Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
70-lecia urodzin

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

pod redakcją
Jakuba Gutenbauma

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

AUTOMATYKA
STEROWANIE
ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
70-lecia urodzin

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

pod redakcją
Jakuba Gutenbauma

Warszawa 2002

Książka jubileuszowa z okazji
70-lecia urodzin
Profesora Kazimierza MAŃCZAKA

Redaktor
prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

ISBN 83-85847-78-2

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6 01-447 Warszawa
http://www.ibspan.waw.pl

Opracowanie składopisu: Anna Gostyńska, Jadwiga Hartman

Druk: KOMO-GRAF, Warszawa
nakład 200 egz., 34 ark. wyd., 31 ark. druk.

BAYESOWSKA WERYFIKACJA HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH PRZY NIEPRECYZYJNYCH DANYCH EKSPERYMENTALNYCH

Olgierd Hryniewicz

Instytut Badań Systemowych PAN

Abstract: *In the presence of a prior information about the probability distribution that governs the random output of a statistical experiment we use the Bayes decisions methodology for verification of certain statistical hypotheses. In the case of precise statistical data or imprecise data described by a fuzzy information system the existing methodology is sufficient for testing of statistical hypotheses. In this paper we propose a new procedure that can be applied for the general fuzzy statistical data. Concepts known from of the possibility theory, such as possibility and necessity indices, have been used in order to evaluate the correctness of Bayes decisions for imprecisely (e.g. linguistically) defined statistical data.*

Keywords: *statistical tests, Bayes decisions, fuzzy statistical data, possibility indices.*

1. Wprowadzenie

Weryfikacja hipotez jest jednym z podstawowych zadań statystyki. W zastosowaniach praktycznych sformułowane przez nas hipotezy dotyczą zazwyczaj stanów, w jakich znajdują się rozpatrywane (obserwowane) obiekty. Przyjmuje się podstawowe założenie, że stany te są równoważne podzbiorom zbioru możliwych wartości parametrów rozkładu prawdopodobieństwa opisującego wynik obserwacji rozpatrywanego obiektu. Formalnie rzecz ujmując zakładamy, że dana jest przestrzeń statystyczna (Ω,F,P), gdzie $P=\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ jest indeksowaną parametrem θ rodziną rozkładów prawdopodobieństwa opisującą wynik eksperymentu, a Θ jest pewną przestrzenią parametrów. Stwierdzenie (hipotezę statystyczną) $\theta\in\Theta_1$ ($\Theta_1\subset\Theta$) będziemy nazywać hipotezą zerową i będziemy zapisywać $H:\theta\in\Theta_1$, zaś stwierdzenie (hipotezę) $\theta\in\Theta_2$ $(\Theta_2\subset\Theta,\Theta_1\cap\Theta_2=\varnothing)$

będziemy nazywać hipotezą alternatywną (do hipotezy *H*) i będziemy zapisywać $K: \theta \in \Theta_2$.

Do weryfikacji tak postawionych hipotez wykorzystujemy procedurę postępowania zwaną testem statystycznym. Testem statystycznym nazywamy taką procedurę, która możliwym realizacjom próby losowej $(X_1, X_2, ..., X_n)$ określonej na przestrzeni statystycznej (Ω, F, P) przypisuje decyzje odrzucenia (albo przyjęcia) weryfikowanej hipotezy. W celu zbudowania testu statystycznego konstruujemy dwa dopełniające się zbiory A i K ($A \cap K = \varnothing$) oraz pewną statystykę $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ zwaną statystyką testową. Decyzje podejmujemy w następujący sposób: jeżeli $T = T(X_1, X_2, ..., X_n) \in K$, to hipotezę zerową H odrzucamy na rzecz hipotezy alternatywnej K, gdy zaś spełniony jest warunek $T = T(X_1, X_2, ..., X_n) \in A$, to hipotezę zerową H przyjmujemy. Zbiór K nazywamy zbiorem krytycznym (zbiorem odrzuceń hipotezy *H*), a zbiór A nazywamy zbiorem przyjęć. Jeżeli weryfikowanej hipotezy nie odrzucamy, to bezpieczniej jest powiedzieć, że nie ma podstaw do jej odrzucenia, niż mówić o jej przyjęciu.

Z weryfikacją hipotez statystycznych związane jest występowanie błędnych decyzji. O błędnej decyzji statystycznej mówimy wówczas gdy odrzucamy weryfikowaną hipotezę *H*, gdy jest ona prawdziwa (jest to tzw. błąd pierwszego rodzaju) lub gdy przyjmujemy weryfikowaną hipotezę *H*, gdy jest ona fałszywa (jest to tzw. błąd drugiego rodzaju). Błędne decyzje statystyczne podejmowane są z określonymi prawdopodobieństwami nazywanymi, odpowiednio, prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju oraz prawdopodobieństwem błędu drugiego rodzaju. Przy ustalonej liczności próby losowej nie jest możliwe jednoczesne minimalizowanie obu tych prawdopodobieństw. Zwykle ustalamy dopuszczalną wielkość prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju, którą nazywamy poziomem istotności β. Wśród testów spełniających wymaganie określone poziomem istotności poszukujemy zazwyczaj takiego, by zminimalizowane zostało prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju. Bliższe informacje o klasycznych metodach weryfikacji hipotez statystycznych można znaleźć w monografii (Lehman 1968).

