WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Tom 2

Pod redakcją

Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy
Tom 2

Pod redakcją

Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w tomie:

doc dr hab. Dariusz **GĄTAREK**

prof. dr hab. Jakub **GUTENBAUM**

prof. dr hab. Jerzy **HOŁUBIEC**

doc. dr hab. Marek **LIBURA**

prof. dr hab. Stanisław **PIASECKI**

prof. dr hab. Andrzej **STRASZAK**

doc. dr hab. Sławomir **WIERZCHOŃ**

doc dr. hab. Leszek **ZAREMBA**

© **Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania**
Warszawa 2000

ISBN 83-85847-54-5

ROZWIĄZANIE UTOPIJNE ZADANIA WIELOKRYTERIALNEGO PROGRAMOWANIA MATEMATYCZNEGO

Agnieszka B. Malinowska
Zaoczne Studia Doktoranckie IBS PAN

Rozważany jest problem istnienia rozwiązania utopijnego zadania wielokryterialnego programowania matematycznego. Podany jest warunek konieczny i dostateczny na to, aby rozwiązanie takie istniało oraz na to, aby było ono rozwiązaniem dopuszczalnym.

1. Wstęp

Podstawowym elementem efektywnego zarządzania jest podejmowanie złożonych decyzji, czyli rozwiązywanie problemów decyzyjnych. Możliwość ujęcia problemu decyzyjnego w postaci zadania wielokryterialnego programowania matematycznego pozwala na zastosowanie metod matematycznych do jego rozwiązywania. Oczywiście stopień trudności rozwiązania zależy od tego, jak są określone i jakie mają własności zbiór decyzji dopuszczalnych, funkcje ocen oraz relacja preferencji określona w przestrzeni kryterialnej. Opisanie matematyczne relacji preferencji decydenta w przestrzeni kryterialnej jest jednym z najtrudniejszych problemów WPM. Dzieje się tak dlatego, że decydent albo nie zna pełnej informacji o swojej relacji preferencji, albo też nie umie od razu jej podać.

Bardzo często spotykanym przypadkiem zadania WPM jest zadanie wektorowej maksymalizacji, w którym za relację preferencji w przestrzeni kryterialnej przyjmuje się relację dominacji. Przyjęcie tej relacji jest konsekwencją faktu, że jedyną informacją o preferencjach decydenta jest postulat maksymalności wszystkich funkcji celu.

W zadaniach VM, w których poszczególne cele uważa się za równorzędne ważną rolę odgrywa tzw. punkt utopijny, którego współrzędne są maksimami poszczególnych funkcji celu traktowanych z osobna. Dlatego też problem określenia warunku koniecznego i dostatecznego by istniało dopuszczalne rozwiązanie utopijne wydaje się być interesującym.

2. Podstawowe pojęcia i główne twierdzenie

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką.

Przykład 1:
1) R - liczby rzeczywiste,
2) $R[x_1,\dots,x_n]$ - pierścień wielomianów n zmiennych o współczynnikach rzeczywistych.

Definicja 1.
Stożek w A, to niepusty podzbiór $P \subset A$, spełniający warunki:
(i) $a \in P, b \in P \Rightarrow a+b \in P$,
(ii) $a \in P, b \in P \Rightarrow ab \in P$,
(iii) $a \in A \Rightarrow a^2 \in P$.
Stożek jest właściwy, jeśli ponadto
(iv) $-1 \notin P$.

Przykład 2:
1) Oznaczamy przez $\sum A^2$ zbiór sum kwadratów elementów z A, jest to najmniejszy stożek w A.
2) Niech P stożek w A i $(a_i)_{i\in I}$ rodzina elementów z A. Oznaczamy przez $M[(a_i)_{i\in I}]$ multiplikatywny monoid generowany przez $(a_i)_{i\in I}$
(tj. zbiór skończonych iloczynów elementów z $(a_i)_{i\in I}$, zawierający jedynkę).
Wtedy zbiór

$$P[(a_i)_{i\in I}] = \{p + \sum_{i=1}^{r} q_i b_i : p, q_i \in P, b_i \in M[(a_i)_{i\in I}]\}$$

jest najmniejszym zbiorem zawierającym P i $(a_i)_{i\in I}$.
W szczególności $\sum A^2[(a_i)_{i\in I}]$ jest stożkiem generowanym przez $(a_i)_{i\in I}$.

