WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Tom 2

Pod redakcją

Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Tom 2

Pod redakcją

Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w tomie:

doc dr hab. Dariusz **GĄTAREK**

prof. dr hab. Jakub **GUTENBAUM**

prof. dr hab. Jerzy **HOŁUBIEC**

doc. dr hab. Marek **LIBURA**

prof. dr hab. Stanisław **PIASECKI**

prof. dr hab. Andrzej **STRASZAK**

doc. dr hab. Sławomir **WIERZCHOŃ**

doc dr. hab. Leszek **ZAREMBA**

ISBN 83-85847-54-5

JEDNOWYMIAROWY MATEMATYCZNY MODEL ALOKACJI KAPITAŁU

Leszek Pęksyk
Zaoczne Studium Doktoranckie IBS PAN

W roku 1990 firma Wiley&Sons wydała książkę Ralph Vince'a „Portfolio Management Formulas", w której autor podał matematyczny model alokacji kapitału. W latach 1992 i 1995 ukazały się dwie kolejne książki tego autora na ten sam temat.

Do powyższego modelu nawiązuje L. Zaremba („Matematyczny model alokacji kapitału w długookresowym horyzoncie" – preprint). W swojej pracy podaje wyraźnie inny (bardziej precyzyjny) niż oryginał model alokacji. Wspomniane prace opisywały różne przypadki, które mogły zachodzić z tym samym prawdopodobieństwem, tzn. prawdopodobieństwo zysku oraz straty były takie same i wynosiły ½. Niniejsza praca opisuje sytuację bardziej ogólną, tzn. nie zakłada się równości prawdopodobieństw uzyskania zysku czy straty.

Inwestujemy pieniądze (w ilości S PLN) na rynku ryzykownych papierów wartościowych, takich jak: kontrakty futures, akcje o dużym ryzyku, opcje, przeznaczając za każdym razem stały ułamek f posiadanych w danej chwili środków pieniężnych.

Założenie 1. Za każdy jeden okres (dzień, tydzień, miesiąc itp.) uzyskujemy z każdej złotówki albo A złotych albo tracimy B złotych.

Oznacza to, że po każdym jednym okresie posiadana kwota S albo wzrośnie do $S + SfA = S(1 + fA)$ albo zmaleje do $S - SfB = S(1 - fB)$.

Założenie 2. Zysk A pojawia się z prawdopodobieństwem $p(0<p<1)$, strata B pojawia się z prawdopodobieństwem $q(q = 1 - p)$.

W niniejszej pracy będziemy rozważać sytuację w n kolejnych okresach. Oznacza to, że mamy dokładnie 2^n ciągów długości n wyników typu A bądź B. Oczywiście różne ciągi mogą mieć różne prawdopodobieństwa ich uzyskania. Przez i-ty scenariusz będziemy rozumieć sytuację, w której wystąpi dokładnie i wyników typu A i $n - i$

wyników typu B. Prawdopodobieństwo wystąpienia i-tego scenariusza wynosi

$$p_i = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \tag{1}$$

W przypadku wystąpienia scenariusza typu i (i zysków A oraz $n-i$ strat B) kwota S wzrośnie (zmaleje) do

$$M_s^i = S(1+fA)^i(1-fB)^i. \tag{2}$$

Założenie 3. Zakładamy, że scenariusze występują tak często, jak wynika to z ich prawdopodobieństw p_i.

Znając te prawdopodobieństwa możemy obliczyć oczekiwane bogactwo końcowe (expected final wealth = EFW) po $n \cdot 2^n$ okresach ($n \cdot 2^n$ = horyzont inwestycyjny:

$$EFW_s(f) = S\prod_{i=0}^{n}\left[(1+fA)^i(1-fB)^{n-i}\right]^{\binom{n}{i}p^i q^{n-i} 2^n}. \tag{3}$$

Dla inwestorów długoterminowych będziemy maksymalizować średnie geometryczne tempo wzrostu kapitału $S = 1$ przez n okresów w czasie $n \cdot 2^n$ okresów tzn. $\sqrt[2^n]{EFW_1(f)}$, tzn. terminal wealth relative- TWR (Ralph Vince)

$$TWR(f) = \sqrt[2^n]{EFW_1(f)} = \prod_{i=0}^{n}\left[(1+fA)^i(1-fB)^{n-i}\right]^{\binom{n}{i}p^i q^{n-i}} = \\ = \prod_{i=0}^{n}\left[(1+fA)^i(1-fB)^{n-i}\right]^{p_i} \tag{4}$$

Dla inwestorów o średnim horyzoncie indeksem do maksymalizacji może być:

$$GeoMean(f) = \sqrt[n]{TWR(f)} \tag{5}$$

czyli średnie geometryczne tempo zwrotu na kapitale za jeden okres (tzn. dzień, tydzień, etc.).

