WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy

Tom 2

Pod redakcją

Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

WYŻSZA SZKOŁA
INFORMATYKI STOSOWANEJ
I ZARZĄDZANIA

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Wybrane problemy
Tom 2

Pod redakcją
Macieja KRAWCZAKA i Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2000

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w tomie:

doc dr hab. Dariusz **GĄTAREK**

prof. dr hab. Jakub **GUTENBAUM**

prof. dr hab. Jerzy **HOŁUBIEC**

doc. dr hab. Marek **LIBURA**

prof. dr hab. Stanisław **PIASECKI**

prof. dr hab. Andrzej **STRASZAK**

doc. dr hab. Sławomir **WIERZCHOŃ**

doc dr. hab. Leszek **ZAREMBA**

Warszawa 2000

ISBN 83-85847-54-5

DWUWYMIAROWY MATEMATYCZNY MODEL ALOKACJI KAPITAŁU W DŁUGOOKRESOWYM HORYZONCIE CZASOWYM

Leszek Pęksyk
Zaoczne Studium Doktoranckie IBS PAN

W latach dziewięćdziesiątych wydawnictwo Wiley&Sons wydało trzy prace Ralpha Vince'a dotyczące problemu alokacji na rynku ryzykownych papierów wartościowych. Autor rozpatrywał dwie – zachodzące z tym samym prawdopodobieństwem równym 0,5 – sytuacje: zysk albo stratę. W swoich pracach odpowiedział na pytanie: jaki stały ułamek f posiadanych w danej chwili środków pieniężnych należy przeznaczyć by po n okresach zyskać jak najwięcej? Niniejszy model nawiązuje do prac Ralpha Vinne'a, jest przy tym bardziej precyzyjny i bardziej przekonujący.

Inwestujemy jednocześnie pieniądze (S PLN) na dwu rynkach ryzykownych papierów wartościowych takich, jak: akcje o dużym ryzyku, opcje, kontrakty futures, przeznaczając za każdym razem stałe ułamki f i g posiadanych w danej chwili środków pieniężnych na rynku pierwszym i drugim odpowiednio, tzn. na pierwszym rynku stale inwestujemy ułamek f posiadanych w danej chwili zasobów finansowych; natomiast na drugim rynku inwestujemy ułamek g posiadanych aktualnie środków pieniężnych.

Założenie 1. Za każdy 1 okres (dzień, tydzień, miesiąc, etc.) uzyskujemy z każdej złotówki na rynku pierwszym albo A_1 złotych zysku albo B_1 złotych straty; oraz na rynku drugim albo A_2 złotych zysku, albo B_2 złotych straty.

W swoich pracach Ralph Vince przyjmował
$A_1 = A_2 = 2$;
$B_1 = B_2 = 1$.

Można oczywiście przyjmować inne wartości znacznie mniejsze.

Założenie 2. Zysk A_1 i strata B_1 pojawią się na rynku pierwszym z prawdopodobieństwem ½ zysk A_2 i strata B_2 pojawiają się na rynku drugim z prawdopodobieństwem ½.

Założenie 3. Oba rynki pracują niezależnie od siebie, tzn. wynik na rynku pierwszym nie ma żadnego wpływu na wynik rynku drugiego.

W dalszym ciągu będziemy używać symbolu $\substack{C \\ D}$. Symbol ten oznacza, że tym samym okresie (w tym samym momencie) na rynku pierwszym wystąpił wynik C, a na rynku drugim wynik D.

Niezależność rynków oznacza, że równoprawne są następujące sytuacje:

zysk na pierwszym rynku (A_1), zysk na drugim rynku (A_2): $\substack{A_1 \\ A_2}$

- zysk na pierwszym rynku (A_1), strata na drugim rynku (B_2): $\substack{A_1 \\ B_2}$
- strata na pierwszym rynku (B_1), zysk na drugim rynku (A_2): $\substack{B_1 \\ A_2}$
- strata na pierwszym rynku (B_1), strata na drugim rynku (B_2): $\substack{B_1 \\ B_2}$

Każda z powyższych sytuacji ma prawdopodobieństwo wystąpienia równe ¼.

