e_k$, gdzie e_k jest wektorem jednostkowym z jedynką na k -tej pozycji dla pewnych wartości i, k , to $x_k = 1$ dla każdego rozwiązania dopuszczalnego. Kolumnę C_k można usunąć. Również można usunąć każdy wiersz R_i taki dla którego $i \in P_k$. Jest tak dlatego, że R_i nie może być pokryty przez C_k , zaś każdy element P_k będzie pokryty przez C_k .

Krok 4. Usunięcie dominujących wierszy.

Jeżeli $R_i \geq R_p$ dla pewnych i, p , to wiersz R_i można usunąć, gdyż pokrycie wiersza R_p pokrywa również wiersz R_i . Zatem $I \leftarrow I - \{i\}$.

Krok 5. Usunięcie dominujących kolumn.

Jeżeli $C_j \leq C_k$ to kolumnę C_j można usunąć. $J \leftarrow J - \{j\}$. Kolumna C_k pokrywa wszystkie elementy pokrywane przez C_j z mniejszym kosztem.

Wariant 3. Uwzględniamy koszty inwestycyjne i koszty "karne".

W tym przypadku algorytm przedstawia się następująco:

Wprowadźmy dodatkową zmienną y , dotyczącą odbiorców, taką że:

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \leq c_j$$

$$0 \leq y_i \leq p_i$$

Krok 1. Wyznaczenie wartości y .

Wartość zmiennej y_k dla $k = 1, \dots, m$ wyznacza się następująco:

$$y_k = \min\{p_k, \min_{j \in A_{k-1}} \{c_j - \sum_{i=1}^{k-1} y_i a_{ij}\}\}$$

Krok 2. Wyznaczenie zbioru J^* .

Zbiór J^* jest podzbiorem zbioru J ($J^* \subset J$) utworzonym przez dodanie do zbioru J^* indeksu $k \in J$ dla którego zmienna y_k przyjmuje wartość maksymalną.

Krok 3. Wyznaczenie zbioru J^{**} .

Zbiór J^{**} zawiera te numery kolumn, dla których y_k spełnia następujące zależności:

$$\sum_{i=1}^{k-1} y_i a_{ij} < c_j \quad \text{lub}$$

$$\sum_{i=1}^k y_i a_{ij} = c_j$$

Krok 4. Oszacowanie wartości x, z .

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \in J^{**} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \sum_{j \in J^{**}} a_{ij} = 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Jeżeli $c_j = 0$ to przyjmujemy, że $x_j = 1$ i usuwamy wszystkie wiersze i -te oraz wartości z_i dla których $a_{ij} = 1$,

Jeżeli $p_i = 0$ to przyjmujemy $z_i = 1$ i usuwamy wiersz i -ty.

Stosując powyższe kroki redukcji stwierdzamy, że:

- każdy wiersz $i \in I$ jest pokryty przez dokładnie jedną kolumnę $j \in J^{**}$,
- każdy wiersz $i \notin I$ dla którego $y_i = 0$ jest pokryty przynajmniej przez jedną kolumnę $j \in J^{**}$,
- każdy wiersz i , dla którego $y_i = p_i$ jest pokryty przez więcej niż jedną kolumnę $j \in J^{**}$.

3.2.6. Zadanie lokalizacji hydrantów na płycie lotniska

Każdy rzeczywisty przypadek zadania lokalizacji należy traktować indywidualnie. W pracy magisterskiej A. Zabrzewskiej [91] z 1995 roku rozpatrywany jest interesujący przykład zastosowania opisanego w tym punkcie modelu i algorytmu rozwiązania dla lokalizacji jednopoziomowej z ograniczeniami czasowymi. Przykład ten dotyczy optymalizacji rozmieszczenia hydrantów na płycie lotniska Warszawa-Okęcie. Inspiracją do rozpatrywania tego zagadnienia był wypadek, podczas którego rozbił się samolot typu Airbus. W trakcie trwania akcji gaśniczej zauważono, że istotnym problemem jest właściwe rozmieszczenie hydrantów na płycie lotniska. W celu zrozumienia istoty i złożoności problemu poniżej zostanie przedstawiony z punktu widzenia opis wydarzeń oraz sformułowanie zadania lokalizacyjnego i jego rozwiązanie. Szczegółowy opis tych zdarzeń może Czytelnik znaleźć na stronie internetowej <http://lotnictwo.net>. Należy tutaj zauważyć, iż przedstawiony poniżej przykład rozmieszczenia hydrantów zarówno przed jak i po wypadku samolotu stanowią opracowanie własne A. Zabrzewskiej [91]. Opracowany przykład miał jedynie posłużyć do pokazania Czytelnikowi, iż zadania lokalizacyjne są niezwykle istotne zwłaszcza wtedy, gdy w grę wchodzi życie ludzi.

Dane podstawowe

Dnia 14.09.1993 o godz.17.34 uległ wypadkowi samolot pasażerski typu Airbus A-320/211 znak rejestracyjny D-AIPN należący do linii lotniczej "Lufthansa", odbywający rejs rozkładowy z Frankfurtu n/Menem do Warszawy.

Do wypadku doszło na terenie portu lotniczego Warszawa-Okęcie, na pasie 11-29 (w tym samym miejscu zdarzyła się katastrofa samolotu TU-134 w 1979 roku). Wypadek został zauważony przez kontrolerów z Wieży Kontroli Ruchu Lotniczego. Punkt Alarmowy Lotniskowej Straży Pożarnej został powiadomiony o zdarzeniu o godz. 15.34 przez Wieżę Kontroli Ruchu Lotniczego.

Bezpośrednio przed przylotem samolotu, nad Warszawą przeszła gwałtowna ulewa połączona z silnym, porywistym wiatrem wiejącym ze zmiennych kierunków. W tych warunkach samolot podczas lądowania nie zdażył wyhamować przed końcem pasa i wjechał w sektor trawiasty na jego przedłużeniu. Następnie uderzył w wał ochronny i przed grzbietem przesunął się na drugą stronę urywając zawieszenie i lewy silnik oraz uszkadzając lewe skrzydło. W wyniku tego nastąpił wyciek paliwa, a następnie jego zapalenie.

Przebieg działań ratowniczo-gaśniczych

I. Czas operacyjny

Godz.15.34 - Zauważenie, zgłoszenie zdarzenia i zaalarmowanie pierwszej jednostki ochrony przeciwpożarowej.

- Godz.15.35 - Ogłoszenie alarmu dla innych służb PL Warszawa-Okęcie. Na miejsce wypadku przyjeżdża ambulans służby medycznej.
- Godz.15.36 - Ogłoszenie przez dyżurnego WSKR stanu gotowości dla jednostek Państwowej Straży Pożarnej (dalej zwanej jako PSP) przewidzianych w Planie Współdziałania do akcji ratowniczo-gaśniczych w czasie zdarzeń lotniczych.
- Godz.15.37 - Przybycie pierwszej jednostki Lotniskowej Straży Pożarnej (LSP) i wejście jej do akcji. Długość dojazdu ok.2820 m
- Godz.15.38 - Rozpoczęcie akcji gaśniczej, przetransportowanie osób ciężko rannych i osób, które odniosły lżejsze obrażenia.
- Godz.15.41 - Godzina lokalizacji pożaru
- Godz.17.15 - Godzina likwidacji pożaru.
- Czas trwania akcji ratowniczo-gaśniczej - 1 godz.41 min.

II. Rozpoznanie bezpośrednie

Zgłoszenie z Wieży Kontroli Ruchu Lotniczego lokalizowało tylko miejsce wypadku, nie podano typu samolotu i ilości pasażerów na pokładzie, informując jedynie o fakcie przebywania pasażerów w samolocie.

Samolot typu Airbus A-320 leżał kadłubem na ziemi, oparty prawym skrzydłem i ogonem o wał ziemny. Urwany został lewy silnik, a kadłub rozszczelniony. Wyjścia: lewe przednie, tylne drzwi i wyjścia awaryjne zostały otwarte. Na zewnątrz samolotu, na powierzchni krytycznej ok.1200m² rozprzestrzenił się pożar rozlewiska paliwa. Płomień przedostały się do wnętrza kadłuba.

Na miejscu zdarzenia załoga samolotu przystąpiła do ewakuacji pasażerów trapami ratunkowymi. Ewakuowało się 68 osób.

Jak już wspomnieliśmy wcześniej opisany powyżej wypadek posłużył A. Zabrzewskiej [91] do opracowania następującego przykładu tzn. zadania lokalizacji hydrantów:

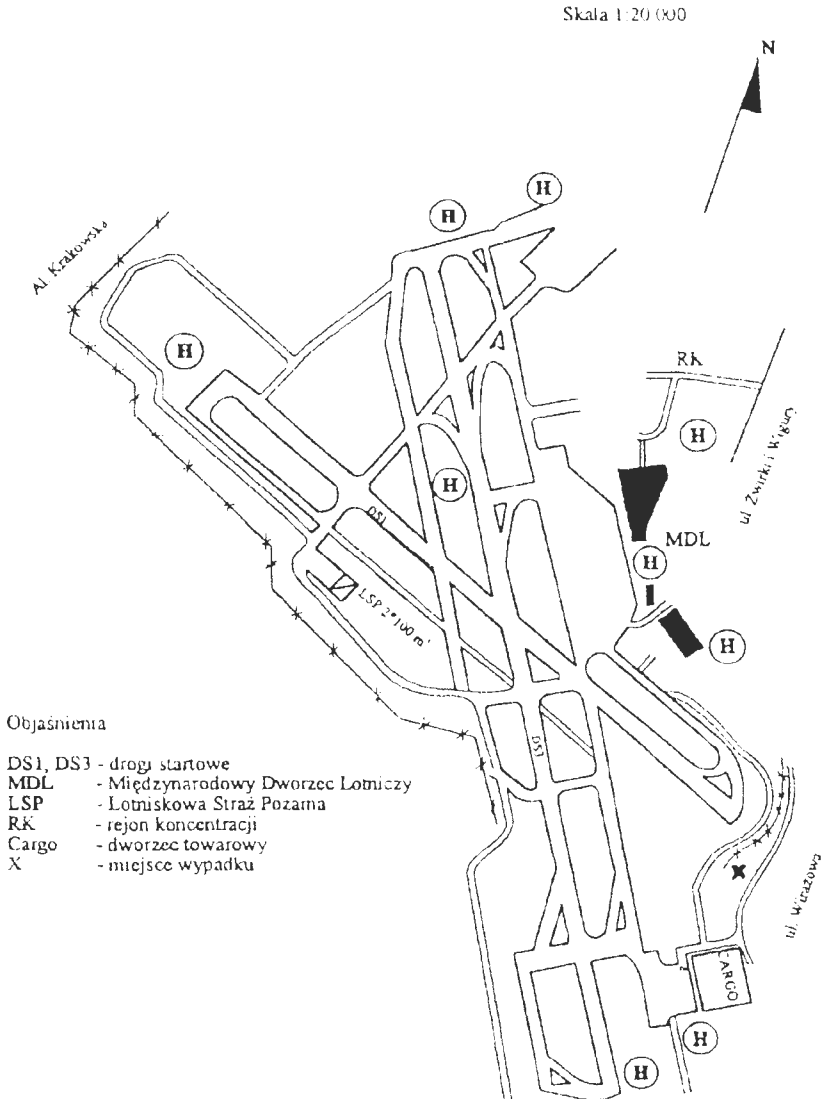
Przykład

1 System zaopatrzenia wodnego

Przy strażnicy LSP znajdują się dwa podziemne zbiorniki wody każdy o pojemności 100 m³. Sieć hydrantowa lotniska zasilana jest przez sieć hydrantową miejską. Hydranty zlokalizowane są przy większych obiektach lotniska, wokół mijanek, a także w okolicach końców pasów startowych. Przy progu 29 pasa I 1-29, w dniu zdarzenia nie znajdował się żaden hydrant. Najbliższe ujęcie wody było w odległości 500-800 m od miejsca zdarzenia.

Założono, że rozmieszczenie hydrantów na terenie poru lotniczego Warszawa-Okęcie podczas prowadzonej akcji ratowniczo-gaśniczej przedstawia rys.3.2.1.

Od początku akcji tzn. przez LSP przyjęty został wariant zaopatrzenia wodnego przez dowożenie. Jednostki LSP /4 samochody/ uzupełniały wodę z hydrantów przy Terminalu i przy Cargo oraz ze zbiorników podziemnych przy strażnicy. Samochody PSP również realizowały taką koncepcję zaopatrzenia wodnego.



PLAN ORIENTACYJNY - PORT LOTNICZY WARSZAWA-OKĘCIE

Rys. 3.2.1

Szczegółowy plan Portu Lotniczego im. Fryderyka Chopina w Warszawie można znaleźć na stronie <http://www.lotnisko-chopina.pl>.

2. Opis i ocena działań LSP

W pierwszej fazie LSP prowadziła działania zgodnie z zasadami przyjętymi dla tego typu zdarzeń. Ponieważ ogień przedostał się do części pasażerskiej nieskuteczne okazało się podawanie prądów piany z działek. Sytuację komplikował fakt ściekania kerozyny pod kadłub, w miejsca osłonięte przed dostępem prądów gaśniczych, dlatego też rozwinięto linie szybkiego natarcia. W fazie tej 4 z 5 samochodów LSP zjechały uzupełnić zapas wody, pozostały więc nie obsadzone stanowiska gaśnicze, które zajęły jednostki PSP. Wracające na teren akcji samochody LSP zmuszone były szukać innych stanowisk. Miało to niewątpliwie wpływ na skuteczność działań gaśniczych, gdyż skuteczność "lekkiej wody", w którą wyposażona jest LSP jest zdecydowanie wyższa niż skuteczność piany gaśniczej wytworzonej z "Roteoru".

Dojazdy pożarowe na terenie płyty lotniska są w technicznie dobrym stanie. Jednakże poruszanie się pojazdów po obszarze lotniska wymaga wykorzystania łączników posiadających łączność radiową z Wieżą Kontroli Ruchu Lotniczego. Dostęp do samolotu był utrudniony ze względu na ukształtowanie terenu.

Akcja ratowniczo-gaśnicza przeprowadzona była w sposób sprawny i efektywny, co wielokrotnie powtarzali świadkowie akcji. Na pozytywną ocenę działań ma wpływ fakt, że udało się wszystkich wyprowadzonych przez załogę z samolotu rannych przenieść w bezpieczne miejsce. Ponadto udało się nie dopuścić do zniszczenia zbiornika paliwa w prawym skrzydle i wybuchu 6 ton paliwa (odzyskanego po akcji).

Warto również zwrócić uwagę, że akcja prowadzona była w warunkach użytkowania 1 pasa startowego. Port lotniczy nie został zamknięty.