Lemat 1. $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i q^{n-i} = np$

Dowód:

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} i \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!} p^{i-1} q^{n-i} =$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} p^{i-1} q^{n-i} = np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} p^i q^{n-i-1} =$$

$$= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i-1} q^{n-i-1} = np(p+q)^{n-1} = np$$

Lemat 2. $\sum_{i=0}^{n} (n-i)\binom{n}{i} p^i q^{n-i} = nq$

Dowód:

$$\sum_{i=0}^{n} (n-i)\binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (n-i)\binom{n}{n-i} p^i q^{n-i} =$$

$$= \sum_{k=n}^{0} k\binom{n}{k} p^{n-k} q^k = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^{n-k} q^k = nq$$

Twierdzenie 1. Dla dowolnego n naturalnego:

(i) $TWR(f) = (1+fA)^{np}(1-fB)^{nq}$

(ii) $GeoMean(f) = (1+fA)^p(1-fB)^q$.

Dowód:

(i)

$$TWR(f) = \prod_{i=0}^{n} \left[(1+fA)^i (1-fB)^{n-i}\right]^{p_i} =$$
$$= \prod_{i=0}^{n} \left[(1+fA)^i (1-fB)^{n-i}\right]^{\binom{n}{i} p^i q^{n-i}} =$$
$$= \prod_{i=0}^{n} \left[(1+fA)^{i\binom{n}{i} p^i q^{n-i}} \cdot (1-fB)^{(n-i)\binom{n}{i} p^i q^{n-i}}\right] =$$
$$= (1+fA)^{\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i q^{n-i}} \cdot (1-fB)^{\sum_{i=0}^{n} (n-i)\binom{n}{i} p^i q^{n-i}} =$$
$$= (1+fA)^{np} (1-fB)^{nq}$$

(ii)

$$GeoMean(f) = \sqrt[n]{TWR} = \sqrt[n]{(1+fA)^{np}(1-fB)^{nq}} =$$
$$= (1+fA)^p (1-fB)^q$$

Twierdzenie 2. Wartość f^* maksymalizująca $EFW_S(f)$, $TWR(f)$ oraz $Geo.Mean(f)$ dana jest wzorem:

$$f^* = \frac{p}{B} - \frac{q}{A}. \tag{6}$$

Dowód:
Łatwo zauważyć, że liczba maksymalizująca każdą z funkcji jest ta sama. Wystarczy więc znaleźć ją dla $TWR(f)$.

Niech $F = TWR$

$$F(f) = (1+fA)^{np}(1-fB)^{nq}$$
$$F'(f) = npA(1+fA)^{np-1}(1-fB)^{nq} - nqB(1+fA)^{np}(1-fB)^{nq-1} =$$
$$= n(1+fA)^{np-1}(1-fB)^{nq-1}\left[pA(1-fB) - qB(1+fA)\right] = 0$$

Stąd

$$pA(1-fB) - qB(1+fA) = 0$$
$$pA - pfAB - qB - qfAB = 0$$
$$-pfAB - qfAB = qB - pA$$
$$f(-pAB - qAB) = qB - pA$$

$$f = \frac{qB - pA}{-pAB - qAB}$$

$$f = \frac{pA - qB}{AB(p+q)}$$

$$f = \frac{pA - qB}{AB}$$

$$f = \frac{p}{B} - \frac{q}{A}$$

łatwo zauważyć, że $\begin{array}{l} F'(f) > 0 \ \mathit{dla} \ f < \frac{p}{B} - \frac{q}{A} \\ F'(f) < 0 \ \mathit{dla} \ f > \frac{p}{B} - \frac{q}{A} \end{array}$.

Stąd $f^* = f^*(A,B) = \frac{p}{B} - \frac{q}{A}$ spełnia tezę twierdzenia.

Twierdzenie 3. Maksymalne wielkości dla *TWR(f)*, $EFW_S(f)$ oraz *Geo.Mean(f)* dane są wzorami:

(i) $$TWR(f^*) = \left[\left(p\left(1+\frac{A}{B}\right)\right)^p \left(q\left(1+\frac{B}{A}\right)\right)^q\right]^n \tag{7}$$

(ii) $$EFW_S(f^*) = S\left[\left(p\left(1+\frac{A}{B}\right)\right)^p \left(q\left(1+\frac{B}{A}\right)\right)^q\right]^{n\cdot 2^n} \tag{8}$$

(iii) $$GeoMean(f^*) = \left(p\left(1+\frac{A}{B}\right)\right)^p \left(q\left(1+\frac{B}{A}\right)\right)^q \tag{9}$$

Dowód:

Wystarczy we wzorach (3), (4), (5) przyjąć $f = \frac{p}{B} - \frac{q}{A}$.