Będziemy rozpatrywać sytuację w kolejnych okresach. Każdy ciąg wyników należących do zbioru $\left\{ \substack{A_1 \\ A_2}, \substack{A_1 \\ B_2}, \substack{B_1 \\ A_2}, \substack{B_1 \\ B_2} \right\}$ w kolejnych n sesjach ma prawdopodobieństwo wystąpienia $\frac{1}{4^n}$. Każdy taki możliwy ciąg będziemy nazywać scenariuszem. Liczba scenariuszy wynosi 4^n. Za horyzont inwestycyjny przyjmijmy liczbę $n4^n$ okresów (dni, tygodni, miesięcy etc.).

Przykład 1. Dla n = 2 mamy $4^2 = 16$ możliwych scenariuszy:

$$\begin{array}{cccccccc}
A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\
A_2 & A_2, & A_2 & B_2, & B_2 & A_2, & B_2 & B_2, \\
A_1 & B_1 & A_1 & B_1 & A_1 & B_1 & A_1 & B_1 \\
A_2 & A_2, & A_2 & B_2, & B_2 & A_2, & B_2 & B_2, \\
B_1 & A_1 & B_1 & A_1 & B_1 & A_1 & B_1 & A_1 \\
A_2 & A_2, & A_2 & B_2, & B_2 & A_2, & B_2 & B_2, \\
B_1 & B_1 & B_1 & B_1 & B_1 & B_1 & B_1 & B_1 \\
A_2 & A_2, & A_2 & B_2, & B_2 & A_2, & B_2 & B_2,
\end{array}$$

gdzie np. $\begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array}$, oznacza,

że w pierwszym okresie uzyskaliśmy wynik typu $\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}$, natomiast w drugim okresie uzyskaliśmy wynik typu $\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array}$.

Przykład 2. Dla n = 3 mamy $4^3 = 64$ możliwych ciągów (scenariuszy) Mogą tu wystąpić takie sytuacje jak:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & B_1 & B_1 & B_1 & B_1 & A_1 \\
A_2 & A_2 & B_2, & A_2 & A_2 & B_2, & A_2 & B_2 & A_2,
\end{array} \text{ itp.}$$

Zauważmy, że w przypadku wystąpienia sytuacji typu $\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}$ posiadana suma S wzrośnie do:

$S + SfA_1 + SgA_2 = S(1 + fA_1 + gA_2)$.

Gdy wystąpi sytuacja typu $\begin{array}{c} A_1 \\ B_2 \end{array}$ uzyskamy wynik:

$S + SfA_1 - SgB_2 = S(1 + fA_1 - gB_2)$.

Podobnie dla sytuacji $\begin{matrix} B_1 \\ A_2 \end{matrix}$: S - $SfB_1 + SgA_2 = S(1 - fB_1 + gA_2)$

i dla sytuacji $\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix}$ S - $SfB_1 - SgB_2 = S(1 - fB_1 - gB_2)$.

Przykład 3. Niech n = 8. Rozważmy scenariusz:

$$\begin{matrix} A_1 & A_1 & B_1 & B_1 & A_1 & B_1 & B_1 & A_1 \\ A_2 & B_2 & A_2 & A_2 & A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \end{matrix}$$

W przypadku zajścia tego scenariusza kwota S wzrośnie (zmaleje) do:

$S(1 + fA_1 + gA_2)(1 + fA_1 - gB_2)(1 - fB_1 + gA_2)(1 - fB_1 + gA_2)(1 + fA_1 + gA_2)(1 - fB_1 + gA_2)(1 - fB_1 + gA_2)(1 + fA_1 + gA_2) = S(1 + fA_1 + gA_2)^3(1 + fA_1 - gB_2)(1 - fB_1 + gA_2)^4(1 - fB_1 - gB_2)^0$.

Łatwo zauważyć, że wynik końcowy zależy od ilości czynników postaci: $(1 + fA_1 + gA_2)$, $(1 + fA_1 - gB_2)$, $(1 - fB_1 + gA_2)$, $(1 - fB_1 - gB_2)$ i może być taki sam dla różnych scenariuszy.

Definicja 1. Mówimy, że scenariusz jest typu (k_1, k_2, k_3, k_4,) jeśli w tym scenariuszu otrzymamy dokładnie k_1 wyników typu $\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}$, k_2 wyników typu $\begin{matrix} A_1 \\ B_2 \end{matrix}$, k_3 wyników typu $\begin{matrix} B_1 \\ A_2 \end{matrix}$, k_4 wyników typu $\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix}$, oraz $k_i \in N$, $0 \leq k_i \leq n$ dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a także $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$.