Definicja 2.
Ideałem w pierścieniu A nazywamy każdy podzbiór $I \subset A$ spełniający warunki:
i) $r \in I, s \in I \Rightarrow r-s \in I$,
ii) $r \in I, a \in A \Rightarrow ar \in I$.

Przykład 3:
Jeśli $U \subset A$ jest niepustym zbiorem, to najmniejszy ideał pierścienia A zawierający U składa się z elementów postaci $a_1u_1+...+a_ru_r$, gdzie $a_i \in A, u_i \in U, r = 0,1,...$.

Twierdzenie 1.
Niech $(g_j)_{j=1,...,s}, (p_k)_{k=1,...,t}, (h_l)_{l=1,...,u}$ skończone rodziny wielomianów z $R[x_1,...,x_n]$. Oznaczamy przez P - stożek generowany przez $(g_j)_{j=1,...,s}$„ przez M - multiplikatywny monoid generowany przez $(p_k)_{k=1,...,t}$„ przez I - ideał generowany przez $(h_l)_{l=1,...,u}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:
i) zbiór
$\{x \in R^n : g_j(x) \geq 0, p_k(x) \neq 0, h_l(x) = 0; j = 1,...,s, k = 1,...,t, l = 1,...,u\}$
jest pusty,
ii) istnieją
$g \in P, p \in M, h \in I$ takie, że $g + p^2 + h = 0$.

3. Rozwiązanie utopijne

Rozważamy zagadnienie wielokryterialnego programowania matematycznego z q skalarnymi funkcjami oceny

$$\max\{f(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

gdzie

R^n - przestrzeń decyzyjna,

$X = \{x \in R^n : g_1(x) \geq 0,..., g_m(x) \geq 0; g_i(x) \in R[x_1,...,x_n], i = 1,...,m\}$
zbiór rozwiązań dopuszczalnych,
$f = (f_1,..., f_q)$ - wektorowa funkcja oceny,
f_i - skalarne funkcje oceny, które są wielomianami n zmiennych o współczynnikach rzeczywistych.

Funkcja f przyporządkowuje każdemu wektorowi zmiennych decyzyjnych wektor ocen $y = f(x)$, który mierzy jakość decyzji x z punktu widzenia ustalonego układu funkcji oceny $f_1, \ldots, f_n$.

Obraz zbioru dopuszczalnego X względem funkcji f jest zbiorem osiągalnych wektorów ocen

$$Y = \{y \in R^q : y = f(x), x \in X\}.$$

Definicja 3.
Zadanie wielokryterialne (1) nazywamy regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zadania $\max\{f_i(x) : x \in X\}, i = 1, \ldots, q$ mają rozwiązania optymalne.

Przy założeniu, że zadanie wielokryterialne (1) jest regularne istnieje punkt

$$y^M = [y_1^M, \ldots, y_q^M],$$

gdzie $y_k^M = \max\{f_k(x) : x \in X\}, k = 1, \ldots, q$.

Definicja 4.
Punkt y^M nazywamy punktem utopijnym, natomiast punkt $x^M \in f^{-1}(y^M)$ nazywamy rozwiązaniem utopijnym.

Oczywiste jest, że istnienie punktu utopijnego nie zapewnia istnienia rozwiązania utopijnego. A jeśli nawet rozwiązanie utopijne istnieje, to nie musi być ono rozwiązaniem dopuszczalnym, gdyż punkt utopijny może być punktem nieosiągalnym. Na bazie twierdzenia 1 można podać warunek konieczny i dostateczny by istniało rozwiązanie utopijne oraz by istniało dopuszczalne rozwiązanie utopijne.

4. Wyniki

Niech $y^M = [y_1^M, \ldots, y_q^M]$ - będzie punktem utopijnym zadania wielokryterialnego programowania matematycznego (1).

Wprowadzamy oznaczenia:

$$h_j(x) := f_j(x) - y_j^M, j = 1, \ldots, q$$

$$A = R[x_1, \ldots, x_n]$$

P - stożek w A generowany przez $(g_i)_{i=1,\dots,m}$
I - ideał w A generowany przez $(h_j)_{j=1,\dots,q}$

Z twierdzenia 1 mamy, że:

A. Zbiór
$\{x \in R^n : h_j(x) = 0, j = 1,\dots,q\}$

jest pusty, tj. rozwiązanie utopijne nie istnieje $\Leftrightarrow$
istnieją $a \in \sum A^2$ i $h \in I$ takie, że $a + 1 + h = 0$.