W wyniku wypadku poważnie został uszkodzony samolot Airbus A-320, który w wyniku późniejszego pożaru uległ zniszczeniu.

Wybór modelu

W rozważanym przykładzie nie istnieje możliwość przewidzenia, w którym miejscu płyty lotniska wydarzy się wypadek. Stąd też nie można określić dokładnej lokalizacji odbiorców. Punkty dostawy wody (hydranty) muszą zatem być tak rozmieszczone aby swoim zasięgiem pokrywały całą płytę lotniska. Biorąc pod uwagę specyfikę tego zadania przyjęto następujące założenia:

- 1) nie dokonuje się minimalizacji kosztów transportowych, ze względu na priorytet życia ludzkiego,

- 2) zgodnie z międzynarodowymi przepisami odnośnie bezpieczeństwa ruchu lotniczego, rozpatrywany teren musi być w pełni pokryty usługą, więc koszty "karne" są pomijane.

Sformułowane zadanie lokalizacji dla tego przykładu przyjmuje postać, której matematyczny opis sprowadza się do zagadnienia pokrycia i został przedstawiony w punkcie 3.2.2.

Rozwiązanie przykładu

Założenia

Jak wynika z mapy zamieszczonej na rys. 3.2.1 lotniskowa sieć hydrantowa pokrywa oba pasy startowe, Terminal 1 i budowle przyległe. Bardzo duże skupisko hydrantów (głównie nadziemnych) znajduje się przy Terminalu i parkingu. Z tego też względu w poniższym przykładzie ograniczamy się tylko do lokalizacji hydrantów na płycie lotniska, biorąc pod uwagę fakt, że największa ilość wypadków lotniczych zdarza się na końcach pasów startowych.

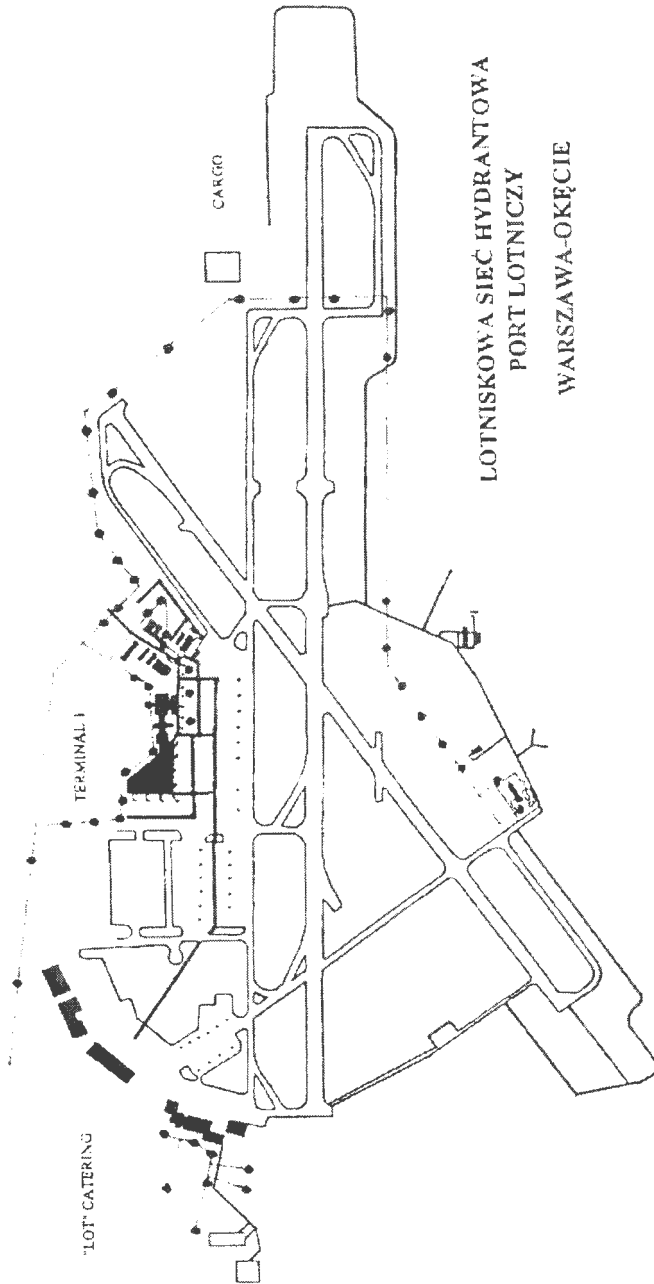
Przykład przedstawiony jest w dwóch wariantach:

- 1) bierzemy pod uwagę tylko istniejące lokalizacje hydrantów w sieci i wyznaczamy optymalne rozwiązanie dla nich,
- 2) rozbudowujemy istniejący układ sieci hydrantowej poprzez dodanie dodatkowych punktów lokalizacji hydrantów.

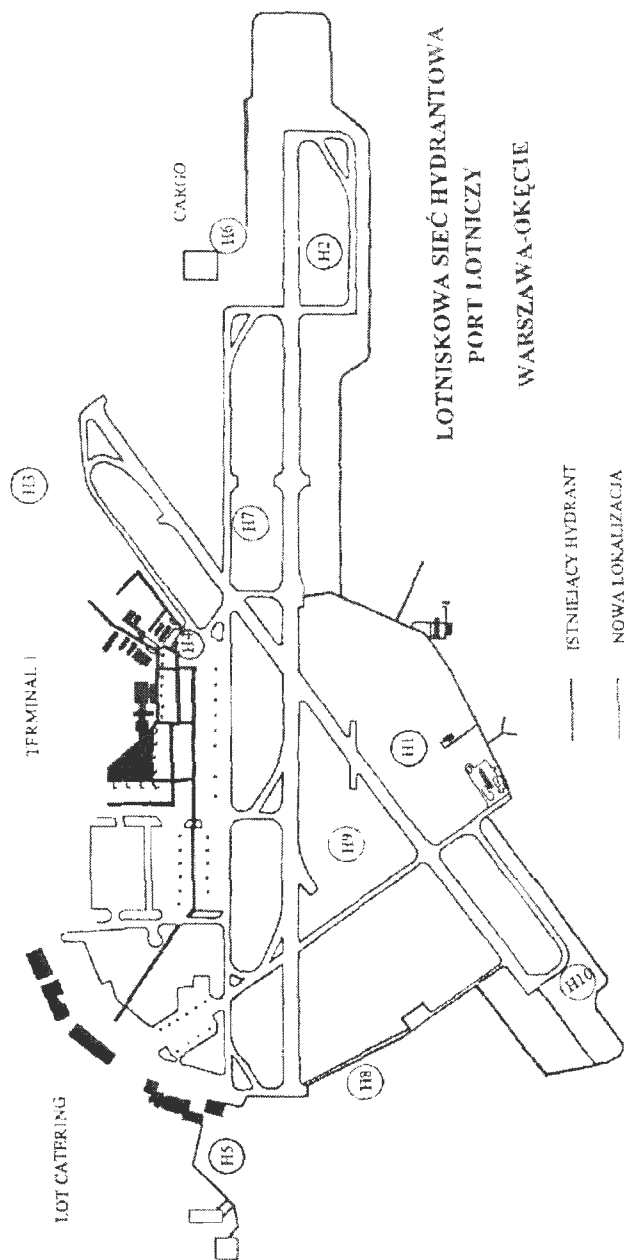
Oba warianty rozwiązywane są w oparciu o oznaczenia przyjęte na rys.3.2.2. Oznaczenie H, w zależności od sytuacji dotyczy:

- pojedynczego hydrantu
- skupiska hydrantów w danym miejscu.

Rozważmy zatem wariant pierwszy powyższego przykładu. W tym przypadku nie uwzględniamy żadnych kosztów. Dokonujemy jedynie redukcji macierzy określającej zależność odbiorca-dostawca, biorąc pod uwagę możliwość wystąpienia odbiorców w całej rozpatrywanej przestrzeni. Zależność ta, zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys.3.2. gdzie wiersze oznaczają odbiorców, a kolumny dostawców, jest następująca:



Rys. 3.2.2



RYS. 3.2.3

$$a_{ij} = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

W tym przypadku stosujemy kroki algorytmu dla wariantu pierwszego. W pierwszej fazie redukcji na mocy kroku 3, usuwamy wiersze R_1, R_5 i kolumnę C_1 która należy do rozwiązania, $x_1 = 1$. Następnie stosując krok 4 usuwamy wiersz $R_7 (R_2 < R_7)$, stosując krok 5 usuwamy kolumnę $C_4 (C_3 > C_4)$. Macierz określona jest wówczas dla wierszy $i = 2, 3, 4, 6$ i kolumn $j = 2, 3, 5$.

$$a_{ij} = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

W drugiej fazie redukcji, zgodnie z krokiem 3 usuwamy wiersz R_2 i kolumnę C_2 , która również wchodzi do rozwiązania, $x_2 = 1$. Następnie stosujemy krok 4 i usuwamy wiersz $R_6 (R_3 = R_6)$. Macierz przedstawia się wówczas następująco:

$$a_{ij} = \begin{array}{c|cc} & 3 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}$$

Otrzymujemy niezredukowaną macierz, której kolumny C_3 i C_5 należą również do rozwiązania zadania.

Rozwiązaniem powyższego wariantu jest wektor S , który zawiera kolumny, które należą do każdego rozwiązania optymalnego. $S = \{x_j = 1, j = 1, 2, 3, 5\}$.

W wariantcie drugim zgodnie z założeniami zadania, koszty transportowe i koszty "karne" pomijamy. Uwzględniamy tylko koszty inwestycyjne, które przyjmują jedną z dwóch wartości:

$$\begin{cases} 1 & \text{dla nowej lokalizacji} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Uwzględniając założenia i oznaczenia przyjęte powyżej, macierz określająca wzajemne zależności odbiorcy (samolot, który uległ katastrofie) z dostawcą (hydrant) przedstawia się następująco:

$$a_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array}$$

Wektor kosztów inwestycyjnych dla każdego z dostawców jest następujący:

$$c_j = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

W tym przypadku stosujemy algorytm dla wariantu, gdy uwzględniamy tylko koszty inwestycyjne.

W pierwszej fazie redukcji usuwamy, zgodnie z krokiem 3, wiersze R_7, R_3 i kolumnę C_2 , która wchodzi do rozwiązania zadania, $x_2 = 1$. Następnie stosujemy krok 5 i usuwamy, w wyniku porównania kolumn C_1, C_{10} , ($C_1 > C_{10}$ i $c_1 < c_{10}$), kolumnę C_{10} z większym kosztem. Macierz po tej fazie zawiera wiersze $i=1,3,4,5,6,7$ i kolumny $j=1,3,4,5,6,7,8,9$.

$$a_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array}$$

$$c_j = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

W drugiej fazie redukcji, stosując krok 3 algorytmu usuwamy wiersze R_5 i R_1 oraz kolumnę C_1 , która również należy do rozwiązania, $x_1 = 1$. Następnie zgodnie z krokiem 5 usuwamy kolumnę C_4 , ($C_3 > C_4$ i $c_3 = c_4$). Macierz jest wówczas określona dla wierszy $i = 3,4,6$ i kolumn $j = 3,5,6,7,8,9$.

$$a_{ij} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$c_j = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

W trzeciej fazie redukcji, zgodnie z krokiem 5 usuwamy kolumnę C_6 ($C_3 > C_6$ i $c_3 < c_6$). Macierz zawiera wiersze $i = 3,4,6$ i kolumny $j = 3,5,7,8,9$.

$$a_{ij} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$c_j = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

W czwartej fazie redukcji zgodnie z krokiem 4 usuwamy wiersz R_6 ($R_3 < R_6$).

$$a_{ij} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$c_j = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

W piątej fazie redukcji stosujemy krok 5 algorytmu i usuwamy kolumnę C_7 ($C_3 = C_7$ i $c_3 < c_7$).

$$a_{ij} = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 3 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$c_j = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

W szóstej fazie redukcji stosując krok 3 usuwamy wiersz R_3 i kolumnę C_3 .

$$a_{ij} = 4 \begin{array}{ccc} & 5 & 8 & 9 \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$c_j = [0 \quad 1 \quad 1]$$

W siódmej i ósmej fazie redukcji zgodnie z krokiem 5 algorytmu usuwamy kolumny $C_8 (C_5 = C_8 \text{ i } c_5 < c_8)$ i $C_9 (C_5 = C_9 \text{ i } c_5 < c_9)$.

s

$$a_{ij} = 4 \begin{array}{c} 5 \\ \left| \begin{array}{c} 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$c_j = [1]$$

Ostatecznie otrzymujemy macierz zredukowaną do postaci jednego elementu a_{45} .

Rozwiązaniem powyższego wariantu jest wektor $S = \{x_j = 1, j = 1, 2, 3, 5\}$, który oznacza, że dostawcy (hydranty) oznaczeni numerami 1, 2, 3, 5 w pełni pokrywają teren.

3.3. Metody rozwiązywania zadań lokalizacji dwupoziomowej

3.3.1. Model lokalizacji dwupoziomowej

$$\min \sum_{i \in L} f_i y_i + \sum_{i \in L} g_j z_j + \sum_{i \in L} \sum_{j \in M} \sum_{k \in N} c_{ijk} x_{ijk} \quad (3.3.1)$$

ograniczenia:

$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in M} x_{ijk} = 1 \quad k \in N \quad (3.3.2)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ijk} \leq y_i \quad j \in M, \quad k \in N \quad (3.3.3)$$

$$\sum_{i \in L} x_{ijk} \leq z_j \quad j \in M, \quad k \in N \quad (3.3.4)$$

$$y_i \leq z_i \quad i \in L \quad (3.3.5)$$

$$y_i, z_j \in \{0,1\} \quad i \in L, \quad j \in M, \quad k \in N$$

$$x_{ijk} \geq 0$$

gdzie:

i - numer dostawcy,

j - numer magazynu pośredniego,

k - numer odbiorcy,

f_i - stałe koszty i -tego dostawcy,

g_j - stałe koszty j -tego magazynu pośredniego,

c_{ijk} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowań k -tego odbiorcy przez i -tego dostawcę i j -ty magazyn,

x_{ijk} - udział i -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania k -tego odbiorcy poprzez j -ty magazyn pośredni,

$z_j = \begin{cases} 1 & \text{– jeśli lokalizacja } j \text{- tego magazynu pośredniego jest rozpatrywana} \\ 0 & \text{– w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

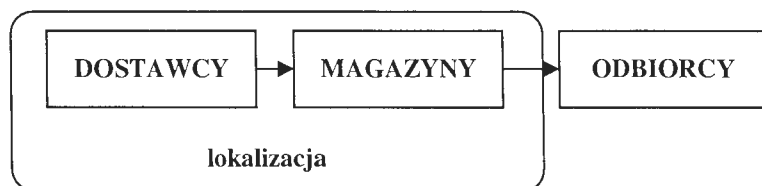
$y_j = \begin{cases} 1 & \text{– jeśli lokalizacja } i \text{- tego dostawcy jest rozpatrywana} \\ 0 & \text{– w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

Funkcja celu wyraża całkowite, sumaryczne koszty składające się ze stałych kosztów f_i dla dostawców, g_j dla magazynów pośrednich oraz kosztów c_{ijk} produkcji i transportu od dostawcy, magazynowania i transportu między dostawcą a magazynem pośrednim oraz transportu z magazynu do odbiorcy. Jeśli koszty u dostawców są

nieliniowe, można je aproksymować liniowo przez wprowadzenie fikcyjnych dostawców lub magazynów pośrednich.