Do zagadnienia weryfikacji hipotez statystycznych można również podejść z innej strony. Łatwo zauważyć, że każda decyzja dotycząca problemu rzeczywistego związana jest z możliwością poniesienia ewentualnych strat w przypadku gdy decyzja ta jest decyzją błędną. Wysokość takich potencjalnych strat powinna więc wpływać na sposób podejmowania decyzji. Ponadto, w wielu praktycznych przypadkach istnieje uzyskana wcześniej (a priori) wiedza o możliwych wartościach parametrów rozkładów prawdopodobieństwa opisujących wyniki obserwacji. Jeżeli taką wiedzę przedstawiamy przy pomocy pewnego rozkładu prawdopodobieństwa określonego na przestrzeni parametrów Θ, to możemy ją wykorzystać w procesie podejmowania decyzji stosując znane z rachunku prawdopodobieństwa twierdzenie Bayesa. Metody podejmowania decyzji statystycznych z wykorzystaniem informacji a priori oraz uwzględniające koszty konsekwencji podejmowanych decyzji nazywane są metodami bayesowskimi i od wielu lat są wykorzystywane w praktyce, w tym również do weryfikacji hipotez statystycznych. Podstawy bayesowskich metod weryfikacji hipotez statystycznych zostaną przedstawione w punkcie drugim niniejszej pracy. Znacznie szerszy opis problemów związanych z bayesowskimi metodami podejmowania decyzji znajduje się, na przykład, w znanej monografii DeGroota (1981).

W praktycznie wszystkich metodach podejmowania decyzji, zarówno klasycznych jak i bayesowskich, zakłada się, że wyniki eksperymentu statystycznego (obserwacje) znane są w sposób dokładny. Założenie to zwykle jest spełnione, gdy mamy do czynienia z obiektywnymi wynikami pomiarów. Sytuacja staje się jednak bardziej skomplikowana, gdy źródłem wyniku pomiaru jest człowiek. Dotyczy to zwłaszcza sytuacji, gdy mamy do czynienia z opisem ludzkich percepcji wyrażanych werbalnie w sposób nieprecyzyjny. W takich przypadkach dane statystyczne mają często nieprecyzyjną postać w rodzaju „mój roczny dochód wynosi około 50 000 złotych" lub „około pięciu klientów, którzy odwiedzili wczoraj naszą firmę, sprawiało wrażenie zadowolonych z przedstawionej im oferty". Nietrudno zauważyć, że aby wykorzystać dane tego typu do podejmowania decyzji statystycznych w tradycyjny sposób należy poczynić wiele dodatkowych założeń. Jednym z możliwych sposobów wyjścia z tej trudnej sytuacji jest przyjęcie formalizmu teorii zbiorów rozmytych do opisu nieprecyzyjnych danych statystycznych. Istnieje wiele publikacji na ten temat, zwłaszcza dotyczących uogólnień klasycznych metod weryfikacji hipotez statystycznych. Najnowsze rezultaty z tej dziedziny opisane są m.in. w pracach Grzegorzewskiego (2000) oraz Grzegorzewskiego i Hryniewicza (2001). Wykorzystaniu teorii zbiorów rozmytych do zagadnienia bayesowskiej weryfikacji hipotez statystycznych poświęconych jest znacznie mniej prac. Na uwagę zasługują tu prace Casals i in. (1986a, 1986b), a także praca Gil (1988). Najważniejsze rezultaty przedstawione w ostatniej z wyżej wymienionych prac zostaną przedstawione w trzecim punkcie niniejszej pracy.