Niech

$$M_{(k_1,k_2,k_3,k_4)} \stackrel{def}{=} (1 + fA_1 + gA_2)^{k_1}(1 + fA_1 - gB_2)^{k_2}(1 - fB_1 + gA_2)^{k_3}(1 - fB_1 - gB_2)^{k_4}.$$

Wówczas w przypadku wystąpienia scenariusza typu (k_1, k_2, k_3, k_4,) kwota S wzrośnie (zmaleje) do $SM_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}$.

Prawdopodobieństwo wystąpienia scenariusza typu (k_1, k_2, k_3, k_4,) wynosi dokładnie: $$\frac{\dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}}{4^n} \tag{1}$$

Znając prawdopodobieństwa wystąpienia wszystkich możliwych scenariuszy możemy obliczyć oczekiwane bogactwo końcowe po $n\cdot 4^n$ okresach inwestowania, tzw. expectet final wealth = EFW, zakładając, że scenariusze wystąpią tak często, jak wynika to z ich prawdopodobieństw danych wzorami (1)

$$EFW_S(f,g) = \prod_{k_1,k_2,k_3,k_4} M_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}^{\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}} \tag{2}$$

gdzie $k_i \in N$, $0 \le k_i \le n$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$, oraz mnożenie rozciąga się na wszystkie możliwe czwórki (k_1, k_2, k_3, k_4,).

Dla inwestorów długoterminowych będziemy maksymalizować średnie geometryczne tempo wzrostu kapitału S = 1 przez n okresów w czasie n 4^n okresów, czyli tzw. terminal wealth relative = TWR:
$TWR(f,g) = \sqrt[4^n]{EWF_s(f,g)}$.

Dla inwestorów o średnim horyzoncie indeksem do maksymalizacji może być: $GeoMean(f,g) = \sqrt[n]{TWR(f,g)}$, czyli średnie geometryczne tempo zwrotu na kapitale za 1 okres.

Lemat 1. $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^{n-k} = n4^{n-1}$$

Dowód:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}3^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}3^{n-k} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}3^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}3^{n-k} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}3^{n-k}\cdot 1^{k-1} = n(3+1)^{n-1} = n4^{n-1}$$

Lemat 2. Niech $k_i \in N$, $\in N$, $0 \le k_i \le n$, $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$ dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ Wówczas $\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} k_1 \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = n4^{n-1}$

Dowód:

$$\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} k_1 \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3}\sum_{k_4} k_1 \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$$

$$= \sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3} k_1 \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$$

$$= \sum_{k_1}\sum_{k_2} k_1 \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\sum_{k_3}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$$

$$= \sum_{k_1}\sum_{k_2} k_1 \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} 2^{n-k_1-k_2} = \sum_{k_1} k_1 \binom{n}{k_1}\sum_{k_2}\binom{n-k_1}{k_2} 2^{n-k_1-k_2} =$$

$$= \sum_{k_1} k_1 \binom{n}{k_1} 3^{n-k_1} = n4^{n-1}$$

Twierdzenie 1. Dla dowolnego n naturalnego:

(i)
$$EFW_S(f,g) = S(1+fA_1+gA_2)^{n4^{n-1}}(1+fA_1-gB_2)^{n4^{n-1}} \cdot \cdot (1-fB_1+gA_2)^{n4^{n-1}}(1-fB_1+gB_2)^{n4^{n-1}}$$

(ii)
$$TWR(f,g) = (1+fA_1+gA_2)^{\frac{n}{4}}(1+fA_1-gB_2)^{\frac{n}{4}} \cdot \cdot (1-fB_1+gA_2)^{\frac{n}{4}}(1-fB_1-gB_2)^{\frac{n}{4}}$$

(iii)
$$GeoMean(f,g) = (1+fA_1+gA_2)^{\frac{1}{4}}(1+fA_1-gB_2)^{\frac{1}{4}} \cdot \cdot (1-fB_1+gA_2)^{\frac{1}{4}}(1-fB_1-gB_2)^{\frac{1}{4}}$$

Dowód:
Wystarczy udowodnić (i)