Ograniczenia (3.3.2) zapewniają zaspokojenie zapotrzebowań a (3.3.3) i (3.3.4), że zapotrzebowania te będą zaspokojone tylko przez rozpatrywanych dostawców i magazyny pośrednie. Ograniczenia (3.3.5) mówią, że magazyn pośredni związany z i -tym dostawcą musi być uwzględniony, jeśli jest rozpatrywany i -ty dostawca.

Opisany powyżej model można zobrazować następująco:



Jednopoziomowe zadanie lokalizacji (3.1.1) występuje w literaturze stosunkowo często i ma liczne zastosowania. Natomiast dwupoziomowe zadania lokalizacji pojawia się w literaturze rzadko, co jest związane przede wszystkim z istotnymi trudnościami w konstrukcji algorytmu dającego optymalne rozwiązanie w zadowalającym czasie. Autorki opracowały algorytmy i oprogramowanie dla obydwu zadań. W zadaniu pierwszym rozwiązującym zagadnienie lokalizacji jednoasortymentowej z ograniczonymi pojemnościami została wykorzystana własność submodularności funkcji celu, co zapewniło optymalność rozwiązań. W drugim zadaniu rozwiązującym zagadnienie o nieograniczonej pojemności magazynów pośrednich oraz dróg dojazdowych i nieograniczonych możliwościach dostawców autorki opierają się na założeniach algorytmu Kaufmana, Edego oraz Hansena [42]. Otrzymywane dla tego algorytmu rozwiązania są suboptymalne, co wynika, jak powiedziano wyżej, ze złożoności problemu.

3.3.2. Algorytm LOCAL 2

Klasa zadań, dla których algorytm Kaufmana, Edego i Hansena [42] prowadzi do optymalnego rozwiązania jest wąska i niestety nie obejmuje wielu istotnych problemów wynikających z praktycznego zastosowania. Stąd pojawiła się konieczność opracowania nowego, bardziej uniwersalnego algorytmu LOCAL 2 [76], którego kolejne kroki opisane są poniżej.

I. Wprowadzenie danych.

II. Badanie poprawności sformułowania zadania lokalizacji.

III. Wyznaczenie wartości początkowej dla z_{opt} ; jest to wartość funkcji celu dla rozwiązania dopuszczalnego, obejmującego wszystkie możliwe inwestycje zarówno

dostawców jak i magazynów pośrednich, co daje w rezultacie górne ograniczenie dla funkcji celu.

- IV. Badanie, czy istnieje jednocześnie przynajmniej 1 dostawca i 1 magazyn pośredni jako obowiązkowe inwestycje.
- Jeżeli tak, to procedurą WYZ_ROZW wyznaczone jest rozwiązanie badanego problemu.
 - Jeżeli nie, to algorytm rozwiązuje $I \times J$ podproblemów, dla których symuluje sytuacje istnienia przynajmniej 1 dostawcy oraz 1 magazynu pośredniego jednocześnie, tzn. podproblemów rozwiązywanych w punkcie IVa; każdy podproblem rozwiązywany jest procedurą WYZ_ROZW. Spośród tych rozwiązań wszystkich podproblemów rozwiązanie o najmniejszej wartości funkcji celu jest rozwiązaniem optymalnym zadania podstawowego.

PROCEDURA WYZ_ROZW:

- Wyznaczenie dróg minimalnych dla proponowanych w danej iteracji danego podproblemu inwestycji. Wyznaczenie z' – pierwszej dolnej granicy dla funkcji celu.
 - Jeżeli $z1_opt < z'$ to zaproponowane w ostatniej iteracji inwestycje pogarszają wartość funkcji celu, muszą zatem zostać odrzucone jako nieperspektywiczne.
 - Jeżeli $z1_opt \geq z'$ to zaproponowane w ostatniej iteracji inwestycje mogą być brane pod uwagę, przy czym: jeżeli zbiór inwestycji został wyczerpany dla danego podproblemu (TROZ=true) to znaczy osiągnięto rozwiązanie optymalne dla danego podproblemu – proces iteracyjny zostaje zakończony; jeżeli zbiór inwestycji nie został wyczerpany (TROZ=false) to rozwiązanie jest dopuszczalne, ale nie musi być optymalne.
- Wyznaczenie wartości P_i oraz Q_j , będących górnymi granicami dla zysku jaki przyniosłoby dokonanie inwestycji w punktach i oraz j gdyby następna iteracja uwzględniała taką inwestycję. W ogólności P_i (Q_j) nie jest supremum dla wartości zysku w punktach i (j).
 - dla tych inwestycji i oraz j , dla których $P_i < 0$ oraz $Q_j < 0$ funkcja celu może tylko pogorszyć swoją wartość, dlatego inwestycje te zostają warunkowo zawieszono w rozpatrywanej iteracji algorytmu.
 - dla tych inwestycji i oraz j , dla których $P_i \geq 0$ oraz $Q_j \geq 0$ wyznaczana jest druga dolna granica funkcji celu z'' .
- Jeżeli $z1_opt < z''$ to otrzymujemy informację, że rozpatrywana w tej iteracji gałąź rozwiązań jest nieperspektywiczna. Stąd należy odrzucić proponowaną w poprzedniej iteracji inwestycję jako nie dającą poprawy wartości funkcji celu oraz inwestycje warunkowo odrzucone w bieżącej iteracji (w punkcie V a) przywrócić jako mogące w innej iteracji przynosić zysk tj. obniżenie wartości funkcji celu.

- b. Jeżeli $z1_opt \geq z''$, to dla wszystkich par (i, j) takich, że albo inwestycje i oraz j zostały dokonane w poprzednich iteracjach albo $P_i \geq 0$ oraz $Q_j \geq 0$ w bieżącej iteracji, wyznaczana jest wartość funkcji celu; jako f_akt przyjmowana jest najmniejsza z tych wartości.
- IV a. Jeżeli $f_akt \geq z1_opt$ to otrzymane w poprzednim kroku rozwiązanie było optymalne. Funkcja celu nie osiąga dalszej poprawy i można proces dokonywania nowych inwestycji zatrzymać, tj. zmiennym decyzyjnym nie dokonanych do tej pory inwestycji przypisuje się wartość 0. Powrót do punktu I v.
- b. Jeżeli $f_akt < z1_opt$ to oznacza, że można dobrać taką inwestycję i lub j , dla której funkcja celu poprawia tj. obniża swoją wartość. Po dokonaniu odpowiedniej inwestycji następuje powrót do punktu I.

Podstawowe różnice pomiędzy algorytmem Kaufmana, Edego i Hansena, a zaproponowanym przez autorów nowym algorytmem rozwiązującym zadanie lokalizacji dwupoziomowej można sformułować następująco:

1. Algorytm Kaufmana, Edego i Hansena rozwiązywał zadanie lokalizacji dwupoziomowej tylko przy założeniu, że istnieje przynajmniej jeden stały dostawca oraz jeden stały magazyn pośredni. Natomiast nowy algorytm jest przygotowany na rozwiązywanie zadania lokalizacji dwupoziomowej dla wszystkich możliwych sytuacji inwestycyjnych, które podzielono na następujące cztery grupy:
 - I. nie zakłada się obowiązkowych inwestycji dla zbioru dostawców oraz dla zbioru magazynów pośrednich tj. $\forall i \in I \quad y[i] = -1, \forall j \in J \quad z[j] = -1$,
 - II. obowiązkowe inwestycje dotyczą tylko części zbioru dostawców, tj. $\exists i \in I \quad y[i] = +1, \forall j \in J \quad z[j] = -1$.
 - III. obowiązkowe inwestycje dotyczą tylko części zbioru magazynów pośrednich tj. $\forall i \in I \quad y[i] = -1, \exists j \in J \quad z[j] = +1$.
 - IV. obowiązkowe inwestycje dotyczą zarówno części zbioru dostawców jak i części zbioru magazynów pośrednich, tj. $\exists i \in I \quad y[i] = +1, \exists j \in J \quad z[j] = +1$.
 Algorytm ten został pomyślany tak, że przypadek IV rozwiązywany jest procedurą podstawową WYZ_ROZW, przypadki I, II i III sprowadzane są dla $I \times J$ symulacyjnych podproblemów, z których każdy jest tą samą procedurą WYZ_ROZW.
2. Tak jak to zostało stwierdzone już wyżej algorytm Kaufmana, Edego i Hansena daje w ogólności rozwiązanie suboptymalne. Związane jest to z przyjęciem przez Kaufmana, Edego i Hansena założenia, że wybór inwestycji dla dostawców lub dla magazynów pośrednich jest dokonywany według reguły:

$$\max(P_k, Q_l), \text{ gdzie } P_k = \max_i P_i, \quad Q_l = \max_j Q_j.$$

Reguła ta nie uwzględnia jednak wpływu na wartość zysku P_k (lub odpowiednio Q_i) kosztów związanych z jednoczesnym dokonywaniem inwestycji dla magazynów pośrednich (odpowiednio dla dostawców) stanowiących obowiązkowe uzupełnienie w danej iteracji.

Zaproponowany przez autorki algorytm jest już wolny od tego podejścia prowadzącego w ogólności do rozwiązywania suboptymalnego. Spośród wolnych inwestycji o nieujemnych wartościach P_i oraz Q_j wybierana jest taka, która uwzględnia koszty inwestycyjne skojarzonych z nią inwestycji i daje przez to faktyczne polepszenie wartości funkcji celu.

Przykład 5, opisany poniżej doskonale ilustruje różnice w podejściu autorów. Algorytm Kaufmana, Edego i Hansena wybiera w kolejnych iteracjach największe wartości dla zysków P_k oraz Q_i co prowadzi do rozwiązania o wartości funkcji celu wyższej niż faktyczne rozwiązanie optymalne. Przykład ten został przygotowany na podstawie danych rzeczywistych, gdzie różnice inwestycyjne dla poszczególnych punktów lokalizacji są niewielkie przy jednoczesnych nie dużych różnicach dla kosztów eksploatacyjno-transportowych.

Przykład 1 przedstawiający przypadek I

$$i_max = 3, \quad j_max = 3, \quad k_max = 3$$

i	1	2	3
$f[i]$	5	7	9
$y[i]$	-1	-1	-1

j	1	2	3
$g[j]$	7	8	9
$z[j]$	-1	-1	-1

$$\forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad c[i, j, k] = 1.$$

Rozwiązanie optymalne : $Z_{opt} = 15$ dla $y[1] = z[1] = 1$
pozostałe zmienne = 0.

Przykład 2 przedstawiający przypadek II

$$i_max = 4, \quad j_max = 4, \quad k_max = 4$$

i	1	2	3	4
$f[i]$	2	3	1	1
$y[i]$	1	-1	-1	-1

j	1	2	3	4
$g[j]$	1	2	1	3
$z[j]$	-1	-1	-1	-1

$$c[i, j, k] =$$

$k =$	1.....4 $j = 1$	1.....4 $j = 2$	1.....4 $j = 3$	1.....4 $j = 4$
$i = 1$	4 4 4 4	4 4 4 4	4 4 4 4	4 4 4 4
$i = 2$	1 1 2 6	5 5 5 5	5 5 5 5	5 5 5 5
$i = 3$	5 5 5 5	5 5 5 5	5 5 5 5	5 5 5 5
$i = 4$	4 4 4 4	4 4 4 4	4 4 4 4	2 2 3 1

Rozwiązanie optymalne $Z_{opt} = 14$ dla $y[1] = y[2] = z[1] = 1$
pozostałe zmienne = 0.

Przykład 3 przedstawiający przypadek III

$$i_max = 3, \quad j_max = 3, \quad k_max = 3$$

i	1	2	3
$f[i]$	5	7	9
$y[i]$	-1	-1	-1

j	1	2	3
$g[j]$	7	8	9
$z[j]$	-1	1	-1

$$\forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad c[i, j, k] = i * j * k..$$

Rozwiązanie optymalne $Z_{opt} = 25$ dla $y[1] = z[2] = 1$
pozostałe zmienne = 0.

Przykład 4 przedstawiający przypadek IV

$$i_max = 3, \quad j_max = 3, \quad k_max = 3$$

i	1	2	3
$f[i]$	5	7	9
$y[i]$	-1	-1	1

j	1	2	3
$g[j]$	7	8	9
$z[j]$	-1	1	-1

$$\forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad c[i, j, k] = 1.$$

Rozwiązanie optymalne $Z_{opt} = 20$ dla $y[3] = z[2] = 1$
pozostałe zmienne = 0.

Przykład 5

Dla tego przypadku dokonano adaptacji problemu rzeczywistego i przebadano wszystkie możliwe konfiguracje inwestycji dla wszystkich możliwych przypadków 1-IV i każdorazowo otrzymano poprawne rozwiązanie optymalne.

Tutaj podano tylko 4 przykładowe przypadki.

$$i_max = 8, \quad j_max = 8, \quad k_max = 8$$

i, j	1	2	3	4	5	6	7	8
$f[i]$	3	4	1	2	3	2	2	2
$g[j]$	1	3	1	2	1	2	2	2

$$c[i, j, k] =$$

k	1.....8																							
$j = 1..8$																								
(i, j)																								
(1, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	3	3	4	4	5	4	4	5	4	4	4
	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	4	4	6	4	6	4	5	4	5
	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3								
(2, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	3	3	4	3	3	4	3	3	3
	3	3	3	4	4	3	3	3	2	2	2	3	3	3	2	3	2	4	2	4	2	3	2	3
	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4								
(3, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	3	2	2	2
	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	4	3	5	3	5	3	4	3	4
	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4								
(4, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	3	3	4	2	3	2	2	3	2	2	2
	3	3	3	4	4	4	3	3	4	4	4	5	5	5	4	5	4	6	4	6	4	5	4	5
	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3								
(5, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	4	4	4	5	5	4	4	5	2	3	2	2	3	2	2	2
	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	4	2	4	2	4	2	3	2	3
	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3								
(6, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	3	3	4	2	3	2	2	3	2	2	2
	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	4	3	5	3	5	3	4	3	4
	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3								
(7, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	3	3	4	3	3	4	3	3	3
	3	3	3	4	4	3	3	3	2	2	2	3	3	3	2	3	2	4	2	4	2	3	2	3
	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3								
(8, j)	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	3	3	4	2	3	2	2	3	2	2	2
	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2	4	2	4	2	3	2	3
	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4								

- a. wszystkie zmienne free (przypadek I)
 $Z_{opt} = 20$ dla $y[3] = z[3] = 1$,
- b. $y[1] = 1$, pozostałe zmienne free (przypadek II)
 $Z_{opt} = 21$ dla $y[1] = z[7] = 1$,
- c. $z[6] = 1$, pozostałe zmienne free (przypadek III).
 $Z_{opt} = 22$ dla $y[8] = z[6] = z[7] = 1$,
- d. $y[5] = 1$, $z[5] = 1$, pozostałe zmienne free (przypadek IV)
 $Z_{opt} = 23$ dla $y[5] = z[5] = z[3] = 1$. Dla tego przypadku obowiązkowa inwestycja $y[5]$ jest zbędna!!!