Jest rzeczą raczej oczywistą, że uwzględnienie braku precyzji w opisie rezultatów eksperymentu statystycznego prowadzi do nieprecyzyjnych ocen konsekwencji podejmowanych decyzji statystycznych. Proponowane w literaturze przedmiotu bayesowskie metody weryfikacji hipotez statystycznych z wykorzystaniem danych tego rodzaju nie pozwalają decydentowi, by w sposób świadomy uwzględnił fakt braku precyzyjnych informacji w procesie podejmowania decyzji. Opisane w literaturze procedury nie pozwalają na określenie stopnia możliwości lub pewności tego, że podjęta decyzja jest decyzją lepszą. Rozwiązania tego problemu można poszukiwać wykorzystując wyniki uzyskane w szybko rozwijającej się w ostatnich latach dziedzinie, jaką jest teoria możliwości (possibility theory) Zadeha (1978). Podejście do zadania podejmowania decyzji, które wykorzystuje aparat teorii możliwości nazywane jest podejściem posybilistycznym. Próba wyko-rzystania tego właśnie podejścia do rozwiązania problemu bayesowskiej weryfikacji hipotez statystycznych jest celem niniejszej pracy. W punkcie czwartym zaproponowany zostanie alternatywny sposób wyboru decyzji statystycznych wykorzystujący znane z teorii możliwości wskaźniki możliwości dominacji (*PD*, *PSD*) oraz konieczności dominacji (*ND*, *NSD*). Zastosowanie tych wskaźników pozwala na podejmowanie decyzji w sposób znacznie bardziej elastyczny, umożliwiając decydentowi uwzględnienie różnych konsekwencji braku precyzji posiadanych przez niego danych statystycznych.

2. Bayesowskie metody weryfikacji hipotez statystycznych

Bayesowskie metody weryfikacji hipotez statystycznych są szczególnym przypadkiem szerszego zagadnienia jakim jest bayesowskie podejmowanie decyzji. W ogólnym przypadku rozpatrujemy doświadczenie, którego wynik opisany jest zmienną losową X o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym na przestrzeni Ω i zależnym od parametru $\theta \in \Theta$, gdzie Θ jest przestrzenią możliwych wartości tego parametru. Niech $\boldsymbol{D}$ będzie przestrzenią możliwych decyzji d, które może podjąć decydent, zaś $L(\theta,d)$ stratą związaną z podjęciem decyzji d gdy nieznany parametr rozkładu prawdopodobieństwa opisującego wynik eksperymentu przyjmuje wartość θ. W ogólnym przypadku powyższą stratę należy traktować jako wziętą ze znakiem przeciwnym wartość funkcji użyteczności, której argumentem jest nagroda $\rho(\theta,d)$ związana z podjęciem decyzji d, gdy nieznany parametr rozkładu prawdopodobieństwa opisującego wynik eksperymentu przyjmuje wartość θ. Przyjmijmy teraz, że decydentowi znana jest postać warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa $F(x_1,x_2,\ldots,x_n \mid \theta)$ o gęstości $f(x_1,x_2,\ldots,x_n \mid \theta)$ opisującego zaobserwowane wartości próby losowej $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ pod warunkiem, że nieznany parametr tego rozkładu przyjmuje wartość θ. Ponadto przyjmijmy, że istniejąca informacja o możliwych wartościach parametru θ przedstawiona jest w postaci rozkładu a priori o gęstości $\pi(\theta)$. Decydent musi określić pewną funkcję decyzyjną $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, na podstawie której będzie wybierał właściwą decyzję d, gdy wynik obserwacji próby losowej będzie wynosił $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dla dowolnej gęstości a priori $\pi(\theta)$ oraz dowolnej funkcji decyzyjnej $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określa się ryzyko:

$$\rho(\delta) = \int_{\Theta}\int_{X} L(\theta, \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)) dF(x \mid \theta) \pi(\theta) d\theta \tag{1}$$

rozumiane jako oczekiwana strata. Niech Δ oznacza przestrzeń możliwych funkcji decyzyjnych, a $\delta^* \in \Delta$ będzie funkcją decyzyjną, taką że:

$$\rho(\delta^*) = \inf_{\delta \in \Delta} \rho(\delta) \tag{2}$$

Funkcję δ^* nazywamy bayesowską funkcją decyzyjną, a wielkość $\rho^* = \rho(\delta^*)$ nazywamy ryzykiem bayesowskim. Optymalnymi bayesowskimi decyzjami statystycznymi nazywamy te decyzje, które minimalizują ryzyko bayesowskie.

Bayesowska weryfikacja hipotez statystycznych jest więc specjalnym przypadkiem poszukiwania optymalnych bayesowskich decyzji statystycznych, gdy występują dwie możliwe decyzje: przyjąć bądź odrzucić weryfikowaną hipotezę zerową. Załóżmy teraz, że funkcja decyzyjna $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przyjmuje wartość 0, gdy przyjmujemy hipotezę zerową, zaś wartość 1, gdy ją odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej. W takim przypadku funkcję strat określa się zazwyczaj w następujący sposób:

$$L(\theta, 0) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \theta \in \Theta_0 \\ a(\theta) > 0 & \text{gdy } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$L(\theta, 1) = \begin{cases} b(\theta) > 0 & \text{gdy } \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \tag{4}$$

Oznaczmy przez $g(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ warunkową gęstość opisującą posiadaną informację o możliwych wartościach parametru θ pod warunkiem zaobserwowania w próbie losowej wartości $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Rozkład prawdopodobieństwa $g(\theta \mid \cdot)$ nazywany jest rozkładem a posteriori i wyznacza się go korzystając z twierdzenia Bayesa w następujący sposób:

$$g(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)\pi(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid u)\pi(u)du} \quad (5)$$

Można pokazać, że optymalna bayesowska decyzja statystyczna ma w tym przypadku postać:

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \int\limits_{\Theta_0} b(\theta)dG(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) < \int\limits_{\Theta_1} a(\theta)dG(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $G(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu a posteriori danego przy pomocy zależności (5).