Niech $k_i \in N$, $0 \le k_i \le n$ dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$.

$$EFW_S(f,g) = S \prod_{k_1,k_2,k_3,k_4} M_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}^{\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}} =$$

$$= S \prod_{k_1,k_2,k_3,k_4} (1+fA_1+gA_2)^{k_1\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}}(1+fA_1-gB_2)^{k_2\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}} \cdot$$

$$\cdot (1-fB_1+gA_2)^{k_3\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}}(1-fB_1-gB_2)^{k_4\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}} =$$

$$= S(1+fA_1+gA_2)^{\sum\limits_{k_1,k_2,k_3,k_4} k_1\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}}(1+fA_1-gB_2)^{\sum\limits_{k_1,k_2,k_3,k_4} k_2\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}} \cdot$$

$$\cdot (1-fB_1+gA_2)^{\sum\limits_{k_1,k_2,k_3,k_4} k_3\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}}(1-fB_1-gB_2)^{\sum\limits_{k_1,k_2,k_3,k_4} k_4\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}} =$$

$$= S(1+fA_1+gA_2)^{n4^{n-1}}(1+fA_1-gB_2)^{n4^{n-1}}(1-fB_1+gA_2)^{n4^{n-1}} \cdot$$

$$\cdot (1-fB_1-gB_2)^{n4^{n-1}}$$

(ii) oraz (iii) wynikają z (i).

Uwaga. Powyższy problem znalezienia powyższych sum jest równoważny następującemu problemowi. Rozważmy wszystkie możliwe ciągi długości n, których wyrazy należą do zbioru {A, B, C, D}. Prawdopodobieństwo pojawienia się jednego z elementów A, B, C, D jest takie samo. Policzmy, ile razy w sumie pojawi się A we wszystkich możliwych takich ciągach.

Ciągów, w których A pojawia się dokładnie raz jest $n \cdot 3^{n-1} = \binom{n}{1} 3^{n-1}$.

Ciągów , w których A pojawia się 2 razy jest $\binom{n}{2} 3^{n-2}$.

Ciągów, w których A pojawia się 3 razy jest $\binom{n}{3} 3^{n-3}$, itd.

Ciągów, w których A pojawia się n razy jest $\binom{n}{n} 3^{0} = 1$.

We wszystkich możliwych ciągach A pojawia się więc

$$1\binom{n}{1}3^{n-1}+2\binom{n}{2}3^{n-2}+\ldots n\binom{n}{n}3^{n-n} \text{ razy.}$$

Na mocy Lematu 1 liczba ta wynosi $n4^{n-1}$.

Twierdzenie 2. Wartość (f^*, g^*) maksymalizująca $EFW_S(f,g)$, $TWR(f,g)$, Geo.Mean(f,g) jest punktem, w którym funkcja

$$F(f,g) = (1+fA_1+gA_2)\ (1+fA_1-gB_2)\ (1-fB_1+gA_2)\ (1-fB_1-gB_2) \tag{5}$$

osiąga swoje ekstremum.

Dowód jest oczywisty, gdyż każda z tych funkcji osiąga swoje ekstremum w tym samym punkcie (f^*, g^*) (jak łatwo zauważyć) a biorąc pod uwagę postać Geo.Mean(f,g) wystarczy rzeczywiście rozpatrzyć funkcję (5).

Ekstremum tej funkcji nie zawsze się da w sposób analityczny (rachunkowy) policzyć. Jednak w pewnych przypadkach jest to możliwe. W trudniejszych można się posłużyć technikami komputerowymi.

Twierdzenie 3. Jeżeli $A_1 = A_2 = A$ i $B_1 = B_2 = B$ to funkcja (5) osiąga swoje ekstremum (maksimum) w punkcie (f^*,f^*), gdzie

$$f^* = \frac{-(3A^2+3B^2-10AB)-\sqrt{9A^4+9B^4-10A^2B^2+4AB^3+4A^3B}}{2(-8A^2B+8AB^2)} \tag{6}$$

Dowód.
Niech $A_1 = A_2 = A$ i $B_1 = B_2 = B$.