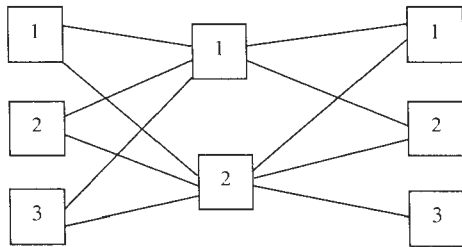
Przykład 6 przedstawiający przypadek I

$$i_max = 3, \quad j_max = 2, \quad k_max = 3$$

i	1	2	3
$f[i]$	1	1	1

j	1	2
$g[j]$	1	1

C	k	1	2	3
(i, j)				
(1,1)		1	1	1
(1,2)		1	2	1
(2,1)		2	1	2
(2,2)		1/3	2	1
(3,1)		1	2	2
(3,2)		1	1/3	2



Wszystkie inwestycje nie są obowiązkowe.

Rozwiązanie optymalne $Z_{opt} = 4 \frac{2}{3}$ dla $y[2] = y[3] = z[2] = 1$

pozostałe zmienne = 0.

Przykład ten doskonale ilustruje następującą własność rozwiązań dla zadań lokalizacji dwupoziomowej:

Jeżeli dla pary inwestycji (i^*, j^*) aktualna wartość funkcji celu przyjmuje najmniejszą wartość spośród wszystkich par (i, j) tj. $f_{akt}(i^*, j^*) = \min f_{akt}(i, j)$, to wcale inwestycje i oraz j nie muszą należeć do rozwiązania optymalnego zadania.

Dla danego przykładu zachodzi:

$f_{akt}(1,1) = 5$, $f_{akt}(2,2) = 5 \frac{1}{3}$, $f_{akt} \sum$, ale $Z_{opt}(2,3;2) = 4 \frac{2}{3}$ i inwestycje $i^* = 1$ oraz $j^* = 1$ nie należą do żadnego rozwiązania optymalnego.

3.3.3. Zadanie lokalizacji punktów skupu dla Zakładu Hortex w Leżajsku

Dane otrzymane z Zakładu Hortex dotyczyły lokalizacji punktów skupu owoców oraz ich przewozu do zakładu przetwórczego. Punkty skupu o numerach od 1 do 16 mają ustaloną lokalizację i ustaloną pojemność. Są to punkty już istniejące. Numery od 17 do 20 przyporządkowano potencjalnym lokalizacjom nowych punktów skupu. Wszystkie one mają stałe koszty rozbudowy 1000. Koszty eksploatacyjne przyjęto jako zerowe. Jednostkowe koszty transportowe do obliczeń zostały przyjęte jako proporcjonalne do odległości drogowych. Pojemności poszczególnych punktów, odległości drogowe oraz zapotrzebowanie zakładu przetwórczego zestawiono w poniższej tabeli.

L.p.	Punkt skupu	Pojemność	Koszty transportowe
1.	Trzebuska	80	29
2.	Wólka niedzw.	90	21
3.	Sokołów	100	27
4.	Kozłówek	100	100
5.	Kuryłówka	70	22
6.	Brzyska Wola	130	25
7.	Grodzisko Dl. 1	140	16
8.	Grodzisko Dl.	50	18
9.	Chdaczów	150	23
10.	Dębno	45	15
11.	Nieszawice 10	80	8
12.	Nieszawice 36	40	10
13.	Nieszawice 39	100	7
14.	Giedlarowa 4	110	5
15.	Piskorowice	60	5
16.	Leżajsk 1	50	3
17.	Trzebuska 21	200	33
18.	Trzebuska 22	150	31
19.	Giedlarowa 9	105	5
20.	Wólka Niedzw. 7	120	22
21.	Krosno	zapotrzebowanie - 1500	

Na pierwszym poziomie wszystkie wierzchołki jednoelementowe są perspektywiczne, a więc generujemy wierzchołki dwuelementowe. Wśród nich minimalne koszty całkowite daje wariant (19, 20).

Optymalną wartość funkcji celu – 25950 daje zlokalizowanie dwóch dodatkowych punktów skupu Giedlarowa 9 (nr 19) i Wólka Niedźw. 7 (nr 20).

3.3.4. Zadanie lokalizacji punktów skupu mleka dla mleczarni w Krośnie

Dla mleczarni w Krośnie przeprowadzono obliczenia dotyczące lokalizacji punktów skupu mleka. Również tu jednostkowe koszty transportowe zostały przyjęte do obliczeń jako proporcjonalne do odległości drogowych. W prezentowanym przykładzie punkty skupu mleka o numerach od 1 do 18 mają już ustaloną lokalizację. Numery 19 – 23 są przyporządkowane potencjalnym lokalizacjom. Przyjęto stałe koszty budowy nowych punktów skupu oraz zerowe koszty eksploatacyjne. Poniższa tabela przedstawia dane dotyczące kosztów transportowych oraz pojemności punktów skupu mleka.

L.p.	Punkt skupu	Pojemność	Koszty transportowe
1.	Korczyzna	5	5
2.	Głowienka	10	5
3.	Odrzykoń	5	10
4.	Żegice	7	10
5.	Iwonicz	20	14
6.	Jedlicze	15	14
7.	Moderówka	8	14
8.	Lubatówka	5	15
9.	Wietrzno	7	15
10.	Wojaszówka	9	15
11.	Wróblík	11	16
12.	Krasna	20	20
13.	Tarnowiec	26	20
14.	Ceglowa	7	20
15.	Iskrzynia	18	24
16.	Iwła	20	35
17.	Szklary	15	35
18.	Jaśliska	30	40
19.	Zręcin	26	17
20.	M.Piastowe	10	10
21.	Jaszczew	8	11
22.	Glinik	9	21
23.	Tylawa	10	31
24.	Krosno	zapotrzebowanie - 280	

Dla tego przykładu minimalne koszty całkowite: 5793 daje wariant jednoelementowy. Proponowanym rozwiązaniem jest zlokalizowanie punktu skupu mleka w Jaszczewie (nr 21).

3.4. Metody rozwiązywania zadań lokalizacji dwupoziomowej z uwzględnieniem ograniczeń pojemnościowych

3.4.1. Model matematyczny dla zadania lokalizacji dwupoziomowej z ograniczonymi pojemnościami

Ogólny model matematyczny przedstawia się następująco:

$$\min \sum_{i \in L} f_i y_i + \sum_{j \in M} g_j z_j + \sum_{i \in L} \sum_{j \in M} \sum_{k \in N} c_{ijk} x_{ijk} \quad (3.4.1.1)$$

ograniczenia:

$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in M} x_{ijk} = 1 \quad k \in N \quad (3.4.1.2)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ijk} \leq y_i \quad j \in M, k \in N \quad (3.4.1.3)$$

$$\sum_{i \in L} x_{ijk} \leq z_j \quad j \in M, k \in N \quad (3.4.1.4)$$

$$\sum_k D_k \sum_j x_{ijk} \leq S_i y_i \quad i = 1, \dots, I \quad (3.4.1.5)$$

$$\sum_k D_k \sum_i x_{ijk} \leq V_j z_j \quad j = 1, \dots, J \quad (3.4.1.6)$$

$$y_i \leq z_i \quad i \in L \quad (3.4.1.7)$$

$$j_i, z_j \in \{0,1\} \quad i \in L, j \in M, k \in N$$

$$x_{ijk} \geq 0$$

gdzie:

- i - numer dostawcy,
- j - numer magazynu pośredniego,
- k - numer odbiorcy,
- f_i - stałe koszty i -tego dostawcy,
- g_j - stałe koszty j -tego magazynu pośredniego,
- c_{ijk} - całkowite koszty eksploatacji i dystrybucji związane z realizacją zapotrzebowań k -tego odbiorcy przez i -tego dostawcę i j -ty magazyn

x_{ijk} - udział i -tego dostawcy w realizacji zapotrzebowania k -tego odbiorcy przez j -ty magazyn pośredni

$z_j = \begin{cases} 1 & \text{– jeśli lokalizacja } j \text{ - tego magazynu pośredniego jest rozpatrywana} \\ 0 & \text{– w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

$y_i = \begin{cases} 1 & \text{– jeśli lokalizacja } i \text{ - tego dostawcy jest rozpatrywana} \\ 0 & \text{– w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

Funkcja celu wyraża całkowite, sumaryczne koszty składające się ze stałych kosztów f_i dla dostawców, g_j dla magazynów pośrednich oraz kosztów c_{ik} produkcji i transportu od dostawcy, magazynowania i transportu między dostawcą a magazynem pośrednim oraz transportu z magazynu do odbiorcy. Jeśli koszty u dostawców są nieliniowe, można je aproksymować liniowo przez wprowadzenie fikcyjnych dostawców lub magazynów pośrednich.

Ograniczenia (3.4.1.2) zapewniają zaspokojenie zapotrzebowań, a (3.4.1.3) i (3.4.1.4), że zapotrzebowania te będą zaspokojone tylko przez rozpatrywanych dostawców i magazyny pośrednie. Ograniczenia (3.4.1.7) mówią, że magazyn pośredni związany z i -tym dostawcą musi być uwzględniony, jeśli jest rozpatrywany i -ty dostawca.

Ograniczenia (3.4.1.5) i (3.4.1.6) zapewniają nieprzekraczalność ograniczeń pojemnościowych, odpowiednio dla zakładów pośrednich i dostawców.

Jak to już zostało podkreślone w Rozdziale 3.3.1, dwupoziomowe zadanie lokalizacji pojawia się w literaturze rzadko. Związane jest to przede wszystkim z istotnymi trudnościami pojawiającymi się przy konstrukcji algorytmu dającego optymalne rozwiązanie. Autorki w pracach [51], [61] przedstawiły algorytm rozwiązujący zadanie przy nieograniczonych pojemnościach. Już w przypadku zadania o nieograniczonych pojemnościach, dla którego model ma mniej o 2 kategorie ograniczeń (3.4.1.5) i (3.4.1.6), unikanie pełnego przeglądu rozwiązań oraz skracanie czasu obliczeń, prowadzi do wyznaczania suboptymalnego rozwiązania. Takie podejście jest w zupełności wystarczające, gdy uzyskane wyniki mają służyć jedynie jako wspomaganie decyzji i ukazywać wąskie gardła modelowanych systemów. Konstrukcja algorytmów komplikuje się w znaczący sposób, gdy w modelu zostają nałożone ograniczenia na pojemności. W następnym podpunkcie zostaną przedstawione dwa, wybrane z literatury, rzeczywiste przykłady dla których sformułowano modele należące do klasy zadań lokalizacji dwupoziomowej z ograniczeniami pojemnościowymi.

3.4.2. Przykłady zastosowania zadania lokalizacji dwupoziomowej

Ciekawym przykładem zastosowania zadania lokalizacji dwupoziomowej jest problem opisany w pracy Caruso, Colomi, Paruccini [11]. Jest to problem wyznaczenia lokalizacji przetwórci odpadków oraz lokalizacji "ostatecznego odbiorcy" czyli wysypisk śmieci. Problem ten jest wielokryterialny. Model charakteryzuje się wieloobiekтовую funkcją celu minimalizującą trzy składowe: 1.ponoszone koszty inwestycyjne, eksploatacyjne i transportowe, 2. wielkości składowanych odpadków na wysypiskach, 3.koszty ponoszone z ekologicznego punktu widzenia (zanieczyszczenie powietrza i wody, negatywny wpływ na środowisko).

Model zawiera kilka charakterystycznych ograniczeń. W każdym wyznaczonym obszarze (w algorytmie reprezentowanym jako wierzchołek w sieci) może być co najwyżej jeden zakład przetwórczy. Zakłada się całkowite zaspokojenie zapotrzebowań (wszystkie odpadki muszą być przyjęte przez zakład przetwórczy lub wysypisko). Ustalona jest maksymalna, stała pojemność zakładów, zależna od technologii, określona jest też maksymalna, dopuszczalna odległość na jaką mogą być przewożone odpadki.

$$\min F, \text{ gdzie } F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$F_1 = \left[\sum_h \sum_j (\delta^h z_j^h + \gamma^h r_j^h) + \sum_k (\bar{\delta} v_k + \bar{\gamma} t_k) \right] + \quad (3.4.2.1a)$$

$$+ \left[\sum_h \sum_i \sum_j (c_{ij} x_{ij}^h) + \sum_i \sum_k (c_{ik} s_{ik}) + \sum_h \sum_j \sum_k c_{jk} y_{jk}^h \right]$$

$$F_2 = \sum_k t_k \quad (3.4.2.1b)$$

$$F_3 = \sum_h \sum_j (\eta_j^h z_{ij}^h + \mu_j^h r_j^h) + \sum_k (\bar{\eta}_k v_k + \bar{\mu}_k t_k) \quad (3.4.2.1c)$$

$$\sum_h \sum_i x_{ij}^h + \sum_k s_{ik} = d_i \quad i=1, \dots, n \quad (3.4.2.2)$$

$$r_j^h \leq Q_j^h z_j^h \quad j=1, \dots, n \quad h=1, 2, 3 \quad (3.4.2.3)$$

$$v_k \leq Q_k v_k \quad k = 1, \dots, n \quad (3.4.2.4)$$

$$\sum_j y_{jk}^h \leq Q_k y_{jk}^h \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4.2.5)$$

$$\sum_j z_j^h \leq Q_j z_j^h \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4.2.6)$$

zmienne decyzyjne:

$$x_{ij}^h \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n, \quad h = 1, 2, 3$$

$$y_{jk}^h \geq 0 \quad j, k = 1, \dots, n, \quad h = 1, 2, 3$$

$$s_{ik} \geq 0 \quad i, k = 1, \dots, n$$

$$z_j^h \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n, \quad h = 1, 2, 3$$

$$v_k \in \{0, 1\} \quad k = 1, \dots, n$$

$$r_j^h \equiv \sum_i x_{ij}^h \quad j = 1, \dots, n, \quad h = 1, 2, 3$$

$$t_k \equiv \sum_i s_{ik} + \sum_h \sum_j y_{jk}^h \quad k = 1, \dots, n$$

gdzie:

$i = 1, \dots, n$ - numer obsługiwanego użytkownika,

$j = 1, \dots, n$ - numer zakładu przetwórczego,

$k = 1, \dots, n$ - lokalizacja wysypisk śmieci,

$h = 1, 2, 3$; - technologie przetwarzania.

x_{ij}^h - wielkość odpadów zabieranych z i do zakładu przetwórczego j z technologią h ,

y_{jk}^h - wielkość odpadów zabieranych z zakładu przetwórczego j z technologią h na wysypisko k ,

s_{ik} - wielkość odpadów przewożono bezpośrednio z i do k ,

z_j^h - zmienna 0-1 determinująca obecność zakładu przetwórczego z technologią h w wierzchołku j ,

v_k - zmienna 0-1 determinująca lokalizację wysypiska śmieci w k ,

r_j^h - wielkość odpadów przetwarzanych w j według h ,

t_k - wielkość odpadów składowanych na wysypisku k .

d_i - wielkość zapotrzebowania użytkownika i (w tonach),

c_{ab} - jednostkowy koszt transportu z a do b ,

ρ^h - część (w %) odpadów przetwarzana według technologii h , która wymaga umieszczenia na wysypisku,

Q_j^h - maksymalna pojemność zakładu przetwórczego j według technologii h ,

Q_k - maksymalna pojemność dla wysypiska k ,

γ^h, δ^h - jednostkowe "ekonomiczne" koszty stałe i zmienne dla zakładów przetwórczych według technologii h ,

$\bar{\gamma}, \bar{\delta}$ - jednostkowe "ekonomiczne" koszty stałe i zmienne w ekonomicznej funkcji celu dla wysypisk

- η_j^h, μ_j^h - jednostkowe "ekologiczne" koszty stałe i zmienne dla zakładów przetwórczych według technologii h ,
- $\bar{\eta}_k, \bar{\mu}_k$ - jednostkowe "ekologiczne" koszty stałe i zmienne w ekonomicznej funkcji celu dla wysypisk.

Zaproponowany algorytm rozwiązuje problem na zasadzie hierarchicznej: najpierw rozważany jest transport z poszczególnych obszarów i wyznaczane są miejsca lokalizacji zakładów a następnie transport z zakładów na wysypiska. Takie podejście jest spowodowane tym, że "długość życia" wysypisk jest zazwyczaj krótsza niż zakładów przetwórczych; zatem po jakimś czasie trzeba będzie zapewne wyznaczyć nową lokalizację dla wysypisk, podczas gdy lokalizacje zakładów przetwórczych pozostaną niezmiennione. Dzieli to algorytm na dwie części: fazę transportu bezpośredniego i fazę transportu pośredniego. W obu fazach używane są kolejno następujące procedury:

Dominant: wyznaczającą najlepsze pokrycie sieci (bez uwzględnienia ograniczeń pojemnościowych),

Connect: w heurystyczny sposób przyporządkowującą użytkowników najbliższemu zakładowi biorąc pod uwagę ograniczenie pojemnościowe największego zakładu i określającą przyporządkowanie wysypisk,

Technical Choice: procedura wybiera "typologię" lokalizacji zakładów wyznaczonych w poprzednich procedurach (procedura ta nie jest używana w fazie transportu pośredniego),

Add, Substitute, Drop: wszystkie trzy procedury są opisane razem ze względu na ich podobieństwo. Są używane do zmiany wcześniej otrzymanego rozwiązania; rozpoczynając od bieżącego rozwiązania szuka nowych rozwiązań poprzez: Add zmienia zbiór poprzez dodanie nowego zakładu; Substitute modyfikuje zbiór rozwiązań usuwając jeden zakład i dodając nowy; Drop zmienia zbiór rozwiązań usuwając z niego jeden z wybranych zakładów.

Ze względu na postać funkcji celu istnieje możliwość, przez wprowadzenie wag przy każdej z trzech składowych funkcji, poszukiwania takiego rozwiązania, które uwzględni wszystkie lub tylko wybrane kryteria.

Innym przykładem lokalizacji dwupoziomowej w skali makroekonomicznej (dla kraju) jest model zaprezentowany przez Nambiara, Geldersa i Van Wassenhovea [68]. W pracy autorzy rozpatrywali rozwiązanie lokalizacyjno-przydziałowego problemu w przemyśle kauczukowym. Zadanie to było rozwiązywane na zlecenie rządu Malezji. Dostawcami mleczka kauczukowego (latexu) są właściciele dużych plantacji drzew kauczukowych. Lokalizowane są punkty skupu (CS) oraz przetwórnice (CRPF), produkujące wysokiej jakości kauczuk naturalny. Rozpatrywany jest też problem marszrutu pojazdów zwożących latex z plantacji do punktów skupu. Globalny model minimalizuje koszty składowania i koszty stałe systemu, biorąc pod uwagę ograniczenia na pojemność

oraz czas, przy zadanym zbiorze pojazdów. Model matematyczny tego problemu przedstawia się następująco:

$$\min \left[\sum_{i=K+1}^{K+n} \sum_{j=1}^{K+n} \sum_{h=1}^H c_{ijh} x_{ijh} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=K+1}^{K+n} \sum_{h=1}^H (c_{ijh} + P_h) x_{ijh} + \sum_{i=1}^K D_i (S_i) V_i + \sum_{h=1}^H a O_h \right]$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^{K+n} \sum_{h=1}^H x_{ijh} = 1, \quad j = K+1, \dots, K+n, \quad (3.4.2.7)$$

$$\sum_{j=1}^{K+n} x_{ijh} - \sum_{j=1}^{K+n} x_{ijh} = 0, \quad h = 1, \dots, H, i = 1, \dots, K+n, \quad (3.4.2.8)$$

$$\sum_{j=K+1}^{K+n} \sum_{h=1}^H x_{ijh} \leq M_i V_i, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.4.2.9)$$

$$\sum_{j=1}^{K+n} y_{ij} - \sum_{j=K+1}^{K+n} y_{ij} = d_i, \quad i = K+1, \dots, K+n, \quad (3.4.2.10)$$

$$y_{ij} \leq \sum_{h=2}^H Q_h x_{ijh}, \quad i = K+1, \dots, K+n, j = 1, \dots, K+n, \quad (3.4.2.11)$$

$$\sum_{i=K+1}^{K+n} y_{ij} \leq S_j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.4.2.12)$$

$$S_j \leq R_j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.4.2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{K+n} \sum_{j=1}^{K+n} t_{ijh} x_{ijh} \leq B + O_h, \quad h = 1, \dots, H, \quad (3.4.2.14)$$

$$O_h \leq O_{\max}, \quad h = 1, \dots, H. \quad (3.4.2.15)$$

$$\sum_{i=K+1}^{K+n} \sum_{j=1}^{K+n} t_{ijh} x_{ijh} \leq W, \quad h = 1, \dots, H, \quad (3.4.2.16)$$

$$x_{ijh} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, K+n, h = 1, \dots, H, \quad (3.4.2.17)$$

$$V_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.4.2.18)$$

$$O_h \geq 0, \quad h = 1, \dots, H, \quad (3.4.2.19)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, K+n, \quad (3.4.2.20)$$

$$S_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.4.2.21)$$

oznaczenia:

- $i, j = 1, \dots, K$ - potencjalne lokalizacje CRPF,
- $i, j = K + 1, \dots, K + n$ - lokalizacje CS,
- $h = 1, \dots, H$ - zbiór pojazdów,
- C_{ijh} - koszty przejazdu bezpośrednio z i do j po najkrótszej drodze przy użyciu pojazdu h ,
- P_h - stałe koszty pojazdu h ,
- $D_j S_i$ - stałe koszty i -tego CRPF jako funkcja jego rozmiaru S_i ,
- a - nadgodziny, koszt/godz.,
- M_i - maksymalna liczba pojazdów w i -tym CRPF,
- d_i - wielkość dostaw lateksu do i -tego punktu CS,
- Q_h - pojemność pojazdu,
- R_i - maksymalna pojemność i -tego CRPF,
- t_{ijh} - czas przejazdu h -tego pojazdu z i do j ,
- B - czas pracy regularnej zmiany (8 godz.),
- O_{\max} - maksimum z liczby nadgodzin za dzień lub za pojazd,
- W - dopuszczalny przedział czasu (wynikający z łatwego psucia się lateksu),
- $x_{ijh} \in \{0, 1\}$ 1 - jeżeli pojazd jedzie bezpośrednio z i do j , 0 w przeciwnym przypadku,
- $V_i \in \{0, 1\}$ 1 - jeżeli CRPF jest otwarte, 0 w przeciwnym przypadku,
- Y_{ij} - nieujemna, zmienna przepływu
- O_h - nieujemna, całkowita zmienna oznaczająca nadgodziny pojazdu h ,
- S_i - pojemność i -tego CRPF.

Pierwszy człon funkcji celu określa koszty transportowe pomiędzy punktami CS, oraz koszty transportowe z punktów CS do CRPF. Drugi człon zawiera koszty transportowe od producentów do punktów CS oraz stałe koszty transportu. Trzeci składnik określa stałe koszty operacyjne CRPF. Zauważmy, że ponieważ koszty operacyjne są funkcją rozmiaru CRPF, model staje się nieliniowy. Ostatni człon funkcji celu określa koszty nadgodzin dla załóg ciężarówek. Ograniczenia (3.4.2.7), (3.4.2.8) i (3.4.2.10) określają problem komiwojagera, i tak pierwsze z nich zapewniają, że każdy punkt CS jest odwiedzany raz, następnie, że pojazd który wjedzie do punktu, wyjedzie z niego, ostatnie, określa sieć przepływu warunkującą zapewnienie dostaw. Ograniczenia (3.4.2.9), (3.4.2.10), (3.4.2.12) i (3.4.2.13) określają pojemności. Warunki (3.4.2.13)-(3.4.2.16) są ograniczeniami czasu, (3.4.2.17)-(3.4.2.21) warunkują nieujemność zmiennych.

Sformułowany powyżej problem jest kombinacją dwóch dobrze znanych problemów programowania matematycznego. Powiązanie punktów odbioru lateksu z potencjalnym umiejscowieniem przetwórci jest problemem lokalizacji, natomiast zawiezenie lateksu z

plantacji do wszystkich punktów skupu jest problemem komiwojażera. Oba te problemy są problemami skomplikowanymi. Problem lokalizacji jest skomplikowany poprzez nałożenie ograniczeń pojemnościowych, a w problemie komiwojażera rozpatruje się dużą ilość punktów skupu przy ograniczeniach dotyczących pojemności i czasów przejazdu pojazdów. Tak postawiony problem dla dużych przykładów jest trudny do rozwiązania. Natomiast wersja problemu bez ograniczeń na pojemności może być rozwiązana nawet dla zagadnień o dużych rozmiarach. Autorki zastosowały algorytm heurystyczny dzieląc problem na dwie części – lokalizacyjną i komiwojażera. Współzależność pomiędzy tymi częściami została w algorytmie określona poprzez ograniczenia na czas i pojemność.

Dla uproszczenia autorki pominęły stałe koszty i koszty nadgodzin. Założyły, że najmniejszą niezbędną liczbą przetwórní w regionie jest liczba wyznaczona przez wielkość całkowitych dostaw w regionie podzielonych na maksymalną pojemność przetwórní (pojemność przetwórní jest wyznaczona przez czynniki techniczne i wydajność pracy). Z przedstawionych algorytmów, pierwszy jest przydatny dla przypadków, gdzie korzystne jest lokalizowanie jednego punktu skupu w regionie. W innych regionach może być korzystne lokowanie kilku mniejszych punktów skupu z powody np. ograniczeń na czas przejazdu. Tak się dzieje w regionach z bardzo rozproszonymi punktami odbioru gdzie duży punkt skupu byłby zbyt daleko na to aby lateks był odebrany z plantacji w określonych przedziałach czasowych, lub gdzie spełnienie tych ograniczeń prowadziłoby do całkowitego niewykorzystania pojazdów. Powstaje także pytanie – czy lokalizować jedną (mniejsze koszty inwestycyjne i stałe) czy kilka przetwórní.

3.4.3. Algorytm

Jak to można było zaobserwować w opisanych wyżej przykładach, modele lokalizacji dwupoziomowej charakteryzują się dużym stopniem złożoności - wieloindeksowość zmiennych decyzyjnych, różnorodność ograniczeń, wieloobiektowość funkcji celu. W swoich rozważaniach w ramach projektu badawczego nr P403 03104 KBN, autorki skoncentrowały się na następującym przykładzie lokalizacji dwupoziomowej z ograniczonymi pojemnościami.

Towar jest dostarczany z zakładów początkowych do zakładów końcowych poprzez zakłady pośrednie. Lokalizowane są jednocześnie zakłady początkowe i pośrednie dla zadanych zbiorów punktów lokalizacji, tak aby spełnione były zapotrzebowania zakładów końcowych przy minimalnych kosztach inwestycyjno-eksploatacyjno-transportowych. Zakłady początkowe i pośrednie mają ograniczone pojemności.

Bez straty ogólności mogą być w modelu lokalizowane zakłady pośrednie i końcowe; wówczas to one mają ograniczone pojemności.