Twierdzenie 4. Niech $f^* = f^*(A,B) = \frac{p}{B} - \frac{q}{A}$.

Wówczas $f^*(\alpha A, \alpha B) = \frac{1}{\alpha} f^*(A,B)$

Dowód.:

$$f^*(\alpha A, \alpha B) = \frac{p}{\alpha B} - \frac{q}{\alpha A} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p}{B} + \frac{q}{A}\right) = \frac{1}{\alpha} f^*(A,B)$$

Wniosek 1. Dla $p = q = \frac{1}{2}$ otrzymujemy:

(i) $$f^*(A,B) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right] \tag{10}$$

(ii) $$TWR(f^*) = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{A}{B}\right)\left(1+\frac{B}{A}\right)}\right]^n \tag{11}$$

(iii) $$EFW_S(f^*) = S\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{A}{B}\right)\left(1+\frac{B}{A}\right)}\right]^{n \cdot 2^n} \tag{12}$$

(iv) $$GeoMean(f^*) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{A}{B}\right)\left(1+\frac{B}{A}\right)} \tag{13}$$

(v) $$f^*(\alpha A, \beta B) = \frac{1}{\beta} f^*(A,B) + \frac{1}{A} f^*(\alpha, \beta) \tag{14}$$

Dowód:

(v)

$$f^*(\alpha A, \beta B) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\beta B} - \frac{1}{\alpha A}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\beta B} - \frac{1}{\beta A} + \frac{1}{\beta A} - \frac{1}{\alpha A}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right] = \frac{1}{\beta} f^*(A,B) + \frac{1}{A} f^*(\alpha, \beta)$$

Wniosek 2. Dla $p = q = \frac{1}{2}$ otrzymujemy:

(i) *Geo.Mean(f*) > 1*

(ii) *TWE(f*) >1*

(iii) $FW_S(f^*) > S$

Dowód:
Wystarczy udowodnić (i).

$$GeoMean(f^*) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{A}{B}\right)\left(1+\frac{B}{A}\right)} == \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{B}{A}+\frac{A}{B}+\frac{AB}{BA}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{A^2+B^2}{AB}} > \frac{1}{2}\sqrt{2+2} = \frac{1}{2}2 = 1$$

Nierówność wynika z faktu, że dla $A, B > 0$ $A^2 + B^2 > 2AB$.

Przykład 1. Dla $p = q = \frac{1}{2}$ i $A = 2$, $B = 1$ (przypadek rozważany przez Ralpha Vince'a) otrzymujemy:

$$f^*(2,1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Przykład 2. $p = 0{,}55$; $q = 0{,}45$

a) $A = 0{,}50$; $B = 0{,}40$ wówczas $f^* = \frac{38}{80}$

b) $A = 0{,}50$; $B = 0{,}45$ wówczas $f^* = \frac{29}{90}$.

Oznacza to, że im bardziej korzystny rynek (większa różnica $A - B$) tym większą część naszych pieniędzy warto inwestować w ryzykowne papiery wartościowe na tym rynku.

Literatura

[1] Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and Its* applications. Wiley&Sons.
[2] Gersternkorn, T. Śródka, T. (1983) *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.* PWN.
[3] Vince, R. (1990) *Portfolio Management Formulas.* Wiley&Sons.
[4] Vince, R. (1992) *The Mathematics of Money Management.* Wiley&Sons.
[5] Vince, R. (1995) *The New Money Management.* Wiley&Sons.

[6] Zaremba, L. *Matematyczny model alokacji kapitału w długookresowym horyzoncie*. Preprint.

WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI STOSOWANEJ I ZARZĄDZANIA

pod auspicjami
Polskiej Akademii Nauk

ZAŁOŻYCIELEM
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
jest
FUNDACJA KRZEWIENIA NAUK SYSTEMOWYCH
powołana z inicjatywy
Prezesa
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FUNDATOREM
Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych
jest
POLSKA AKADEMIA NAUK

ORGANEM
sprawującym nadzór jest
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
prowadzi studia wyższe na kierunkach:
INFORMATYKA
ZARZĄDZANIE I MARKETING

SIEDZIBA
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-54-5