Wówczas
$F(f,g) = (1+fA+gA)\ (1+fA-gB)\ (1-fB+gA)\ (1-fB-gB)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial f} &= A(1+fA-gB)(1-fB+gA)(1-fB-gB)+\\ &+A(1+fA+gA)(1-fB+gA)(1-fB-gB)-\\ &-B(1+fA+gA)(1+fA-gB)(1-fB-gB)-\\ &-B(1+fA+gA)(1+fA-gB)(1-fB+gA)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial g} &= A(1+fA-gB)(1-fB+gA)(1-fB-gB)+ \\ &+B(1+fA+gA)(1-fB+gA)(1-fB-gB)+ \\ &+A(1+fA+gA)(1+fA-gB)(1-fB-gB)- \\ &-B(1+fA+gA)(1+fA-gB)(1-fB+gA)\end{aligned} \tag{8}$$

Rozwiążmy układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial f} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial g} = 0 \end{cases}.$$

Odejmując stronami otrzymujemy:

$$(1+fA+gA)[A(1-fB+gA)(1-fB-gB)-B(1+fA-gB)(1-fB-gB)+$$
$$+B(1-fB+gA)(1-fB-gB)-A(1+fA-gB(1-fB-gB)]=0.$$

Stąd, po wymnożeniu i dodaniu wyrazów podobnych w nawiasie kwadratowym:

$$-2fAB+gA^2-fA^2+gB^2-fB^2+2gAB=0$$
$$2AB(g-f)+B^2(g-f)+A^2(g-f)=0$$
$$(g-f)(A^2+2AB+B^2)=0$$
$$g=f.$$

Oznacza, to że ekstremum będziemy poszukiwać w punktach postaci (f,f). Wstawiając za g do równania (7) f dostajemy:

$$A(1+fA-fB)(1-fB+fA)(1-fB-fB)+A(1+fA+fA)(1-fB+fA)(1-fB-fB)-$$
$$-B(1+fA+fA)(1+fA-fB)(1-fB-fB)-B(1+fA+fA)(1+fA-fB)(1-fB+fA)=0.$$

Stąd

$$(1+fA-fB)[A(1+fA-fB)(1-2fB)+A(1+2fA)(1-2fB)-b(1+2fA)(1-2fB)-$$
$$B(1+2fA)(1+fA-fB)]=0.$$

Oznacza to, że
A(1+fA-fB)(1-2fB)+A(1+2fA)(1-2fB)-B(1+2fA)(1-2fB)-B(1+2fA)(1+fA-fB)=0.

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe:

$$f^2(-8A^2B+8AB^2)+(3A^2+3B^2-10AB)f+2A-2B=0 \qquad (9)$$
$$\Delta=9A^4+9B^4-10A^2B^2+4AB^3+4A^3B.$$

Zauważmy, że $\Delta=(3A^2-3B^2)^2+8A^2B+4AB^3+4A^3B > 0$
oraz $-8A^2B+8AB^2 < 0$.

Wtedy

$$f_1=\frac{-(3A^2+3B^2-10AB)-\sqrt{9A^4+9B^4-10A^2B^2+4AB^3+4A^3B}}{2(-8A^2B+8AB^2)}$$

$$f_2=\frac{-(3A^2+3B^2-10AB)+\sqrt{9A^4+9B^4-10A^2B^2+4AB^3+4A^3B}}{2(-8A^2B+8AB^2)}$$

Pokażemy jeszcze, że

$$3A^2+3B^2-10AB\le\sqrt{9A^4+9B^4-10A^2B^2+4AB^3+4A^3B}\,. \qquad (10)$$

Rzeczywiście, podnosząc obie strony nierówności (10) do kwadratu otrzymujemy:

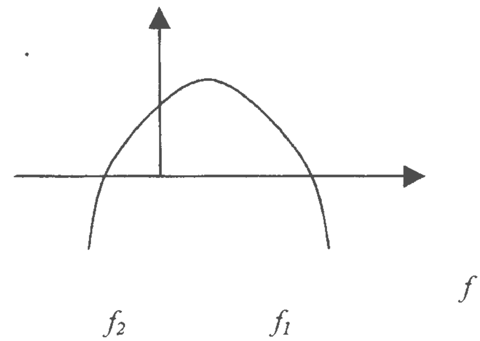
$$9A^4+9B^4+100A^2B^2+18A^2B^2-60A^3B-60AB^3\le 9A^4+9B^4+10A^2B^2+4A^3B+4AB^3.$$

Stąd $128A^2B^2\le 64A^3B+64AB^3$
$2AB\le A^2+B^2$
i $(A-B)^2\ge 0$ co jest oczywiste.