Jako przykłady rzeczywiste tego typu lokalizacji można podać:

- lokalizację punktów skupu i zakładów przetwórczych w przemyśle mleczarskim
- lokalizację przetwórní i hurtowní w przemyśle spożywym
- lokalizację zakładów obróbki wstępnej (destylacja) i zakładów chemicznych

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

Indeksy dla zmiennych decyzyjnych:

$i = 1, \dots, I$ lokalizacja odbiorców (obsługiwanych wierzchołków)

$j = 1, \dots, J$ lokalizacja przetwórní

$k = 1, \dots, K$ lokalizacja dostawców (usługodawców)

Zmienne decyzyjne problemu:

- x_{ij} - ilość towaru przewożonego z i do j
- y_{ij} - ilość towaru przewożonego z j do k
- v_k - zmienna (0-1) określająca lokalizację "usługodawcy" w k
- z_j - zmienna (0-1) określająca lokalizację przetwórní w j

Dane wejściowe:

- d_i - zapotrzebowanie na usługę (odbiór towaru) w i
- c_{ab} - jednostkowy koszt transportu towaru z a do b
- ρ - (%) procentowa ilość towaru pozostała po przetworzeniu
- Q - moc przerobowa dla przetwórní
- Q_k - ograniczenie pojemnościowe dla zakładów końcowych
- γ, δ - stałe oraz zmienne koszty jednostkowe dla zakładów pośrednich
- γ_k, δ_k - stałe oraz zmienne koszty jednostkowe dla zakładów końcowych

Funkcja celu F:

$$F = \left\{ \sum_j \left(\delta z_j + \gamma \sum_i x_{ij} \right) + \sum_k \left(\delta_k v_k + \gamma_k \sum_j y_{jk} \right) \right\} + \left\{ \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j \sum_k c_{jk} y_{jk} \right\} \quad (3.4.3.1)$$

Ograniczenia:

$$\sum_j x_{ij} = d_i \quad i=1, \dots, n \quad (3.4.3.2)$$

$$\sum_i x_{ij} \leq Q_j z_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4.3.3)$$

$$\sum_j y_{jk} \leq Q_k v_k \quad k=1, \dots, n \quad (3.4.3.4)$$

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k y_{jk} \quad j=1, \dots, n \quad (3.4.3.5)$$

Warunki na zmienne decyzyjne:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i, j=1, \dots, n \quad (3.4.3.6.a)$$

$$y_{jk} \geq 0 \quad j, k=1, \dots, n \quad (3.4.3.6.b)$$

$$z_j \in \{0,1\} \quad j=1, \dots, n \quad (3.4.3.6.d)$$

$$v_k \in \{0,1\} \quad k=1, \dots, n \quad (3.4.3.6.e)$$

Funkcja celu $F(Ia)$ opisuje ekonomiczne koszty ponoszone odpowiednio podczas inwestowania i eksploatacji dla przetwórci j oraz zakładów pośrednich k , a także koszty transportowe dla 2 relacji: (i,j) , (j,k) . Koszty stałe określone są przez dane δ i δ_k , koszty zmienne określane są przez γ i γ_k i rosną liniowo wraz z ilością towaru.

Ograniczenie (3.4.3.2) gwarantuje całkowitą realizację zapotrzebowań. Nierówności (3.4.3.3) i (3.4.3.4) dotyczą odpowiednio ograniczeń pojemnościowych dla zakładów pośrednich j oraz zakładów końcowych k . Ograniczenia (3.4.3.5) gwarantują przetwórciom całkowity wywóz przetworzonego towaru.

Zmienne decyzyjne x i y (3.4.3.6.a), (3.4.3.6.b) są nieujemne. Zmienne z i v są 0-1. Tak opisany model dotyczy ustalonego wcześniej okresu czasu dla badanego problemu.

Istotnym ograniczeniem dla algorytmu rozwiązującego jest sprawdzanie bilansowania się rozważanego systemu, tzn.:

- czy zakłady pośrednie są w stanie przyjąć całą przesyłkę od zakładów początkowych.
- czy zakłady końcowe są w stanie przyjąć całą przesyłkę od zakładów pośrednich.

Ogólne bilansowanie się przepływów na tym etapie algorytmu rozwiązującego będzie dalej nazywane bilansowaniem się typu I. Bilansowanie szczegółowe wynikające ze struktury konkretnej sieci będzie nazywane bilansowaniem się typu II.

W rozpatrywanym zadaniu zakłada się, że zakłady pośrednie są jednorodnie. Zmienne mogą być natomiast ich moce przerobowe, z tym, że są one zawsze wielokrotnością pewnej minimalnej wartości Q . Jeżeli dokonywana jest inwestycja zakładu o mocy np. $h = Q$ to traktuje się ją jak h inwestycji o mocy Q każda.

W problemie bilansowania się typu I rozróżnia się 4 sytuacje. Najlepsze bieżące rozwiązanie jest określone jako:

BILANSOWANIE I-go TYPU

I.

$\sum_i d_i \leq |J|Q$ - zakłady pośrednie mogą przyjąć całą dostawę od zakładów początkowych

$\rho|J|Q \leq \sum_k Q_k$ - zakłady końcowe mogą przyjąć całą dostawę od zakładów pośrednich

$J' \subset J$ - najmniejszy podzbiór realizujący zapotrzebowania zakładów początkowych

II.

$\sum_i d_i > |J|Q$ - zakłady pośrednie nie mogą przyjąć całej dostawy

$\sum_i d_i - |J|Q$ - brakująca różnica

$\rho \sum_i d_i \leq \sum_k Q_k$ - zakłady końcowe przyjmują wszystkie dostawy

$\left[\left(\sum_i d_i - |J|Q \right) : Q \right] + 1$ - brakująca liczba zakładów pośrednich

Na tym etapie musi zapaść decyzja czy będą budowane brakujące zakłady pośrednie i propozycje ich lokalizacji.

III.

$\sum_i d_i \leq |J|Q$ - zakłady pośrednie mogą przyjąć całość dostaw

$\rho|J|Q > \sum_k Q_k$ - zakłady końcowe nie mogą przyjąć całej dostawy

$J' \subset J$ - brakująca różnica

$\left[\left(\sum_k Q_k - \rho|J|Q \right) : Q^* \right] + 1$ - brakująca liczba zakładów końcowych, gdzie Q^*

oznacza wybrany typ dodatkowych zakładów końcowych.

Na tym etapie powinna zapaść decyzja o budowie i lokalizacji zakładów końcowych.

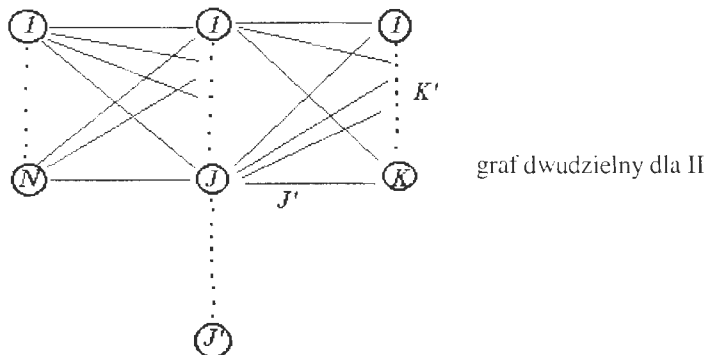
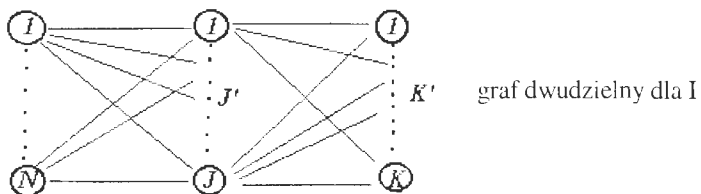
IV.

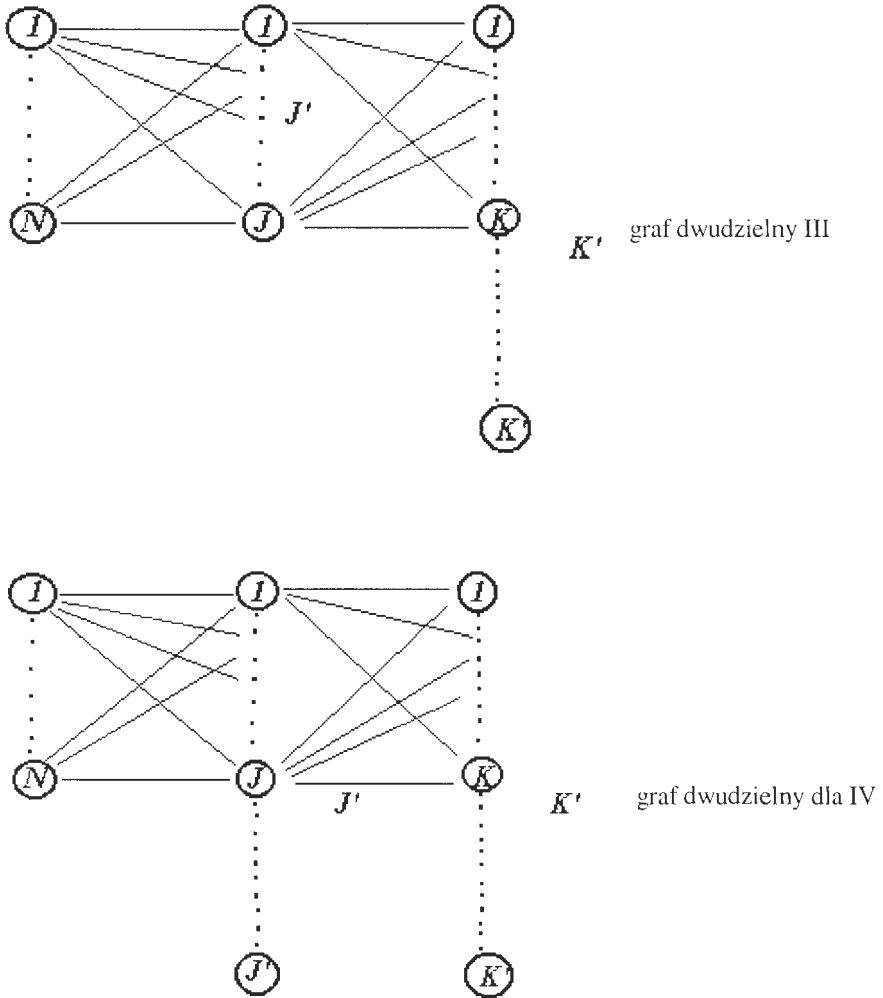
$$\sum_i d_i > |J|Q$$

- zarówno zakłady pośrednie jak i końcowe nie mogą przyjąć całych dostaw

$$\rho \sum_i d_i > \sum_k Q_k$$

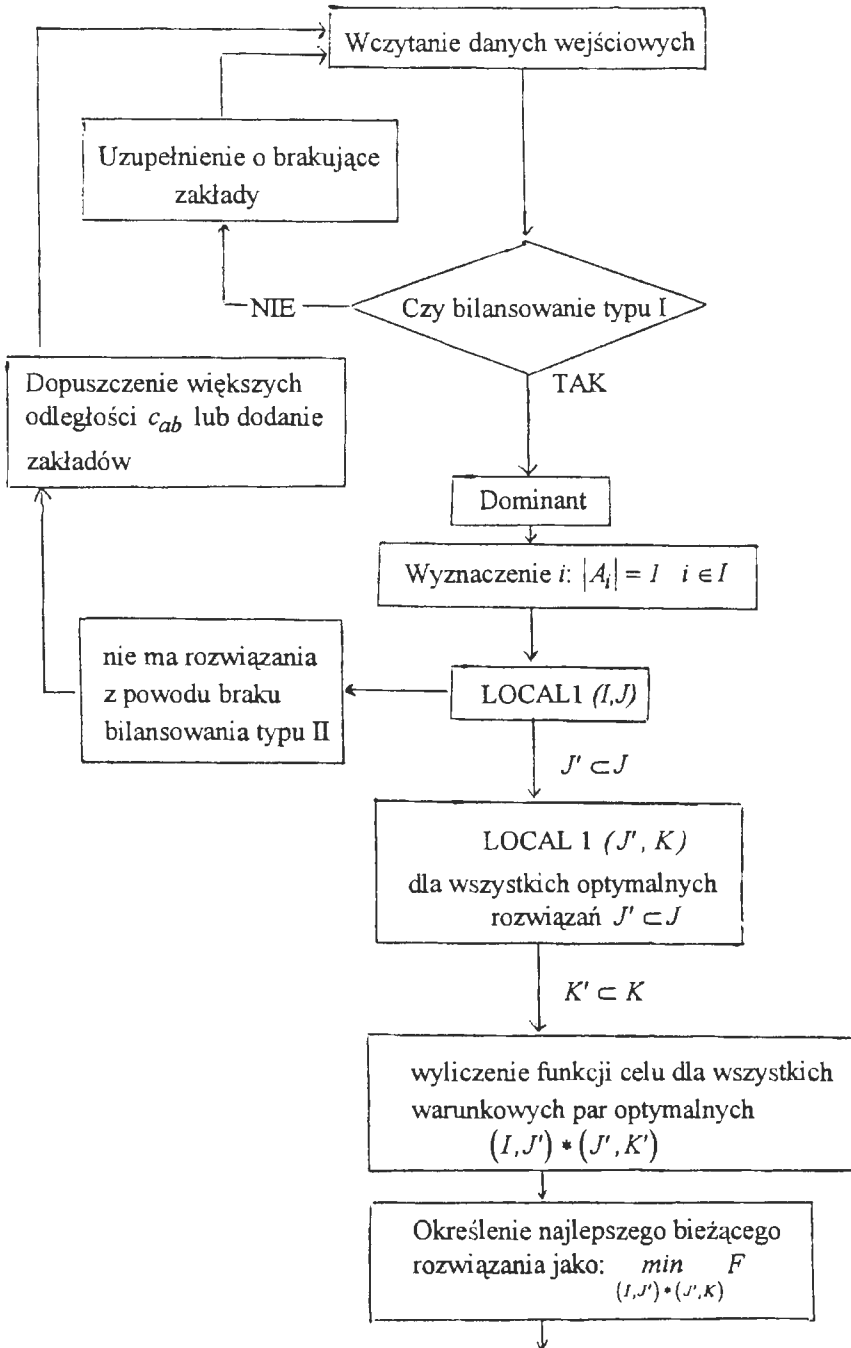
Na tym etapie powinny zapasć decyzje o budowie i lokalizacji zakładów pośrednich i końcowych, których brakujące liczby wyznacza się jak w II i III odpowiednio.