Łatwo zauważyć, że podejmując decyzje na podstawie powyższego warunku porównujemy oczekiwane straty (ryzyka) i wybieramy rozwiązanie, dla którego straty te są mniejsze.

3. Bayesowskie metody weryfikacji hipotez statystycznych dla danych nieprecyzyjnych

Omówione w poprzednim punkcie metody weryfikacji hipotez statystycznych zawodzą, gdy dane statystyczne opisane są w sposób nieprecyzyjny. Na przykład, przy pomocy nieprecyzyjnych opisów typu „około 5", „znacznie więcej niż 10" lub „mniej więcej pomiędzy 3 i 4". Należy tu podkreślić, że brak precyzji powyższych stwierdzeń nie ma charakteru losowego. Dotyczy on bowiem wielkości *już zaobserwowanych*, a nie wielkości, które *mogą być zaobserwowane* w wyniku przeprowadzenia pewnego eksperymentu. Źródłem nieprecyzyjnych informacji są zazwyczaj *opinie ludzi*, którzy w ten nieprecyzyjny sposób wyrażają *swoje wyobrażenia* (*percepcje*) o obserwowanych wielkościach. Aparatem formalnym, który może być wykorzystany do opisu takiego braku precyzji jest wprowadzona przez Zadeha (1965) *teoria zbiorów rozmytych*. Mówimy wówczas, że obserwujemy *wielkości (zdarzenia) rozmyte*. W pewnych przypadkach, gdy mamy do czynienia z nieprecyzyjnie opisanymi danymi o charakterze losowym, możemy mówić o obserwacji *losowych zdarzeń rozmytych*.

Rozmyte zdarzenie $\tilde{x}$ na przestrzeni R zdefiniujemy przy pomocy *funkcji przynależności* $\mu(x)$, która każdemu elementowi x przestrzeni R przypisuje liczbę rzeczywistą z przedziału [0,1], przy czym wartość $\mu_{\tilde{x}}(x)$ opisuje *stopień przynależności* wartości x do rozmytego zdarzenia $\tilde{x}$. Jeżeli obserwujemy rozmyte zdarzenia losowe, to możliwe są różne sposoby opisu tego zjawiska, przy czym pierwszy z nich został zaproponowany w pracy Zadeha (1968). Propozycję Zadeha rozwinęli Tanaka i in. (1979) wprowadzając pojęcie *rozmytego systemu informacyjnego*.

Rozmytym systemem informacyjnym $\tilde{X}$ związanym z przestrzenią statystyczną (X, F, P) będziemy nazywać ortogonalny podział przestrzeni X przy pomocy określonych na niej zdarzeń rozmytych $\tilde{x}$, taki że $\sum_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \mu_{\tilde{x}}(x) = 1$, dla każdego $x \in X$. Dla tak zdefiniowanego systemu informacyjnego wartość funkcji przynależności $\mu_{\tilde{x}}(x)$ może być interpretowana jako „prawdopodobieństwo" zaobserwowania zdarzenia rozmytego $\tilde{x}$, gdy rzeczywista (nierozmyta) wartość obserwowanej wielkości wynosi x.

Dla rozmytego systemu informacyjnego możemy, zgodnie z Zadehem (1968), zdefiniować różne rozkłady prawdopodobieństwa. Na przykład, *warunkowe prawdopodobieństwo zaobserwowania zdarzenia rozmytego* $\tilde{x}$, przy danym warunku $\theta \in \Theta$ na wartość parametru rozkładu prawdopodobieństwa nierozmytej zmiennej losowej X wynosi:

$$P_\theta(\tilde{x}) = \int_X \mu_{\tilde{x}}(x) dP_\theta(x), \quad \tilde{x} \in \tilde{X} \tag{7}$$

gdzie $P_\theta(x)$ jest dystrybuantą nierozmytej zmiennej losowej X. Z kolei, gdy znany jest rozkład a priori $\pi(\theta)$ opisujący możliwe wartości nieznanego parametru θ, to *brzegowy rozkład prawdopodobieństwa* na przestrzeni $\tilde{X}$ określony jest przy pomocy wyrażenia:

$$P(\tilde{x}) = \int_\Theta \int_{\tilde{X}} \mu_{\tilde{x}}(x) dP_\theta(x) \pi(\theta) d\theta, \quad \tilde{x} \in \tilde{X} \tag{8}$$