B. Zbiór
$\{x \in R^n : g_i(x) \geq 0, h_j(x) = 0; i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,q\}$

jest pusty, tj. rozwiązanie utopijne nie istnieje lub jest ono rozwiązaniem niedopuszczalnym $\Leftrightarrow$
istnieją $g \in P$ i $h \in I$ takie, że $g + 1 + h = 0$.

5. Uwagi końcowe

A. Twierdzenie 1. można zastosować w zadaniach programowania celowego.

Problem wielokryterialny sprowadza się do zadania programowania celowego, gdy podejmujący decyzję szczegółowo określi swoje życzenia dotyczące wektora $r \in R^q$, którego składowymi są postulowane przez niego poziomy realizacji poszczególnych celów. Oczywiste jest, że gdy wektor r należy do zbioru wektorów osiągalnych, to wektory $x \in f^{-1}(r)$ reprezentują decyzje optymalne.

Niech zbiór decyzji dopuszczalnych, wektorowa funkcja oceny będą określone jak w zadaniu wielokryterialnym (1) oraz

$r = [r_1,\dots,r_q] \in R^q$ - wektor postulowanych poziomów realizacji celów
$h_j := f_j(x) - r_j, j = 1,\dots,q$
$A = R[x_1,\dots,x_n]$

P - stożek w A generowany przez $(g_i)_{i=1,\dots,m}$
I - ideał w A generowany przez $(h_j)_{j=1,\dots,q}$.

Wtedy z twierdzenia 1 otrzymujemy, że zbiór

$$\{x \in R^n : g_i(x) \geq 0, h_j(x) = 0, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,q\}$$

jest pusty, tj. że wektor r nie należy do zbioru wektorów osiągalnych $\Leftrightarrow$ istnieją $g \in P$ i $h \in I$ takie, że $g + 1 + h = 0$

B. Występujący w twierdzeniu 1 warunek $g + p^2 + h = 0$ jest równoważny warunkowi $g + p^2 \in I$. Sprawdzenie, czy element należy do ideału generowanego przez skończoną rodzinę wielomianów, może być dokonane przez zastosowanie algorytmu Buchbergera dotyczącego baz Gröbnera.

Przykład 4:
Niech:
$X = R$,
$f = (-(x-1)^2 + 4, -(x-2)^2 + 1)$.
Wtedy $y^M = [4,1]$ oraz
$h_1(x) = -(x-1)^2$,
$h_2(x) = -(x-2)^2$.

Zatem ideał I jest postaci $I = (-(x-1)^2, -(x-2)^2)$. Wykorzystując własności ideału otrzymujemy kolejno:

$$-(x-1)^2 \cdot (-1) = (x-1)^2 \in I,$$
$$-(x-2)^2 \cdot (-1) = (x-2)^2 \in I,$$
$$(x-2)^2 - (x-1)^2 = -2x + 3 \in I,$$
$$(x-2)^2 + \frac{1}{2}x(-2x+3) = 4 - \frac{5}{2}x \in I,$$
$$4 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}(-2x+3) = \frac{1}{4} \in I.$$

Przyjmując $a = (x-1)^2 + (x-2)^2$ otrzymujemy, że $1 + a \in I$. Oznacza to, że zbiór

$$\{x \in R : h_j(x) = 0, j = 1,2\}$$

jest pusty, a zatem rozwiązanie utopijne nie istnieje.

Literatura

[1] Adams, W.W., P. Loustaunau (1994) *An introducion to Gröbner Bases.* AMS.
[2] Bochnak, J., M. Coste, M.-F. Roy (1998) *Real Algebraic Geometry.* [3] Springer-Verlag.
[4] Galas, Z., I. Nykowski, Z. Żółkiewski (1987) *Programowanie wielokryterialne*. PWE.
[5] Ogryczak, W. (1997) *Wielokryterialna optymalizacji liniowa i dyskretna.* Wydawnictwa UW.

WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI STOSOWANEJ I ZARZĄDZANIA

pod auspicjami
Polskiej Akademii Nauk

ZAŁOŻYCIELEM
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
jest
FUNDACJA KRZEWIENIA NAUK SYSTEMOWYCH
powołana z inicjatywy
Prezesa
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FUNDATOREM
Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych
jest
POLSKA AKADEMIA NAUK

ORGANEM
sprawującym nadzór jest
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
prowadzi studia wyższe na kierunkach:
INFORMATYKA
ZARZĄDZANIE I MARKETING

SIEDZIBA
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-54-5