Nierówność (10) oznacza, że $f_2\le 0$, co z punktu widzenia naszego problemu nie jest interesujące. Warunek f = g oznacza również, że

$$\frac{\partial F}{\partial f}\equiv\frac{\partial F}{\partial g}\equiv\frac{dF(f,f)}{df}.$$

Narysujmy wykres $\dfrac{dF}{df}$



Łatwo jest zauważyć, że $\frac{dF}{df} > 0\, dla\ f < f_1\ i\ \frac{dF}{df} < 0\ dla\ f > f_1$ w punkcie f_1 funkcja F(f,f) osiąga ekstremum, czyli w punkcie (f_1,f_1). Oznacza to, że funkcja F(f,g) osiąga ekstremum. Twierdzenie zostało udowodnione.

Przykład 4. $A_1 = A_2 = 2$ i $B_1 = B_2 = 1$.

Podstawiając do wzoru (6) otrzymujemy (f*,f*)=(0,23;0,23). Przykład ten był rozpatrywany w pracach Ralpha Vince'a. Autor otrzymał dokładnie taki sam wynik. W tym szczególnym przypadku można sobie poradzić również w inny sposób.

Proste obliczenia komputerowe pokazują, że w tym przypadku funkcja posiada dokładnie jedno maksimum. Warunek $A_1 = A_2$ i $B_1 = B_2$ implikuje, że F(f,g) = F(g,f).

Oznacza to, że wykres tej funkcji (pewna powierzchnia w R^3) jest symetryczny do siebie względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny OFG i zawierającej prostą g = f. A skoro tak, to ekstremum musi istnieć w punkcie postaci (f,f)

$F(f,g) = (!+4f)(1+f)^2(1-2f).$

Stąd $F(f,f) = -8f^4-14f^3-3f^2+4f+1.$

Oznaczając prawą stronę ostatniej równości przez $F_1(f)$ otrzymujemy

$F_1(f) = -8f^4-14f^3-3f^2+4f+1.$

Wtedy $F'_1(f) = -32f^3-42f^2-6f+4.$

Przyrównując pochodną do zera i rozwiązując równanie dostajemy:

$2(f+1)(-16f^2-5f+2)=0.$

Równanie kwadratowe $-16f^2-5f+2=0$ posiada dwa pierwiastki $f_1 \approx 0{,}23$ i f_2 takie, że $-1 < f_2 < 0$. Tak więc miejscem podejrzanym o ekstremum jest punkt f_1. Ponadto dla f bliskkich f_1 mamy:

$F'_1(f) > 0$ dla $f < f_1$ i $F'_1(f) < 0$ dla $f > f_1$.

Stąd funkcja $F_1(f)$ osiąga w f_1 maksimum. Oznacza to, że funkcja $F(f,g)$ osiąga w punkcie (0,23;0,23) swoje maksimum lokalne.

Literatura

[1] Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and Its applications.* Wiley&Sons.
[2] Gersternkorn, T. Śródka, T. (1983) *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.* PWN.
[3] Vince, R. (1990) *Portfolio Management Formulas*. Wiley&Sons.
[4] Vince, R. (1992) *The Mathematics of Money Management*. Wiley&Sons.
[5] Vince, R. (1995) *The New Money Management*. Wiley&Sons.
[6] Zaremba, L. *Matematyczny model alokacji kapitału w długookresowym horyzoncie*. Preprint.

WYŻSZA SZKOŁA INFORMATYKI STOSOWANEJ I ZARZĄDZANIA

pod auspicjami
Polskiej Akademii Nauk

ZAŁOŻYCIELEM
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
jest
FUNDACJA KRZEWIENIA NAUK SYSTEMOWYCH
powołana z inicjatywy
Prezesa
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FUNDATOREM
Fundacji Krzewienia Nauk Systemowych
jest
POLSKA AKADEMIA NAUK

ORGANEM
sprawującym nadzór jest
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
prowadzi studia wyższe na kierunkach:
INFORMATYKA
ZARZĄDZANIE I MARKETING

SIEDZIBA
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-54-5