Rozkład a posteriori parametru θ, przy danej rozmytej informacji $\tilde{x}$ wyznaczamy z zależności:

$$g(\theta \mid \tilde{x}) = \frac{\pi(\theta) P_\theta(\tilde{x})}{P(\tilde{x})} \tag{9}$$

Dla tak określonych rozkładów prawdopodobieństwa w pracach Casals i in. (1986a, 1986b) oraz w pracy Gil (1988) rozpatrzono problem weryfikacji hipotez statystycznych w przypadku obserwacji danych rozmytych. W pracach tych założono, że obserwujemy próbę losową, której realizacje $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ są zdarzeniami rozmytymi, przy czym $\tilde{x}_i \in \tilde{X}$, $i = 1, \ldots, n$. W przypadku rozpatrywanego w poprzednim punkcie problemu weryfikacji hipotez statystycznych o wartościach parametru θ, optymalna bayesowska decyzja statystyczna będzie miała postać:

$$\delta(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)=\begin{cases}1 & \text{gdy } \int\limits_{\Theta_0} b(\theta)dG(\theta\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)<\int\limits_{\Theta_1} a(\theta)dG(\theta\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases} \tag{10}$$

gdzie $G(\cdot)$ jest dystrybuantą rozkładu a posteriori danego przy pomocy zależności (9).

Zastosowanie rozmytego systemu informacyjnego w praktyce napotyka, jak zauważyli Grzegorzewski i Hryniewicz (1997), na poważne trudności. Po pierwsze, wszystkie możliwe zdarzenia rozmyte tworzące rozmyty system informacyjny muszą być zdefiniowane *przed dokonaniem obserwacji*. Po drugie, w przypadku obserwacji wielu zdarzeń rozmytych (rozmytej próby losowej) wszystkie te zdarzenia muszą być opisane z wykorzystaniem *tego samego* zbioru zdarzeń rozmytych. Biorąc pod uwagę to, że zdarzenia rozmyte powstają jako rezultat nieprecyzyjnej ludzkiej percepcji zdarzeń nierozmytych, przyjęcie tego założenia jest równoznaczne z założeniem, że cała analizowana próba losowa stanowi wynik obserwacji *tego samego obserwatora*. W wielu przypadkach spotykanych w praktyce założenie to mocno ogranicza możliwość zastosowania modelu rozmytego systemu informacyjnego w praktyce; zarówno w ujęciu klasycznym jak i ujęciu bayesowskim. Należy jednak równocześnie wskazać na dużą zaletę przedstawionego powyżej podejścia. Wyznaczone z wykorzystaniem formalizmu rozmytego systemu informacyjnego charakterystyki takie jak różnego rodzaju prawdopodobieństwa, wartości funkcji gęstości, ryzyka (oczekiwane straty) itp. opisane są *liczbami rzeczywistymi*. Można je więc bez problemu porównywać i na podstawie tych porównań wyciągać jednoznaczne wnioski, jak np. wnioski dotyczące przyjęcia lub odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

4. Posybilistyczne podejście do bayesowskiej weryfikacji hipotez statystycznych

Rozpatrzmy sytuację, gdy obserwowane rozmyte zdarzenia losowe opisywane są przy pomocy zmiennych losowych *nie tworzących informacyjnego systemu rozmytego*. W takim przypadku korzystniejsza jest interpretacja uzyskanych wyników z wykorzystaniem definicji zmiennej losowej wprowadzonej przez Kwakernaaka (1978, 1979) jako odwzorowanie przestrzeni zdarzeń elementarnych na przestrzeń zdarzeń rozmytych. W przeciwieństwie do modelu rozpatrywanego w poprzednim punkcie realizacje rozmytej zmiennej losowej w ujęciu Kwakernaaka mogą być dowolnymi liczbami rozmytymi jednoznacznie identyfikowanymi przez swoje α - cięcia określone zależnością:

$$\tilde{x}^{\alpha} = \{x \in R : \mu_{\tilde{x}}(x) \geq A\} \tag{11}$$

Dowolne α - cięcie liczby rozmytej $\tilde{x}$ jest wobec tego przedziałem domkniętym $\tilde{x}^{\alpha} = [x_L^{\alpha}, x_U^{\alpha}]$, gdzie:

$$x_L^{\alpha} = \inf\{x \in R : \mu_{\tilde{x}}(x) \geq \alpha\} \tag{12}$$

$$x_U^{\alpha} = \sup\{x \in R : \mu_{\tilde{x}}(x) \geq \alpha\} \tag{13}$$

Korzystając ze znanego, patrz np. (Kacprzyk, 1986), twierdzenia o reprezentacji zbiorów rozmytych przy pomocy α - cięć możemy funkcję przynależności $\mu_{\tilde{x}}(x)$ przedstawić w postaci:

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \sup\{\alpha I_{\tilde{x}^{\alpha}}(x) : \alpha \in [0,1]\} \tag{14}$$

gdzie $I_{\tilde{x}^{\alpha}}(x)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $\tilde{x}^{\alpha}$.