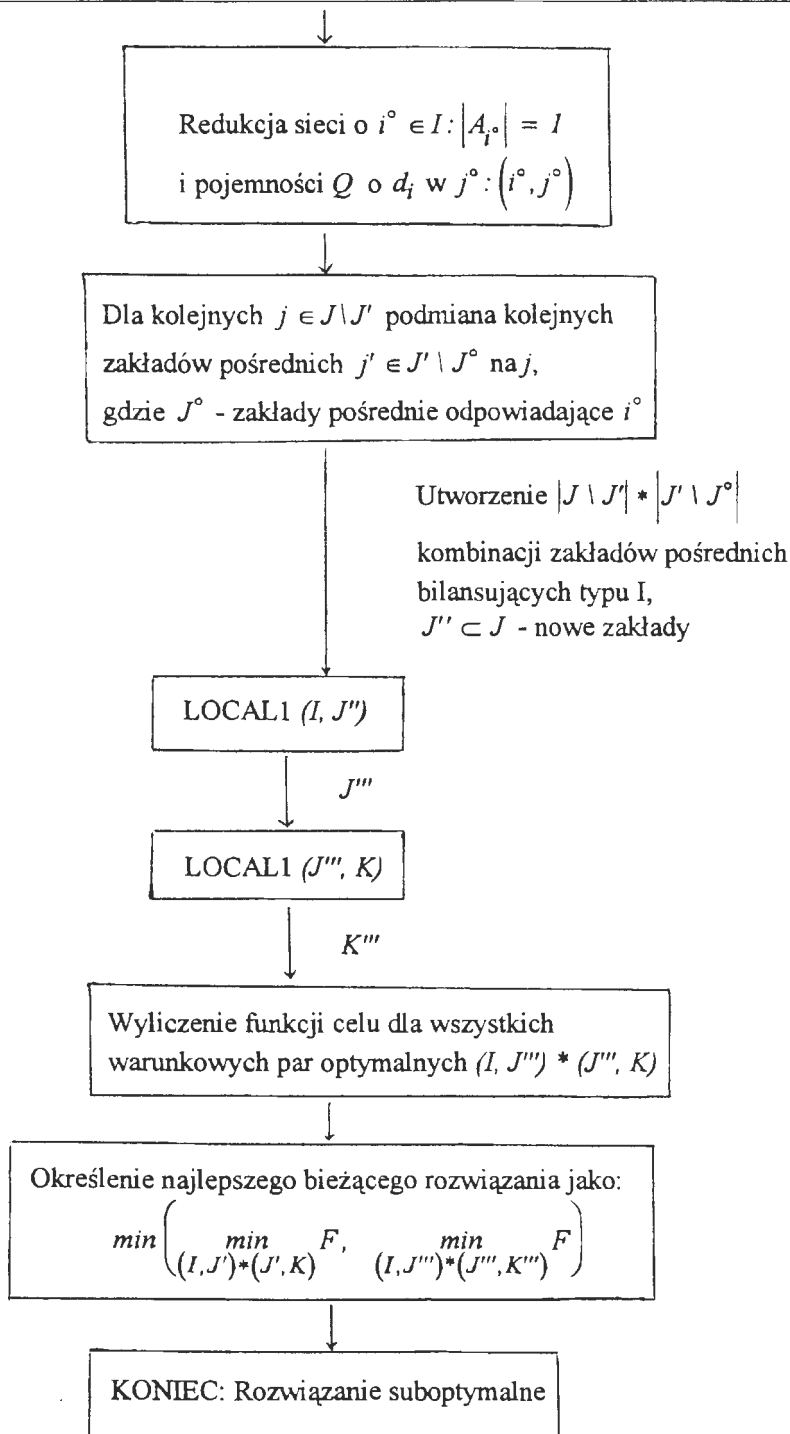




Rys. 3.3.3.1. Grafy dwudzielne dla czterech typów bilansowania

SCHEMAT BŁOKOWY ALGORYTMU BILANS I





Opisany schematem blokowym algorytm jest heurystyczny i daje rozwiązanie suboptymalne. Wprowadzenie odpowiedniego interfejsu w oprogramowaniu komputerowym pozwoli na poinformowanie o pojawieniu się niebilansowania typu I lub II w rozważanym systemie. Brak bilansowania typu II występuje wówczas, gdy zakłady pośrednie nie mogą przyjąć dostaw od niektórych zakładów początkowych pomimo bilansowania się typu I. Taką sytuację determinuje szczególna postać grafu dwudzielnego, gdy nie ma zapewnionych wystarczających połączeń tj. gdy nie występują wszystkie gałęzie. Wówczas decydent musi podjąć decyzje albo o zwiększeniu kryterium odległościowym z c_{ab} do c_{AB} : $c_{AB} \gg c_{ab}$ lub o lokalizacji nowych zakładów. Odpowiedni interfejs powinien umożliwić interakcyjne modyfikowanie danych ilościowych. Podmiana zakładów pośrednich nie zmienia kosztów inwestycyjnych dla tych zakładów, gdyż ich liczba jest stała. Natomiast poszukiwane są takie rozwiązania, które zmniejszają sumę kosztów transportowych (i,j,k) i kosztów inwestycyjnych dla zakładów końcowych. Poprawianie rozwiązania zostało nazwane przez autorki "jednokrokovym", gdyż ogranicza się do jednorazowej ingerencji w zbiór zakładów pośrednich warunkowo optymalnego rozwiązania. Zaproponowana w rozwiązaniu procedura LOCAL1 jest opracowaną wcześniej przez autorki procedurą rozwiązującą optymalne zadanie jednopoziomowej lokalizacji (patrz Rozdział 3.1 oraz [59], [76]).

Jak to zostało wykazane przez autorki w pracy [50] dwukrotne stosowanie optymalnej procedury LOCAL1 dla dwudzielnego grafu nie gwarantuje optymalnego rozwiązania. Niemniej zaproponowany przez autorki algorytm daje lepsze rozwiązania niż heurystyczny algorytm Caruso, Colorni, Paruccini [11].

Algorytm BILANS I rozpoczyna obliczenia od lepszego rozwiązania bieżącego a następnie istotnie ogranicza liczbę podzbiorów powstałych w wyniku podmiany zakładów pośrednich. Algorytm BILANS I został przez autorki oprogramowany. Interesująca ze względu na interaktywną możliwość informowania decydentów o wąskich gardłach rozważanego problemu jest zaproponowana przez Caruso, Colorni, Paruccini procedura Dominant. W wyniku jej działania można ukarać zakłady początkowe i końcowe o małej liczbie gałęzi wychodzących. Procedura ta została przez autorki oprogramowana i włączona do pakietu

W opisanym wyżej modelu nie brany jest pod uwagę horyzont planowania, który dla każdego rzeczywistego przykładu odgrywa inną rolę. Zakłady mleczarskie czy chemiczne rozpatrują problem dla relatywnie krótkiego czasu składowania, po którym cały cykl produkcyjny powtarza się. Otrzymujemy w tym przypadku zadanie semidynamiczne, dla którego rozwiązywane są kolejne zadania statyczne. Wysypiska śmieci istnieją tak długo jak zdolne są przyjmować śmieci. Dla stosunkowo długiego okresu czasu konstruowany jest wówczas model statyczny ze zagregowanymi danymi.

3.5. Metody rozwiązywania zadań lokalizacji liniowej dla zagadnień sieciowych

W poprzednich rozdziałach opracowania autorki rozpatrywały zagadnienie lokalizacji wierzchołków grafu (Rozdział 3.2.4). W niniejszym rozdziale badane jest zadanie lokalizacji gałęzi w sieci. Takie zagadnienia będziemy dalej nazywać zadaniami lokalizacji liniowej. Zadania te mają wiele praktycznych zastosowań. Tak jak poprzednio każdy problem rzeczywisty wymaga odrębnego podejścia, zarówno w sformułowaniu modelu, jak i tworzeniu algorytmów rozwiązujących.

W pracy zostanie przedstawionych następujących 5 przykładów zastosowań:

- I. Problem budowy autostrad i dróg ekspresowych przy minimalizacji kosztów całego przedsięwzięcia
- II. Problem budowy autostrad i dróg ekspresowych, dla których realizowane jest największe natężenie ruchu przy zadanych maksymalnych przepustowościach poszczególnych jej odcinków.
- III. Problem budowy autostrad i dróg ekspresowych jako problem lokalizacji z horyzontem planowania.
- IV. Problem lokalizacji najtańszych dróg przesyłania informacji dla zadanej sieci komputerowych baz danych.
- V. Problem lokalizacji dróg o maksymalnej przepustowości przy przesyłaniu informacji pomiędzy dowolnymi komputerowymi bazami danych.

3.5.1. Problem budowy autostrad i dróg ekspresowych.

Konieczność stworzenia tranzytowego systemu autostrad i dróg ekspresowych na terytorium Polski, z uwzględnieniem sieci europejskich dróg szybkiego ruchu, spowodowała przyspieszenie prac nad realizacją projektu ustawy o budowie i eksploatacji autostrad [77].

Punktem wyjścia programu budowy autostrad jest kierunkowy układ autostrad i dróg ekspresowych, ustalony w rozporządzeniu Rady Ministrów z 28 września 1993r. (Dz.U. nr 92, poz. 424). W Ministerstwie Transportu i Gospodarki Morskiej został przygotowany wstępny projekt ustawy o budowie i eksploatacji autostrad, regulujący kompleksowo wszystkie kwestie: pozyskiwanie gruntów pod autostrady, zasady finansowania, kompetencje organów współdziałających w budowie, prawa i obowiązki koncesjonariuszy i sposób zawierania umów o budowę. Sytuacja ekonomiczna kraju nie umożliwia szybkiego wybudowania autostrad ze środków budżetowych. W tej sytuacji niezbędne

stało się poszukiwanie innych źródeł finansowania, przy jednoczesnym dofinansowaniu ze środków budżetowych, w granicach możliwości Skarbu Państwa. Projekt ustawy zakłada więc finansowanie budowy autostrad ze środków inwestorów prywatnych, w tym uzyskanych przez nich kredytów bankowych. Przyjęto zasadę, że za przejazd autostradą będą pobierane opłaty. Oznacza to - w kategoriach ekonomiczno-finansowych - że poniesione koszty będą w przyszłości pokrywane z wpływów opłat za przejazd oraz z działalności handlowej, prowadzonej w obszarze obsługi podróżnych i pojazdów przez tzw. operatorów autostrad. Zasady ustalania opłat za przejazd autostradą określi minister transportu i gospodarki morskiej.

Do kierunków autostradowych zaliczono następujące połączenia:

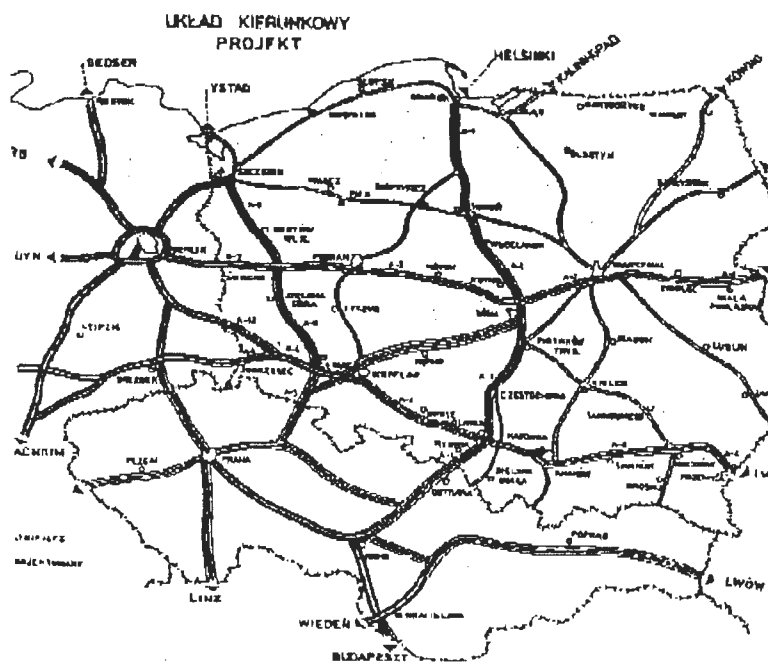
A-1 (o długości 558 km): Gdańsk - Toruń - Łódź - Częstochowa - Katowice - Gorzyce

A-2 (o długości 662 km): Świecko - Poznań - Warszawa - Terespol

A-3 (o długości 365 km): Szczecin - Gorzów - Zielona Góra - Legnica - Lubawka

A-4/A-12 (o długości 738 km): Zgorzelec - Wrocław - Katowice - Kraków - Rzeszów - Przemyśl - Medyka

A-8 (o długości 204 km): Wrocław - Łódź.



Rys. 3.5.1.

Na Rys. 3.5.1. przedstawiona została mapa Polski z wyszczególnionymi kierunkami autostradowymi.

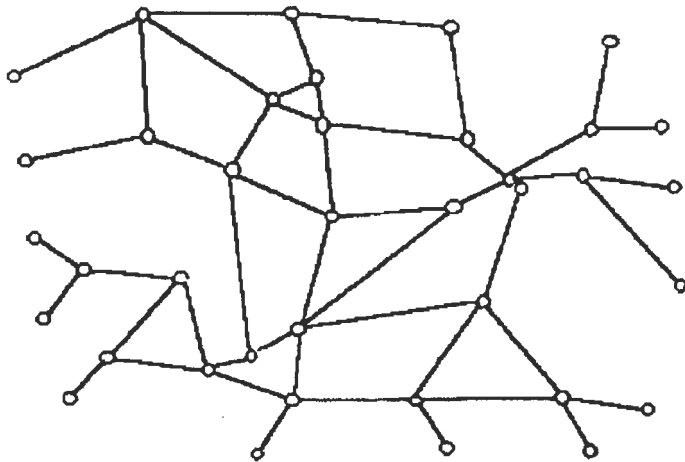
Opisane powyżej zagadnienie należy do klasy zadań lokalizacji liniowej. Lokalizowane są tu odcinki dróg, które będą bądź budowane, bądź też modernizowane. W badanym zagadnieniu można przyjąć różne kryteria lokalizacji dróg.

I. Jednym z kryteriów może być minimalizacja kosztów całego przedsięwzięcia jakim jest stworzenie na terenie Polski dróg szybkiego ruchu w relacjach: wschód-zachód i północ-południe. Zauważmy, że budowa nowych dróg wiąże się nie tylko z kosztami związanymi z gałęziami sieci, ale także z niezbędnymi kosztami przypisanymi do wierzchołków sieci. Wynika to z konieczności ponoszenia dodatkowych kosztów związanych z infrastrukturą, tzn. stacji benzynowych, stacji obsługi samochodów, moteli i punktów parkingowych itp.

W teorii grafów i sieci zadanie to należy do klasy zadań wyznaczania dróg ekstremalnych o wielu źródłach i odpływach. W dalszym ciągu opracowania będziemy zakładać, że rozpatrywana sieć jest siecią skierowaną i nie zawiera dróg cyklicznych, przepustowość każdego łuku jest nieograniczona.

Podczas formułowania modelu przyjęto założenie o tym, że drogi tranzytowe wschód-zachód oraz północ-południe mają realizować również zapotrzebowania na szybką, bezkolizyjną, międzymiastową komunikację w Polsce dla wyróżnionych miast.

Przy powyższym założeniu sieć dróg rzeczywistych zobrazowaną na Rys.3.5.1. można przedstawić graficznie następująco:



Rys. 3.5.2.

W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że wierzchołki, z których jedynie wychodzą łuki są źródłami i oznaczono je symbolicznie: x^p .

Natomiast wierzchołki, z których nie wychodzi żaden łuk są odpływami i oznaczono je: x^k .

W rzeczywistości należy badać dwa problemy:

- * wewnętrzny dla Polski problem budowy tras szybkiego ruchu,
- * zewnętrzny dla Europy problem budowy tras tranzytowych przez Polskę.