Odwzorowanie $\tilde{X} : \Omega \to FN(R)$, gdzie Ω jest przestrzenią nierozmytych zdarzeń elementarnych, a $FN(R)$ jest przestrzenią wszystkich liczb rozmytych, nazywamy rozmytą zmienną losową gdy spełnione są dwa warunki:

(a) $\{X^{\alpha}(\omega) : \alpha \in [0,1]\}$ jest dla każdego $\omega \in \Omega$ reprezentacją $X(\omega)$ w postaci odpowiedniego zbioru.

(b) Dla każdego $\alpha \in [0,1]$ zarówno $X_L^{\alpha} = X_L^{\alpha}(\omega) = \inf X^{\alpha}(\omega)$ jak i $X_U^{\alpha} = X_U^{\alpha}(\omega) = \sup X^{\alpha}(\omega)$ są zwykłymi (nierozmytymi) zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni (Ω, F, P).

Przyjmując powyższą definicję rozmytej zmiennej losowej możemy uważać, że jest ona pewną nieprecyzyjną (rozmytą) percepcją nieznanej (nieobserwowanej) zmiennej losowej $V : \Omega \to R$. W podobny sposób można określić dowolną n - wymiarową rozmytą próbę losową $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ jako nieprecyzyjną (rozmytą) percepcję bezpośrednio nieobserwowanej próby losowej $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Dla zdefiniowanej w powyższy sposób rozmytej próby losowej określmy teraz rozmytą wersję reguły decyzyjnej (6). Możemy go w rozpatrywanym teraz przypadku zapisać następująco:

$$\delta(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)=\begin{cases}1 & \text{gdy} \int\limits_{\Theta_0} b(\theta)g(\theta\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)d\theta < \int\limits_{\Theta_1} a(\theta)g(\theta\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)d\theta \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases} \qquad (15)$$

Jak nietrudno zauważyć, warunek (15) sprowadza się do porównania dwu liczb rozmytych wyznaczonych z zależności:

$$\tilde{A}_0 = \int\limits_{\Theta_0} a(\theta)g(\theta\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)d\theta \qquad (16)$$

$$\tilde{A}_1 = \int\limits_{\Theta_1} b(\theta)g(\theta\,|\,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)d\theta \qquad (17)$$

Niestety, nie istnieje metoda pozwalająca na porównywanie liczb rozmytych w sposób jednoznaczny. W niniejszej pracy wykorzystamy do tego celu *podejście posybilistyczne* zaproponowane w pracy Dubois i Prade (1983). W pracy tej zaproponowane zostały cztery wskaźniki pozwalające porównywać ze sobą dwie liczby rozmyte $\tilde{A}$ oraz $\tilde{B}$.

Wskaźnik *możliwości dominacji PD* definiowany jest zależnością:

$$PD = Poss\left(\tilde{A} \geq \tilde{B}\right) = \sup_{x,y:x\geq y} \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{AB}(y)\right\} \qquad (18)$$

Wskaźnik ten określa stopień możliwości, że rozmyta liczba $\tilde{A}$ jest nie mniejsza od rozmytej liczby $\tilde{B}$. W rozpatrywanym przez nas przypadku porównywania liczb rozmytych $\tilde{A}_1$ oraz $\tilde{A}_0$ wskaźnik ten oznacza stopień możliwości, że decyzja o odrzuceniu weryfikowanej hipotezy statystycznej nie jest gorsza od decyzji o jej przyjęciu.

Z kolei, wskaźnik *możliwości ścisłej dominacji PSD* definiowany jest następująco:

$$PSD = Poss\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = \sup_{x} \inf_{y:y\geq x} \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{B}}(y)\right\} \qquad (19)$$

Wskaźnik ten określa stopień możliwości, że rozmyta liczba $\tilde{A}$ jest większa od rozmytej liczby $\tilde{B}$. W rozpatrywanym przez nas przypadku porównywania liczb rozmytych $\tilde{A}_1$ oraz $\tilde{A}_0$ wskaźnik ten oznacza stopień możliwości, że decyzja o odrzuceniu weryfikowanej hipotezy statystycznej jest lepsza od decyzji o jej przyjęciu.

Kolejne dwa wskaźniki pozwalają określić *miary konieczności* podjęcia odpowiednich decyzji. Wskaźnik *konieczności dominacji ND* definiowany jest następująco:

$$ND = Necc\left(\tilde{A} \geq \tilde{B}\right) = \inf_{x} \sup_{y:y \leq x} \max\left\{1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right\} \tag{20}$$

Wskaźnik ten określa stopień konieczności, że rozmyta liczba $\tilde{A}$ jest nie mniejsza od rozmytej liczby $\tilde{B}$. W rozpatrywanym przez nas przypadku porównywania liczb rozmytych $\tilde{A}_1$ oraz $\tilde{A}_0$ wskaźnik ten oznacza stopień konieczności, że decyzja o odrzuceniu weryfikowanej hipotezy statystycznej nie jest gorsza od decyzji o jej przyjęciu.

Z kolei, wskaźnik *konieczności ścisłej dominacji NSD* określony jest wzorem:

$$NSD = Ness\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = 1 - \sup_{x,y:x \leq y} \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right\} = 1 - Poss\left(\tilde{B} \geq \tilde{A}\right) \tag{21}$$

Wskaźnik ten określa stopień Konieczności, że rozmyta liczba $\tilde{A}$ jest większa od rozmytej liczby $\tilde{B}$. W rozpatrywanym przez nas przypadku porównywania liczb rozmytych $\tilde{A}_1$ oraz $\tilde{A}_0$ wskaźnik ten oznacza stopień konieczności, że decyzja o odrzuceniu weryfikowanej hipotezy statystycznej jest lepsza od decyzji o jej przyjęciu.

Wyznaczanie funkcji przynależności liczb rozmytych $\tilde{A}_0$ oraz $\tilde{A}_1$ jest w ogólnym przypadku zadaniem bardzo trudnym. Wykorzystamy do tego celu znaną z literatury, patrz Kacprzyk (1986), zasadę rozszerzenia Zadeha. Korzystając z tej zasady oraz z zależności (14) można dla dowolnego nierozmytego odwzorowania $f: X \to Y$ i dowolnego zbioru rozmytego $\tilde{A}$ znaleźć zbiór rozmyty $f\left(\tilde{A}\right)$ określony funkcją przynależności:

$$\mu_{f(\tilde{x})}(x) = \sup\left\{\alpha I_{f\left(\tilde{x}^{\alpha}\right)}(x) : \alpha \in [0,1]\right\} \tag{22}$$

W rozpatrywanym przez nas przypadku, dla każdej wartości $\alpha \in [0,1]$ należy wyznaczyć α - cięcia $\tilde{A}_0{}^{\alpha} = \left[A_{0,L}^{\alpha}, A_{0,U}^{\alpha}\right]$ oraz $\tilde{A}_1{}^{\alpha} = \left[A_{1,L}^{\alpha}, A_{1,U}^{\alpha}\right]$, gdzie:

$$A_{0,L}^{\alpha} = \inf_{x_i \in \left[x_{i,L}^{\alpha}, x_{i,U}^{\alpha}\right] i=1,\ldots,n} \int_{\Theta_0} a(\theta) f(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) d\theta \tag{23}$$

$$A_{0,U}^{\alpha} = \sup_{x_i \in \left[x_{i,L}^{\alpha}, x_{i,U}^{\alpha}\right] i=1,\ldots,n} \int_{\Theta_0} a(\theta) f(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) d\theta \tag{24}$$

$$A_{1,L}^{\alpha} = \inf_{x_i \in \left[x_{i,L}^{\alpha}, x_{i,U}^{\alpha}\right] i=1,\ldots,n} \int_{\Theta_1} b(\theta) f(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) d\theta \tag{25}$$

$$A_{1,U}^{\alpha} = \sup_{x_i \in \left[x_{i,L}^{\alpha}, x_{i,U}^{\alpha}\right] i=1,\dots,n} \int_{\Theta_1} b(\theta) f(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta \tag{26}$$

Obliczenia wg wzorów (23) - (26) upraszczają się jeśli dla pewnych $x_i \in \left[x_{i,L}^{\alpha}, x_{i,U}^{\alpha}\right] i = 1, \dots, n$ funkcja $f(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest funkcją monotoniczną. W takich przypadkach parametry x_1, $x_2,\dots,x_n$ występujące w funkcjach podcałkowych możemy zastąpić odpowiednimi granicami α - cięć dla rozmytych obserwacji $\tilde{x}_i$.

Poważne uproszczenie obliczeń uzyskamy również, gdy zdecydujemy się podejmować decyzję dla z góry zadanego poziomu γ odpowiedniego wskaźnika możliwości lub konieczności. W takim przypadku konieczne jest sprawdzenie warunku (15) dla tylko jednego α - cięcia. Na przykład, dla ustalonego poziomu wskaźnika *NSD* równemu γ spełnienie warunku $Ness(\tilde{A}_1 > \tilde{A}_0) \geq \gamma$ sprowadza się do weryfikacji warunku $A_{1,L}^{1-\gamma} \geq A_{1,U}^{1-\gamma}$. Podobne zależności można uzyskać dla pozostałych rozpatrywanych w niniejszej pracy wskaźników możliwości i konieczności.

Interesującą interpretację rozpatrywanych powyżej wskaźników można uzyskać wykorzystując wyniki podane w pracy Cutell i Montero (1999). Oznaczmy przez μ_B miarę ogólnie rozumianej możliwości, że decyzja o odrzuceniu weryfikowanej hipotezy jest decyzją lepszą od decyzji o jej przyjęciu. Z kolei, przez μ_W oznaczmy miarę możliwości, że decyzja o odrzuceniu weryfikowanej hipotezy jest decyzją gorszą od decyzji o jej przyjęciu. W końcu, przez μ_I oznaczmy miarę możliwości, że posiadana informacja nie pozwala na rozstrzygnięcie, która z decyzji jest właściwa. Można łatwo pokazać, że spełnione są następujące warunki: μ_B = *NSD*, μ_W = 1-*PD*, oraz μ_I = *PD* – *NSD*. Jak widać, do wyznaczenia tych trzech miar konieczna jest znajomość wskaźników *PD* oraz *NSD*. W praktyce, możemy wykorzystać zależność (21) i bezpośrednio obliczać wartości tylko jednego z tych wskaźników.

5. Podsumowanie

Porównując algorytmy podejmowania decyzji bayesowskich dla różnej postaci danych z próby losowej można zauważyć, że wraz ze wzrostem stopnia ogólności postaci danych statystycznych następuje znaczny wzrost skomplikowania odpowiednich procedur numerycznych. W przypadku danych precyzyjnych do wyznaczenia odpowiedniej decyzji konieczne jest policzenie odpowiednich całek występujących we wzorze (6). Z kolei, gdy do opisu nieprecyzyjnych danych wykorzystujemy pojęcie rozmytego systemu informacyjnego konieczne jest policzenie całek podwójnych występujących (w sposób niejawny) we wzorze (10). Jeżeli jednak dane statystyczne opisywane są w sposób bardzo ogólny konieczne jest rozwiązanie skomplikowanego zadania optymalizacyjnego polegające go na poszukiwaniu infimum i supremum całek występujących we wzorze (15). Zaproponowane w niniejszej pracy podejście ma pewną podstawową zaletę. Pozwala mianowicie ocenić, na ile brak precyzji uzyskanych danych statystycznych wpływa na niepewność w podejmowaniu decyzji. W szczególności znajomość wskaźników *PD* oraz *NSD* pozwala w sposób wyraźny ocenić, czy posiadana informacja jest wystarczająca do podjęcia jednoznacznych decyzji.

Literatura

Casals M.R., Gil M.A., Gil P. (1986a) On the use of Zadeh's Probabilistic Definition for Testing Statistical Hypotheses from Fuzzy Information. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 175–190.

Casals M.R., Gil M.A., Gil P. (1986b) The Fuzzy Decision Problem: an Approach to the Problem of Testing Statistical Hypotheses with Fuzzy Information. *European Journal of Operational Research*, **27**, 3.

Cutell V., Montero J. (1999) An Extension of the Axioms of Utility Theory Based on Fuzzy Rationality Measures. *Preference and Decisions under Incomplete Knowledge*, J. Fodor, B. De Baets, P. Perny, eds. Physica-Verlag, Heidelberg, 33–50.

DeGroot M.H. (1981) *Optymalne decyzje statystyczne.* Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa.

Dubois D., Prade H. (1983) Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. *Information Sciences*, **30**, 184–244.

Gil M.A. (1988) Probabilistic-Possibilistic Approach to some Statistical Problems with Fuzzy Experimental Observations. *Combining Fuzzy Imprecision with Probabilistic Uncertainty in Decision Making*, J.Kacprzyk, M.Fedrizzi, eds. Springer-Verlag, Berlin, 286–306.

Grzegorzewski P. (2000) Testing statistical hypotheses with vague data. *Fuzzy Sets and Systems*, **112**, 501–510.

Grzegorzewski P., Hryniewicz O. (1997) Testing Statistical Hypotheses in Fuzzy Enviroment. *Mathware & Soft Computing*, **4**, 203–217.

Grzegorzewski P., Hryniewicz O. (2001) Soft Methods in Hypotheses Testing. *Soft computing for risk evaluation and management*,

D. Ruan, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, eds. Physica Verlag, Heidelberg and New York, 55–72.

Kacprzyk J. (1986) *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa.

Kwakernaak H. (1978) Fuzzy random variables - I. Definitions and theorems. *Information Sciences*, **15**, 1–29.

Kwakernaak H. (1979) Fuzzy random variables - II. Algorithms and examples for the discrete case. *Information Sciences*, **17**, 253–278.

Lehmann E.L. (1968) *Testowanie hipotez statystycznych*. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa.

Tanaka H., Okuda T., Asai K. (1979) Fuzzy Information and Decsision in Statistical Model. *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications*, N.M.Gupta, R.R.Yager, R.K.Ragade, eds. North-Holland, 303–320.

Zadeh L.A. (1965) Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 339–353.

Zadeh L.A. (1968) Probability Measures on Fuzzy Events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **23**, 421–427.

Zadeh L.A. (1978) Fuzzy Sets as a basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3–28.

ISBN 83-85847-78-2