Problem wewnętrzny dla Polski sprowadza się do rozwiązania N zadań wyznaczenia dróg ekstremalnych z jednym źródłem i jednym odpływem. Źródła oraz odpływy są w tym przypadku przejściami granicznymi. Problem zewnętrzny dla Europy sprowadza się do rozwiązania jednego zadania z wieloma źródłami i odpływami, które leżą poza granicami Polski.

W przypadku, gdy rozważane jest tylko jedno źródło oraz tylko jeden odpływ problem dróg ekstremalnych sformułowany jest następująco [50].

Na zbiorze M dróg prostych $m \in M$ w sieci S zdefiniowana jest funkcja F , $F: M \rightarrow R$, której wartości są wyznaczone przez wartości funkcji $f(x)$ i $h(u)$ odpowiednio wierzchołków x i gałęzi u drogi m . Dla dalszych rozważań oznaczmy przez $M(x^p, x^k)$ zbiór dróg prostych $m(x^p, x^k)$ łączących źródło z odpływem. Drogą ekstremalną $m_{extr}(x^p, x^k)$ nazywamy taką drogę, dla której:

$$F[m_{extr}(x^p, x^k)] = \underset{m \in M(x^p, x^k)}{extr} F[m(x^p, x^k)], \quad (3.5.1.1)$$

gdzie ekstremum może być określone jako minimum (droga najkrótsza) lub maksimum (droga najdłuższa). W naszym przypadku wyznaczane są drogi najkrótsze.

Dla dalszych rozważań wprowadzimy teraz standardową sieć dróg ekstremalnych. Standardową siecią skierowaną dla dróg ekstremalnych jest sieć $S = \langle G, 0, \{1\} \rangle$, gdzie G jest grafem skierowanym, a l jest funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze jego łuków. Standardowe zadanie można zatem sformułować następująco. Dla ustalonych wierzchołków x^p i x^k sieci S należy znaleźć drogę $m(x^p, x^k)$ łączącą te wierzchołki, dla której spełniony jest następujący warunek:

$$F[m(x^p, x^k)] = \sum_{u \in U(m)} l(u) \quad (3.5.1.2)$$

gdzie: $U(m)$ oznacza zbiór gałęzi drogi m .

Decyzja o wyborze efektywnej metody wyznaczania drogi ekstremalnej zależy od wielu czynników. W przypadku sieci acyklicznych wiele algorytmów sprowadza się do metody programowania dynamicznego, dla której czas obliczeń jest proporcjonalny do liczby wierzchołków sieci.

Zadanie budowy autostrad i dróg ekspresowych można sformułować także jako zadanie lokalizacji wierzchołków. W tym podejściu wierzchołki sieci są zintegrowanymi odcinkami autostrad. Integracja odcinków dokonywana jest wówczas gdy wierzchołki na końcach tych odcinków mają stopnie równe 2, gdzie pod pojęciem stopnia wierzchołka rozumiana jest suma wchodzących i wychodzących gałęzi. Natomiast dwa wierzchołki sieci połączone są gałęzią tylko wówczas, gdy istnieje bezpośrednie połączenie drogowe (np. zjazdy) z jednego odcinka autostrady na drugi.

Takie sformułowanie problemu budowy dróg szybkiego ruchu jako zadania lokalizacji wierzchołków odwraca rolę gałęzi i wierzchołków rozpatrywaną powyżej. W dalszym ciągu problem ten pozostaje zadaniem wyznaczania dróg ekstremalnych w sieci.

II. Innym możliwym kryterium jest wyznaczanie takiej sieci dróg, dla których w danej chwili może być zrealizowane największe natężenie ruchu przy zadanych maksymalnych przepustowościach poszczególnych jej odcinków. W ten sposób lokalizowane są te odcinki dróg przeznaczone do budowy lub rozbudowy, które gwarantują przejazd największej ilości samochodów przy zadanych kosztach budowy i rozbudowy.

Dla tego kryterium otrzymujemy zadanie przepływu maksymalnego z wieloma źródłami i odpływami.

W języku teorii grafów problem przepływu maksymalnego zdefiniowany jest następująco.

W problemie przepływu maksymalnego przyjmuje się standardową sieć $S = \langle G, \{a\}, \{h\} \rangle$, gdzie G jest spójnym grafem Berge'a bez pętli, $G = \langle W, U \rangle \equiv \langle W, \Gamma \rangle$; $a(x)$ jest funkcją opisaną na zbiorze wierzchołków $x \in W$, wyróżniającą w sieci dwa wierzchołki: s - źródło oraz t - odpływ,

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = s, \\ 0 & \text{dla } x \neq s, t, \\ -1 & \text{dla } x = t, \end{cases} \quad (3.5.1.3)$$

natomiast $h(x, y)$, dla pary $\langle x, y \rangle \in U$, jest nieujemną funkcją na zbiorze luków digrafu G , której wartości są interpretowane jako przepustowości poszczególnych luków sieci.

Przepływem w sieci S nazywamy dowolną funkcję $f: U \rightarrow R$, spełniającą następujące dwa warunki:

$$1) \quad \bigwedge_{\langle x, y \rangle \in U} [0 \leq f(x, y) \leq h(x, y)], \quad (3.5.1.4)$$

$$2) \quad \bigwedge_{x \in W} \left[\sum_{y \in \Gamma_x} f(x, y) - \sum_{y \in \Gamma_x^{-1}} f(z, x) = a(x)v(f) \right] \quad (3.5.1.5)$$

gdzie Γ_x jest zbiorem następników wierzchołka x , a Γ_x^{-1} zbiorem poprzedników wierzchołka x , digrafu sieci. Wielkość $v(f)$ nazywamy wartością przepływu f i jest ona określona następująco:

$$v(f) = \sum_{y \in \Gamma_x} f(s, y) - \sum_{z \in \Gamma_x^{-1}} f(z, s) \quad (3.5.1.6)$$

Przepływ f^* nazywamy maksymalnym, dla danej sieci, gdy:

$$v(f^*) = \max_{f \in F} v(f) \quad (3.5.1.7)$$

gdzie F jest zbiorem wszystkich, możliwych przepływów dla danej sieci.

Dla rozważanego zadania z wieloma źródłami i odpływami otrzymujemy problem przepływu zaspokajającego, który zdefiniowany jest następująco.

Niech D oznacza liczbę magazynów oraz K oznacza liczbę klientów, wówczas dla $x \in D \cup K$ otrzymujemy, że:

$$\sum_{x \in D \cup K} a(x) = 0 \quad (3.5.1.8)$$

$a(x)$ jest odpowiednio funkcją wejścia w źródle i funkcją wyjścia w odpływie (3.5.1.4).

Równanie to oznacza bilansowanie się wartości funkcji wejścia i wyjścia bez uwzględniania możliwości transportowych. Oznaczmy na sieci dróg dolne i górne ograniczenia dla przepustowości jako funkcje l i h oraz przyjmijmy, że funkcja $a(x) = 0$ gdy $x \notin D \cup K$. Wówczas przepływem zaspokajającym w takiej sieci będzie każda funkcja f spełniająca następujące dwa warunki:

$$1) \quad \bigwedge_{\langle x, y \rangle \in U} l(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y) \quad (3.5.1.9)$$

$$2) \quad \bigwedge_{x \in W} \sum_{y \in \Gamma_x} f(x, y) - \sum_{z \in \Gamma_x^{-1}} f(z, x) = a(x) \quad (3.5.1.10)$$

Zagadnienie to może być łatwo rozwiązane, za pomocą znanych metod dla przepływów maksymalnych. W tym celu poszerzana jest sieć S o dwa wierzchołki, zwane odpowiednio źródłem zastępczym oraz odpływem zastępczym. Na łukach łączących dodatkowe wierzchołki z pierwotnymi źródłami oraz odpływami, definiowane są następujące funkcje a^* , l^* , h^* :

$$a^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq s, t \\ \sum_{d \in D} a(d) & \text{dla } x = s \\ \sum_{k \in K} a(r) & \text{dla } x = t \end{cases} \quad (3.5.1.11)$$

$$l^*(x, y) = \begin{cases} l(x, y) & \text{dla } \langle x, y \rangle \in U \\ 0 & \text{dla łuków dodanych} \end{cases} \quad (3.5.1.13)$$

$$h^*(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & \text{dla } \langle x, y \rangle \in U \\ a(d) & \text{dla } x = s, y = d, d \in D \\ -a(k) & \text{dla } x = k, k \in K, y = t \end{cases} \quad (3.5.1.12)$$

W wyniku otrzymujemy nową, poszerzoną sieć:

$$S^* = \langle G^*, \{a^*\}, \{l^*, h^*\} \rangle \quad (3.5.1.13)$$

W sieci może istnieć wiele różnych przepływów zaspokajających. Można wówczas wprowadzić kryterium dodatkowe i według niego wyznaczyć przepływ optymalny. Takim kryterium może być sumaryczny koszt przepływu.

Jeżeli oznaczymy przez k funkcję określającą jednostkowe koszty ponoszone na poszczególnych łukach sieci:

$$\bigwedge_{\langle x, y \rangle \in U} 0 \leq k(x, y) < \infty \quad (3.5.1.14)$$

Przepływem zaspokajającym o minimalnym koszcie nazywamy taką funkcję f^* , która spełnia następujące trzy warunki:

$$1) \quad \bigwedge_{\langle x, y \rangle \in U} 0 \leq f^*(x, y) \leq h(x, y) \quad (3.5.1.15)$$

$$2) \quad \bigwedge_{x \in W} \sum_{y \in \Gamma_x} f^* - \sum_{z \in \Gamma_x^{-1}} f^*(z, x) = a(x) \quad (3.5.1.16)$$

$$3) \quad \sum_{\langle x, y \rangle} k(x, y) f^*(x, y) = \min_{f \in F} \sum_{\langle x, y \rangle \in U} k(x, y) f(x, y) \quad (3.5.1.17)$$

gdzie F jest zbiorem wszystkich przepływów zaspokajających dla danej sieci S .

Zadanie to sprowadza się do wyznaczenia przepływu maksymalnego o minimalnym koszcie. Jedną z metod rozwiązania jest metoda potencjałów.

III. Do zadania lokalizacji autostrad i dróg ekspresowych można także podejść jako do zadania lokalizacji z horyzontem planowania. Przykłady takich zadań można znaleźć między innymi w pracach Wesołowskiego [88] i Klinecwiecza [44].

W odróżnieniu od przedstawionych powyżej dwu sformułowań lokalizacji odcinków w tym przykładzie otrzymujemy zadanie lokalizacji dynamicznej. Definicje lokalizacji dynamicznej autorki przedstawiły w Rozdziale 2.

3.5.2. Lokalizacja komputerowych baz danych w sieciach

IV. Problem lokalizacji najtańszych dróg przesyłania informacji dla zadanej sieci komputerowych baz danych.

W ostatnich latach niezwykle wzrosło na świecie zainteresowanie systemami elektronicznej dystrybucji informacji. Systemy te składają się z komputerów połączonych ze sobą za pomocą sieci telekomunikacyjnych. Stanowią one niezwykle atrakcyjne rozwiązanie dla geograficznie rozproszonych organizacji tworzących zintegrowane systemy informacyjne. Przed problemem dystrybucji informacji stawiane są takie cele jak: obniżanie kosztów komunikacyjnych, przyspieszenie dostępu do baz danych, zwiększenie systemowej niezawodności oraz skalowalności tj. bezkonfliktowej rozbudowy użytkowanej topologii sieci. Przykłady zagadnień lokalizacji w dziedzinie telekomunikacji przedstawili m.in. Ghosh, Murthy [30] oraz Kochman, McCalum [47]. Jest sprawą oczywistą, iż funkcje celu dla tych problemów są w ogólności wielokryterialne, a poszczególne kryteria pozostają we wzajemnym konflikcie. Przykładowo obniżanie kosztów dostępu do losowo wybranej informacji wiąże się ze wzrostem kosztów rozbudowy systemu.

Jak to zaprezentowali w swej pracy Ghosh i Murthy [30] model jest skomplikowany i rozbudowany i nie istnieją metody wyznaczania optymalnych rozwiązań.

Przedstawiamy najprostszy model lokalizacji, gdzie wyznaczane są najtańsze drogi przesyłania informacji dla zadanej sieci komputerowych baz danych.

Takie zadanie można sprowadzić do problemu wyznaczania drzew ekonomicznych pomiędzy wszystkimi węzłami w sieci. Drzewo ekonomiczne zdefiniowane jest następująco. Dla zadanej sieci $S = \langle G, \theta, \{k\} \rangle$, gdzie G jest dowolnym grafem $G = \langle W, U, P \rangle$, a funkcja k jest nieujemną funkcją określoną na zbiorze gałęzi grafu, należy wyznaczyć taki karkas $T = \langle W, U', P' \rangle$, grafu G , aby suma $\sum_{u \in U'} k(u)$ miała wartość minimalną.

Karkasem T grafu $G = \langle W, U, P \rangle$ nazywamy dowolny graf częściowy spełniający dowolne dwa z podanych trzech, następujących warunków:

1. $m(T) = m(G) - \lambda(G)$
2. $\chi(T) = \chi(G)$
3. $\lambda(T) = 0$

gdzie $\chi(G)$ jest liczbą składowych spójności grafu G , $m(G) = |U|$, $\lambda(G)$ jest liczbą cyklomatyczną grafu G zdefiniowaną następująco:

$$\lambda(G) = m(G) + \chi(G) - n(G)$$

dla $n(G) = |W|$.

Optymalne algorytmy wyznaczania drzew ekonomicznych są ogólnie znane w teorii grafów i sieci [51].

V. Problem lokalizacji dróg o maksymalnej przepustowości przy przesyłaniu informacji pomiędzy dowolnymi komputerowymi bazami danych.

Celem stawianym dla takiego problemu jest wyznaczenie takich dróg pomiędzy poszczególnymi wierzchołkami, aby uzyskać maksymalny przepływ, tzn. zlokalizowanie dróg o najpojemniejszych połączeniach. W tym celu predefiniujemy sieć tak, że na gałęziach definiowane są funkcje o ujemnych wartościach. W ten sposób otrzymujemy analogicznie do przykładu opisanego w punkcie 3 zadanie wyznaczenia karkasu tj. drzewa ekonomicznego o minimalnej sumarycznej wartości kosztów na łukach łączących wszystkie wierzchołki.

IBS PAN *serio*

45280

Bibl. podręczna

Książka dotyczy zagadnień lokalizacyjno-transportowych. Zadania te należą do klasy zadań optymalizacji dyskretnej. W pierwszej części książki przedstawiono różne klasyfikacje takich zadań poczynając od prac twórcy tej teorii – Alfreda Webera, a kończąc na najbardziej skomplikowanych modelach. Zadania lokalizacji mają wiele praktycznych zastosowań. I tak w drugiej części książki przedstawiono kilka przykładów konkretnych zagadnień wraz z metodami ich rozwiązania.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-98-7

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl