Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
70-lecia urodzin

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

pod redakcją
Jakuba Gutenbauma

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
70-lecia urodzin

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

pod redakcją
Jakuba Gutenbauma

Warszawa 2002

Książka jubileuszowa z okazji
70-lecia urodzin
Profesora Kazimierza MAŃCZAKA

Redaktor
prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2002

ISBN 83-85847-78-2

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6 01-447 Warszawa
http://www.ibspan.waw.pl

Opracowanie składopisu: Anna Gostyńska, Jadwiga Hartman

Druk: KOMO-GRAF, Warszawa
nakład 200 egz., 34 ark. wyd., 31 ark. druk.

WYBRANE ZADANIA PARAMETRYCZNE STEROWANIA OPTYMALNEGO

Kazimierz Malanowski
Instytut Badań Systemowych PAN
ul.Newelska 6, 01-447 Warszawa, <kmalan@ibspan.waw.pl>

Abstract: *The basic stability and sensitivity results are presented for parametric optimal control problems, subject to mixed control-state constraints, for systems described by nonlinear ordinary differential equations. For the same class of optimal control problems, the rate of convergence of the Euler approximation is estimated.*

Keywords: *parametric optimal control, nonlinear ordinary differential equations, Lipschitz continuity and differentiability of the solutions, convergence of the Euler approximation.*

1. Wprowadzenie

W rzeczywistych zadaniach sterowania optymalnego informacja o danych układu obarczona jest zwykle błędem. Poza tym dane te mogą podlegać zmianom i zakłóceniom w procesie sterowania. Takie niedokładne dane procesu używane są w modelu matematycznym, na postawie którego wyznacza się sterowanie, wykorzystywane w układzie rzeczywistym. Wobec tego bardzo istotna jest informacja o zależności zachowania się układu od zmian danych. Zmiany zachowania mogą być mierzone zmianami, bądź to rozwiązań optymalnych, bądź wskaźnika jakości. Badaniem tej zależności zajmuje się *analiza stabilności i wrażliwości.* Zakłada się, że dane układu zależą od pewnego parametru (może to być parametr skalarny, wektorowy lub funkcyjny) i bada się własności rozwiązań (lub wskaźnika jakości) traktowanych jako funkcje parametru. Badania te mają charakter lokalny, dotyczą własności funkcji w otoczeniu nominalnej wartości parametru (punktu odniesienia). Przy tym *analiza stabilności* dotyczy ciągłości odpowiedniej funkcji, natomiast jej różniczkowalnością zajmuje się *analiza wrażliwości.* Metodologicznie, bliskie analizie stabilności są problemy zbieżności aproksymacji zadań sterowania optymalnego, ważne dla numerycznego rozwiązywania takich zadań.

Analiza stabilności i wrażliwości jest trudna z dwóch względów:

- *w ogólnym przypadku rozwiązanie optymalne nie jest jednoznaczne, a więc odpowiednie odwzorowanie jest wielowartościowe,*

- *występowanie ograniczń typu nierówności owego powoduje, że problem jest niegładki, nawet w przypadku dowolnie gładkich danych.*

Powyższe przyczyny nie pozwalają na użycie klasycznej analizy, a w szczególności klasycznego twierdzenia o funkcji uwikłanej, lecz wymagają aparatu analizy wielowartościowej i niegładkiej.

Analiza stabilności i wrażliwości dla zadań sterowania optymalnego rozwijała się intensywnie w latach 90-tych, zarówno dla układów o parametrach skupionych, jak i rozłożonych. Dla tych pierwszych, wyniki są dosyć kompletne, w przypadku, gdy nie występują czyste ograniczenia stanu. Obecność takich ograniczeń bardzo komplikuje analizę i szereg problemów pozostaje jeszcze bez odpowiedzi.

Niniejsze opracowanie dotyczy zadań sterowania optymalnego z ograniczeniami mieszanymi sterowanie–stan. Pokrótce przedstawiono podstawowe założenia i wyniki analizy stabilności i wrażliwości zawarte pracy (Malanowski 2001), a także rezultaty dotyczące zbieżności aproksymacji Eulera, uzyskane w pracy (Malanowski et al. 1998). Dowody nie są podane, jedynie odnośniki do odpowiednich pozycji literatury. Stosowane są, mniej lub bardziej standardowe oznaczenia. Oto niektóre z nich:
Duże litery oznaczają przestrzenie Banacha. Normę w przestrzeni X oznaczamy przez $\|\cdot\|_X$. $D_x f(x,y), D_y f(x,y), D_{xy} f^2, \ldots$ oznaczają pochodne Frécheta funkcji f względem odpowiednich argumentów. $I\!R^n$ oznacza n-wymiarową przestrzeń euklidesową, z iloczynem skalarnym $\langle x,y\rangle$ i normą $|x| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Indeks górny i oznacza i-tą składową wektora, lub i-ty wiersz macierzy. Przez $L^s(0,1;I\!R^n)$ oznaczamy przestrzeń

Banacha funkcji mierzalnych f, określonych na przedziale $[0, 1]$, z normą

$$\|f\|_s = \begin{cases} \left[\int_0^1 |f(t)|^s dt\right]^{\frac{1}{s}} & \text{dla } s \in [1, \infty), \\ \text{ess sup}_{[0,1]} |f(t)| & \text{dla } s = \infty. \end{cases}$$

$W^{1,s}(0, 1; I\!R^n)$ oznacza przestrzeń Sobolewa funkcji absolutnie ciągłych na $[0, 1]$, z normą

$$\|f\|_{1,s} = \begin{cases} \left[|f(0)|^s + \|\dot{f}\|^s\right]^{\frac{1}{s}} & \text{dla } s \in [1, \infty), \\ \max\{|f(0)|, \|\dot{f}\|_\infty\} & \text{dla } s = \infty. \end{cases}$$

2. Postawienie problemu i regularność ograniczeń

Będziemy rozpartywali zadania sterowania optymalnego, w których przedział sterowania jest ustalony i wynosi $[0, 1]$. Przez $H = I\!R^r \times L^\infty(0, 1; I\!R^r)$ oznaczamy przestrzeń parametrów funkcyjnych. Niech $G \subset I\!R^r$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym. Przez

$$\mathcal{G} := \{h \in H \mid h(0) \in G \text{ and } h(t) \in G \text{ dla prawie wszystkich } t \in [0, 1]\}$$

oznaczamy zbiór parametrów dopuszczalnych. Dla $h \in \mathcal{G}$ rozpatrujemy rodzinę następujących zadań sterowania optymalnego:

$(\mathrm{O})_h$ Znajdź $(x_h, u_h) \in X^\infty$ takie, że

$$\begin{aligned} F(x_h, u_h, h) = \min\{F(x, u, h) := &\int_0^1 \varphi(x(t), u(t), h(t))dt \\ &+\psi(x(0), x(1), h(0))\} \end{aligned}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), h(t)) = 0 && \text{dla p.w. } t \in [0, 1], \\ &\xi(x(0), x(1), h(0)) = 0, \\ &\theta(x(t), u(t), h(t)) \;\square\; 0 && \text{dla p.w. } t \in [0, 1], \end{aligned}$$

gdzie
$$\begin{aligned} &X^s = W^{1,s}(0, 1; I\!R^n) \times L^s(0, 1; I\!R^m), && s \in [1, \infty], \\ &\varphi : I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^r \to I\!R, && \psi : I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^r \to I\!R, \\ &f : I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^r \to I\!R^n, && \xi : I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^r \to I\!R^n, \\ &\theta : I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^r \to I\!R^l. \end{aligned}$$

W całej pracy będziemy zakładać, że spełnione są następujące warunki:

(I) Istnieją zbiory otwarte $\mathcal{R}^n \subset I\!R^n$ i $\mathcal{R}^m \subset I\!R^m$ takie, że:

- Funkcje $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\theta(\cdot,\cdot,\cdot)$ są dwukrotnie różniczkowalne w sensie Frécheta względem (x,u) na $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times G$. Obie te funkcje, wraz z pierwszymi pochodnymi względem (x,u) są różniczkowalne w sensie Frécheta względem h. Wszystkie pochodne pierwszego i drugiego rzędu względem (x,u) są jednostajnie lipschitzowskie względem (x,u,h).
- Funkcje $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ i $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ spełniają warunki analogiczne do powyższych na zbiorze $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times G$.

(II) Dla ustalonej wartości odniesienia $h_0 \in \mathcal{G}$ parametru istnieje rozwiązanie odniesienia $(x_0,u_0) := (x_{h_0},u_{h_0})$ zadania $(\mathrm{O})_{h_0}$ i $(x_0(t),u_0(t)) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$, dla p.w. $t \in [0,1]$.

Dla uproszczenia, indeksem "0" będziemy oznaczać funkcje odpowiadające punktom odniesienia.

Naszym zadaniem jest analiza stabilności i wrażliwości rozwiązań zadań $(\mathrm{O})_h$ względem parametru. Bardziej precyzyjnie, będziemy rozpatrywali następujący problem:

($\mathcal{P}$) *Znaleźć warunki przy których istnieją otoczenia $\mathcal{G}_0 \in H$ i $\mathcal{X}_0 \in X^\infty$ punktów h_0 i (x_0,u_0), takie, że dla każdego $h \in \mathcal{G}_0$ istnieje jednoznaczne w $\mathcal{X}_0$ rozwiązanie zadania $(\mathrm{O})_h$, które jest lipschitzowską i kierunkowo różniczkowalną funkcją parametru h.*

Chcielibyśmy, by warunki występujące w ($\mathcal{P}$) wystarczyło sprawdzić w punkcie odniesienia, a więc by były one *weryfikowalne*, przynajmniej teoretycznie. Okazuje się, że warunki takie obejmują dwa typy założeń:

(1) regularność ograniczeń,

(2) koercytywność hessianu lagranżianu.

Zaczniemy od warunków regularności ograniczeń. Aby je wprowadzić, będziemy potrzebowali pewnych definicji.

Dla nieujemnej stałej $\alpha \geq 0$ i prawie każdego $t \in [0,1]$ wprowadzamy zbiór ograniczeń α-aktywnych dla rozwiązania odniesienia:

$$I_\alpha(t) = \{i \in I \mid \theta_0^i(t) \geq -\alpha\}, \quad \imath_\alpha(t) = \text{ card } I_\alpha(t). \tag{1}$$

Oznaczamy

$$\widehat{\theta}_\alpha(t) = \left[\theta^i(x_0(t), u_0(t), h_0(t)\right]_{i\in I_\alpha(t)}.$$

Na potrzebną regularność ograniczeń składają się następujące trzy warunki:

(A1) rank $\left[D_{x(0)}\xi_0 + D_{x(1)}\xi_0\Phi(1)\right] = n$,
gdzie Φ jest macierzą rozwiązań fundamentalnych zlinearyzowanego równania stanu, tj.:

$$\dot{\Phi}(t) - D_x f_0(t)\Phi(t) = 0, \quad \Phi(0) = I.$$

(A2) Istnieją stałe $\alpha, \beta > 0$ takie, że

$$\left|D_u\widehat{\theta}_\alpha(t)\eta\right| \geq \beta|\eta| \text{ dla każdego } \eta \in I\!R^{\imath_\alpha(t)} \text{ i dla p.w. } t \in [0,1].$$

(A3) Istnieje stała $\alpha > 0$, taka, że dla każdego $e \in I\!R^n$ istnieje rozwiązanie $(y,v) \in X^\infty$ następującego układu równań liniowych:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) - D_x f_0 y(t) - D_u f_0(t)v(t) = 0,\\
&D_{x(0)}\xi_0 y(0) + D_{x(1)}\xi_0 y(1) = e,\\
&D_x\widehat{\theta}_\alpha(t)y(t) + D_u\widehat{\theta}_\alpha(t)v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Oznaczmy

$$Y^s := L^s(0,1;I\!R^n) \times I\!R^n \times L^s(0,1;I\!R^l), \quad s \in [1,\infty].$$

Wprowadzamy następujacy lagranżian i hamiltonian związane z $(\mathrm{O})_h$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}: X^\infty \times Y^\infty \times \mathcal{G} \to I\!R, \quad \mathcal{H}: I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^n \times I\!R^l \times G,\\
&\mathcal{L}(x,u,p,\rho,\nu,h) = F(x,u,h) - (p, \dot{x} - f(x,u,h))\\
&\qquad + \langle \rho, \xi(x(0), x(1), h(0)\rangle + (\nu, \theta(x,u,h)),\\
&\mathcal{H}(x,u,p,\nu,h) = \varphi(x,u,h) + \langle p, f(x,u,h)\rangle + \langle \nu, \theta(x,u,h)\rangle.
\end{aligned}$$

Poniższy rezultat jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 4.2 w (Malanowski, 2001):

LEMAT **2.1** *Jeżeli warunki (A1) – (A3) są spełnione, wówczas istnieje jednoznacznie określony mnożnik Lagrange'a* $\lambda_0 := (p_0, \rho_0, \nu_0) \in Y^\infty$, *związany z rozwiązaniem odniesienia* $z_0 := (x_0, u_0)$ *problemy* $(\mathrm{O})_{h_0}$, *taki,* *że spełnione są warunki optymalności pierwszego rzędu typu Karusha-Kuhna-Tuckera:*

$$\begin{aligned} &D_x\mathcal{L}(x_0,u_0,p_0,\rho_0,\nu_0,h_0)=0,\\ &D_u\mathcal{L}(x_0,u_0,p_0,\rho_0,\nu_0,h_0)=0,\\ &(\theta(x_0,u_0,h_0),\nu_0)=0, \quad \nu_0(t)\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

◇

Uwaga **2.2** Lemat 2.1 wymaga pewnego komentarza. Zapewnia on istnienie i jednoznaczność *normalnych* mnożników Lagrange'a, tzn. takich w których mnożnik odpowiadający funkcjonałowi jest różny od zera. Ponadto lemat zapewnia *regularność* mnożników. W szczególności mnożnik ν_0, odpowiadający ograniczeniom nierównościowym, jest elementem przestrzeni $L^\infty(0,1;\mathbb{R}^l)$, a więc funkcją, a nie dystrybucją. Dowód lematu oparty jest na abstrakcyjnym twierdzeniu Kurcyusza (twierdzenie 4.3 w (Kurcyusz 1976)) i w istotny sposób wykorzystuje fakt, że w założeniach (A2) i (A3) występuje "*margines swobody*" $\alpha > 0$. ◇

3. Pomocnicze zadanie liniowo-kwadratowe

Warunki optymalności analogiczne z (2) wraz z ograniczeniami tworzą następujący *układ optymalności* dla zadania $(\mathrm{O})_h$:

$$(\mathcal{OS})_h \quad \left.\begin{aligned} &\dot{x}(t)-f(x(t),u(t),h(t))=0,\\ &\xi(x(0),x(1),h(0))=0,\\ &\dot{p}(t)+D_x\mathcal{H}(x(t),u(t),p(t),\nu(t),h(t))=0,\\ &p(0)+D_{x(0)}[\xi(x(0),x(1),h(0))^*\rho+\psi(x(0),x(1),h(0))]=0,\\ &-p(1)+D_{x(1)}[\xi(x(0),x(1),h(0))^*\rho+\psi(x(0),x(1),h(0))]=0,\\ &D_u\mathcal{H}(x(t),u(t),p(t),\nu(t),h(t))=0,\\ &\langle\nu(t),\theta(x(t),u(t),h(t))\rangle=0,\\ &\theta(x(t),u(t),h(t))\ \square\ 0, \qquad \nu(t)\geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dla rozwiązania zadania $(\mathcal{P})$ wykorzystamy układ optymalności $(\mathcal{OS})_h$. Z (2) wynika, że dla $h=h_0$ układ (3) posiada rozwiązanie:

$$(z_0,\lambda_0):=(x_0,u_0,p_0,\rho_0,\nu_0)\in X^\infty\times Y^\infty.$$

Będziemy rozpatrywać zadanie analogiczne do $(\mathcal{P})$:

($\mathcal{PS}$) *Znaleźć warunki przy których istnieją otoczenia $\mathcal{G}_0 \subset H$ i $\mathcal{Z}_0 \subset Z^\infty$ punktów h_0 i (z_0, λ_0) takie, że dla każdego $h \in \mathcal{G}_0$ istnieje jednoznaczne w $\mathcal{Z}_0$ rozwiązanie (z_h, u_h) układu (3), które jest lipschitzowską i kierunkowo różniczkowalną funkcją parametru h.*

Ponieważ (z_h, λ_h) są punktami stacjonarnymi problemu $(\mathrm{O})_h$, więc jeśli spełniają one warunki zadania ($\mathcal{PS}$), a jednocześnie z_h są lokalnymi rozwiązaniami problemów $(\mathrm{O})_h$, to spełniają one warunki zadania ($\mathcal{P}$).

W celu znalezienia rozwiązania zadania ($\mathcal{PS}$), układ (3) rozpisuje się w równoważnej postaci *inkluzji* (*równania uogólnionego*) i stosuje się do niego twierdzenie Robinsona o funkcji uwikłanej. W twierdzeniu tym, rolę analogiczną do regularności jakobianu w klasycznym twierdzenie o funkcji uwikłanej odgrywa tzw. *silna regularność* równania uogólnionego. Twierdzenie mówi (patrz twierdzenia 2.1 i 2.3 oraz wniosek 2.2 w (Robinson 1980)), że jeśli linearyzacja równania uogólnionego w punkcie odniesienia posiada lokalnie jednoznaczne rozwiązanie, spełniające warunki lokalnej lipschitzowości i różniczkowalności kierunkowej względem addytywnych zakłóceń, to analogiczne własności, względem parametru, posiada rozwiązanie nieliniowego równania uogólnionego.

Dla sformułowania warunków *silnej regularności* dla układu (3), rozpatrujemy następujące, pomocnicze liniowo-kwadratowe zadanie sterowania optymalnego (accessory problem) związane z $(\mathrm{O})_h$:

$(\mathrm{LO})_\delta$ Znajdź $(y_\delta, v_\delta) \in X^\infty$ takie, że

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(y_\delta, v_\delta, \delta) = \min \mathcal{I}(y, v, \delta)\\
&\text{przy ograniczeniach}\\
&\dot{y}(t) - D_x f_0(t) y(t)) - D_u f_0(t) v(t) + a^1(t) - \delta^1(t) = 0,\\
&D_{x(0)}\xi_0 y(0) + D_{x(1)}\xi_0 y(1) + a^2 - \delta^2 = 0,\\
&D_x\theta_0(t) y(t) + D_u\theta_0(t) v(t) + a^3(t) - \delta^3(t) \,\square\, 0,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(y, v, \delta) \;&= \tfrac{1}{2}\left((y, v), D^2\mathcal{L}_0(y, v)\right)\\
&+ \textstyle\int_0^1 [\langle a^4(t) - \delta^4(t), y(t)\rangle + \langle a^7(t) - \delta^7(t), v(t)\rangle] dt\\
&+ \langle a^5 - \delta^5, y(0)\rangle + \langle a^6 - \delta^6, y(1)\rangle,
\end{aligned}$$

a $D^2\mathcal{L}_0$ oznacza drugą pochodną lagranżianu względem (x, u) w punkcie odniesienia.

W zadaniu $(\mathrm{LO})_\delta$,

$$\begin{aligned}\delta &= (\delta^1,\delta^2,\delta^3,\delta^4,\delta^5,\delta^6,\delta^7) \in \Delta^\infty \\ &:= L^\infty(0,1;I\!R^n) \times I\!R^n \times L^\infty(0,1;I\!R^l) \times L^\infty(0,1;I\!R^n) \times I\!R^n \times I\!R^n \\ &\quad \times L^\infty(0,1;I\!R^m)\end{aligned}$$

jest funkcją zakłóceń, a $a := a^1,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7) \in \Delta^\infty$ jest ustaloną funkcją, tak skonstruowaną, że (z_0, λ_0) jest punktem stacjonarnym zadania $(\mathrm{LO})_0$.

Warunek *silnej regularności* układu (3) jest spełniony jeśli istnieje otoczenie zera $\mathcal{D} \in \Delta^\infty$ oraz otoczenie $\mathcal{Z}_0 \in Z^\infty$ takie, że dla każdego $\delta \in \mathcal{D}$ istnieje jednoznaczny w $\mathcal{Z}_0$ punkt stacjonarny $(y_\delta, \square_\delta)$ zadania $(\mathrm{LO})_\delta$, który jest lipschitzowską i kierunkowo różniczkowalną funkcją δ. Tak więc, twierdzenia Robinsona pozwalają sprowadzić analizę stabilności i wrażliwości nieliniowego zadania $(\mathrm{O})_h$ do podobnej analizy dla zadania liniowo-kwadratowego $(\mathrm{LO})_\delta$. To ostatnie zadanie jest znacznie prostsze.

Będziemy potrzebowali dodatkowego założenia typu koercytywności. W tym celu, podobnie jak w (1), dla $\alpha \geq 0$ wprowadzamy zbiory

$$I_\alpha^+(t) := \{i \in I_0(t) \mid \nu_0^i(t) > 0, \text{ dla } i \in I \text{ oraz } t \in [0,1].$$

Ponieważ ν_0 jest określone jednoznacznie, więc zbiory $I_\alpha^+(t)$ są dobrze określone.

Zakładamy następujący warunek koercytywności hessianu lagranżianu:

(A4) Istnieją stałe $\alpha, \gamma > 0$ takie, że

$$((y,v), D^2\mathcal{L}_0(y,v)) \geq \gamma \|(y,v)\|_{X^2}^2 \tag{4}$$

dla wszystkich par $(y,v) \in X^2$ spełniających układ równań

$$\begin{aligned}&\dot{y}(t) - D_x f_0(t) y(t) - D_u f_0(t) v(t) = 0, \\ &D_{x(0)}\xi_0 y(0) + D_{x(1)}\xi_0 y(1) = 0, \\ &\langle D_x \theta_0^i(t), y(t)\rangle + \langle D_u \theta_0^i(t), v(t)\rangle = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

dla wszystkich $i \in I_\alpha^+(t)$ i p.w. $t \in [0,1]$.

Dowód następującego lematu znajduje się w (Malanowski 2001) (Propozycja 5.4 i Lemat 6.1).

LEMAT **3.1** *Jeśli spełnione są warunki (A1) - (A4), wówczas istnieje otoczenie zera $\mathcal{D} \subset \Delta^\infty$ i otoczenie $\mathcal{Z}_0 \subset Z^\infty$ punktu (z_0, λ_0), takie, że dla każdego $\delta \in \mathcal{D}$ istnieje jednoznaczny w $\mathcal{Z}_0$ punkt stacjonarny $(w_\delta, \square_\delta)$ problemu $(LO)_\delta$. Ponadto istnieje stała $\ell > 0$, taka, że*

$$\|w_{\delta'} - w_{\delta''}\|_{X^\infty}, \|\square_{\delta'} - \square_{\delta''}\|_{Y^\infty} \;\square\; \ell\|\delta' - \delta''\|_{\Delta^\infty},$$

$$\textit{dla wszystkich } \delta', \delta'' \in \mathcal{D}. \tag{6}$$

Dla $s \in [2, \infty)$, odwzorowanie $\mathcal{D} \ni \delta \mapsto (w_\delta, \square_\delta) \in Z^s$ jest kierunkowo różniczkowalne. Różniczka kierunkowa w punkcie $\delta = 0$ i w kierunku $\pi \in \Delta^\infty$ dana jest przez punkt stacjonarny następującego liniowo-kwadratowego zadania sterowania optymalnego:

$(\mathrm{LQ})_\pi$ *Znaleźć* $(z_\pi, \varpi_\pi) \in X^\infty$ *takie, że*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z_\pi, \varpi_\pi, \pi) &= \min\Big\{\mathcal{J}(z, \varpi, \pi) := \tfrac{1}{2}((z, \varpi), \mathcal{L}_0(z, \varpi)) \\
&\quad + \textstyle\int_0^1 [\langle \pi^4(t), z(t)\rangle + \langle \pi^7(t), \varpi(t)\rangle] dt \\
&\quad + \langle \pi^5, z(0)\rangle + \langle \pi^6, z(1)\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

przy ograniczeniach

$$\dot{z}(t) - D_x f_0(t) z(t) - D_u f_0(t) \varpi(t) - \pi^1(t) = 0,$$

$$D_{x(0)}\xi_0 z(0) + D_{x(1)}\xi_0 z(1) - \pi^2 = 0,$$

$$\langle D_x\theta_0^i(t), z(t)\rangle + \langle D_u\theta_0^i(t), \varpi(t)\rangle$$

$$-(\pi^3)^i(t) \begin{cases} = 0 & \textit{jeśli } i \in I_0^+(t), \\ \square\; 0 & \textit{jeśli } i \in I_0(t) \setminus I_0^+(t), \\ \textit{swobodne} & \textit{jeśli } i \notin I_0(t). \end{cases}$$

◇

UWAGA **3.2** Marginesy swobody $\alpha > 0$ w (A2) - (A4) odgrywają zasadniczą rolę w dowodzie lematu 3.1. Należy zwrócić uwagę, że warunek koercytywności (4), spełniony jest w normie przestrzeni X^2, a nie w silniejszej normie przestrzeni X^∞, w której problem $(0)_h$ jest zdefiniowany. Zjawisko to nosi nazwę *niezgodności norm* i jest typowe dla nieliniowych zadań sterowania optymalnego. Wobec (4) naturalną przestrzenią, w której możemy oczekiwać ciągłości lipschitzowskiej, względem δ, punktów stacjonarnych zadania $(\mathrm{LO})_\delta$ jest przestrzeń $Z^2 = X^2 \times Y^2$. Taka ciągłość jest zbyt słaba dla zastosowania twierdzenia Robinsona. Jednakże, korzystając z zasady maksimum Pontriagina, można pokazać, że zachodzi oszacowanie (3.1), tj. lipschitzowość punk- tów stacjonarnych spełniona jest w przestrzeni Z^∞. Z drugiej strony, punkty stacjonarne nie są kierunkowo różniczkowalne w Z^∞, lecz w Z^s dla $s \in [2, \infty)$. $\diamond$

4. Stabilność i wrażliwość rozwiązań dla zadań nieliniowych

Następujące twierdzenie jest podstawowym wynikiem przedstawianym w tej pracy (patrz twierdzenia 7.5 i 8.1 w (Malanowski 2001)).

TWIERDZENIE **4.1** *Jeśli warunki* (A1) – (A4) *są spełnione, wówczas istnieje otoczenie $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ punktu h_0 i otoczenie $\mathcal{X}_0 \subset X^\infty$ punktu (x_0, u_0), takie, że dla każdego $h \in \mathcal{G}_0$ istnieje, jednoznazne w $\mathcal{X}_0$, rozwiązanie (x_h, u_h) problemu $(\mathrm{O})_h$, oraz związany z nim jednoznaczny mnożnik Lagrange'a $(p_h, \rho_h, \nu_h) \in Y^\infty$. Ponadto istnieje stała $\ell > 0$, taka, że*

$$\|x_{h'} - x_{h''}\|_{1,\infty}, \|u_{h'} - u_{h''}\|_\infty, \|p_{h'} - p_{h''}\|_{1,\infty}, |\rho_{h'} - \rho_{h''}|, \|\nu_{h'} - \nu_{h''}\|_\infty,$$
$$\square\ \ell \|h' - h''\|_H \quad \text{dla każdego } h', h'' \in \mathcal{G}_0.$$

Odwzorowania $\mathcal{D} \ni h \mapsto (x_h, u_h) \in X^s$ oraz $\mathcal{D} \ni h \mapsto (p_h, \rho_h, \nu_0) \in Y^s$ są kierunkowo różniczkowalne dla każdego $s \in [2, \infty)$. Różniczki kierunkowe w punkcie h_0 i w kierunku $g \in H$ są dane, odpowiednio przez rozwiązanie i mnożniki Lagrange'a następującego pomocniczego zadania liniowo-kwadratowego:

$(\mathrm{L})_g$ *Znaleźć $(z_g, \varpi_g) \in X^\infty$ takie, że*

$$\mathcal{K}(z_g, \varpi_g, g) = \min \Big\{ \mathcal{K}(z, \varpi, g) := \tfrac{1}{2}((z, \varpi), \mathcal{L}_0(z, \varpi)) + (z, D^2_{xh}\mathcal{L}_0 g) + (\varpi, D^2_{uh}\mathcal{L}_0 g) \Big\}$$

przy ograniczeniac

$$\dot z(t) - D_x f_0(t) z(t) - D_u f_0(t) \varpi(t) - D_h f_0 g(t) = 0,$$
$$D_{x(0)}\xi_0 z(0) + D_{x(1)}\xi_0 z(1) + D_h \xi_0 g(0) = 0,$$
$$\langle D_x \theta_0^i(t), z(t)\rangle + \langle D_u \theta_0^i(t), \varpi(t)\rangle + \langle D_h \theta_0(t), g(t)\rangle \begin{cases} = 0 & \text{jeśli } i \in I_0^+(t), \\ \square\ 0 & \text{jeśli } i \in I_0(t) \setminus I_0^+(t), \\ \text{swobodne} & \text{jeśli } i \notin I_0(t). \end{cases}$$

UWAGA **4.2** Z warunku (3.1) oraz z twierdzenia Robinsona wynika lokalna jednoznaczność oraz lipschitzowość punktów stacjonarnych zadań $(\mathrm{O})_h$. Z drugiej strony, warunek koercytywności jest *silnym warunkiem dostatecznym optymalności drugiego rzędu.* Wobec lematu 3.1, łatwo pokazać, że warunek ten jest spełniony dla wszystkich h z pewnego otoczenia punktu h_0. Stąd wynika, że punktom stacjonarnym odpowiadają lokalne minima. Kierunkowa różniczkowalność punktów stacjonarnych i charakteryzacja różniczki jako punktu stacjonarnego problemu $(\mathrm{L})_g$ wynika z twierdzenia 2.3 w (Robinson 1980) oraz z charakteryzacji różniczki punktów stacjonarnych zadania $(\mathrm{LO})_\delta$, danej przez $(\mathrm{LQ})_\pi$. Bardziej szczegółowa analiza problemu $(\mathrm{L})_g$ prowadzi do wniosku (patrz twierdzenie 8.1 w (Malanowski 2001)), że różniczka punktu stacjonarnego jest *równomierna względem kierunku*, a więc jest tzw. *różniczką Bouliganda.* Z tego rezultatu oraz z postaci ograniczeń w $(\mathrm{L})_g$ wynika natychmiast poniższy wniosek. ◇

WNIOSEK **4.3** *Jeśli założenia twierdzenia 4.1 są spełnione i dodatkowo $I_0(t) = I_0^+(t)$ dla prawie wszystkich $t \in [0,1]$, tj. jeśli punktowy warunek ścisłej komplementarności jest spełniony prawie wszędzie w przedziale sterowania, wówczas w otoczeniu punktu odniesienia, rozwiązania i mnożniki Lagrange'a zadań $(\mathrm{O})_h$ są silnie różniczkowalnymi funkcjami parametru h.* ◇

Inny ważny wniosek wynikający z twierdzenia 4.1 dotyczy tzw. *funkcji optymalności* $F^0(h)$, która, na zbiorze $\mathcal{G}_0$, zdefiniowana jest przez

$$F^0(h) := F(x_h, u_h, h),$$

tj. każdej wartości parametru przyporządkowuje lokalnie optymalną wartość wskaźnika jakości problemu $(\mathrm{O})_h$.

WNIOSEK **4.4** *Jeśli założenia twierdzenia 4.1 są spełnione, wówczas dla każdego $h = h_0 + g \in \mathcal{G}_0$ ma miejsce następujący rozkład drugiego rzędu funkcji optymalności, równomierny względem g:*

$$\begin{aligned} F^0(h) &= F^0(h_0) + (D_h\mathcal{L}_0, g) \\ &+\tfrac{1}{2}\left((z_g, \varpi_g, g), \begin{pmatrix} D^2_{xx}\mathcal{L}_0 & D^2_{xu}\mathcal{L}_0 & D^2_{xh}\mathcal{L}_0 \\ D^2_{ux}\mathcal{L}_0 & D^2_{uu}\mathcal{L}_0 & D^2_{uh}\mathcal{L}_0 \\ D^2_{hx}\mathcal{L}_0 & D^2_{hu}\mathcal{L}_0 & D^2_{hh}\mathcal{L}_0 \end{pmatrix} (z_g, \varpi_g, g) \right) \\ &+o(\|g\|_H^2), \end{aligned}$$

gdzie (z_g, ϖ_g) *jest rozwiązaniem zadania* $(\mathrm{L})_g$. ◇

Założenia twierdzenia 4.1 są *warunkami dostatecznymi* które zapewniają spełnienie tezy tego twierdzenia. Powstaje naturalne pytanie, jak odległe są te warunki od *warunków koniecznych*? W szczególności, czy "marginesy swobody" $\alpha > 0$, założone w (A2) – (A4), są rzeczywiście konieczne, czy też wynikają tylko z użytej techniki dowodu? Problem ten był badany w pracach Dontchev and Malanowski (1999) i Malanowski (2001). W twierdzeniu 10.1 w (Malanowski 2001) pokazano, że jeśli zależność danych zadań $(\mathrm{O})_h$ od parametru jest *silna* w punkcie odniesienia, wówczas założenia (A1) – (A4) są również warunkami koniecznymi spełnienia tezy twierdzenia 4.1. Tak więc, w tym przypadku, otrzymujemy pełną charakteryzację własności lokalnej lipschitzowości i kierunkowej różniczkowalności rozwiązań i mnożników Lagrange'a.

5. Zbieżność aproksymacji Eulera dla zadań sterowania optymalnego

Poza bardzo rzadkimi przypadkami, zadania sterowania optymalnego dla układów ciągłych (opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub cząstkowymi) nie dadzą się rozwiązać analitycznie. Ażeby rozwiązać takie zadania numerycznie, trzeba wprowadzić ich skończenie wymiarową aproksymację. Takie aproksymacje zależą od pewnego *parametru aproksymacji* h, przeznaczonego do zbieżności do zera. Czym mniejsza jest wartość parametru h tym lepiej aproksymowane jest ciągłe zadanie wyjściowe. Powstaje pytanie, czy dla h dążącego do zera rozwiązania zadań aproksymujących są zbieżne (w jakimś sensie) do rozwiązania zadania wyjściowego, a jeśli tak to czy potrafimy oszacować prędkość tej zbieżności?

Tak postawiony problem zbieżności aproksymacji jest bliski problemowi stabilności rozwiązań względem parametru, rozważanemu w poprzednich sekcjach. Zasadnicza różnica polega na tym, że zadania aproksymujące mają na ogół *inną strukturę* niż zadanie wyjściowe; np. różniczkowe równanie stanu jest aproksymowane równaniem różnicowym. Powoduje to dodatkowe trudności, które nie występują w zadaniach stabilności względem parametru. W pracy Malanowski, Büskens, Maurer (1998). zaproponowano ogólne podejście do badania zbieżności aproksymacji, stanowiące pewną modyfikację metodologii przedstawionej w poprzednich sekcjach niniejszej pracy. Korzystając z tego podejścia, zbadano w (Malanowski 1998) prędkość zbieżności aproksymacji Eulera dla nieliniowych zadań sterowania optymalnego, przy ograniczeniach mieszanych sterowanie-stan. Poniżej krótko przedstawimy te wyniki.

Będziemy rozpatrywać to samo zadanie sterowania optymalnego, które zostało wprowadzone w sekcji 2, jednakże teraz założymy, że dane zadania są *niezależne* od parametru. Dla odróżnienia, zadanie to będziemy oznaczać przez $(\mathcal{S})$:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathcal{S}) & \text{Znajdź } (x_0, u_0) \in X^\infty \text{ takie, że} \\
& F(x_0, u_0) = \min\{F(x,u) := \int_0^1 \varphi(x(t), u(t))dt \\
& \qquad\qquad +\psi(x(0), x(1))\} \\
& \text{przy ograniczeniach} \\
& \quad \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0 \qquad \text{dla p.w. } t \in [0,1], \\
& \quad \xi(x(0), x(1)) = 0, \\
& \quad \theta(x(t), u(t)) \square 0 \qquad\qquad \text{dla p.w. } t \in [0,1].
\end{array}
$$

Zakładamy, że spełnione są warunki regularności danych względem x i u, takie jak w (I) oraz, że problem $(\mathcal{S})$ posiada rozwiązanie (x_0, y_0). Ponadto spełnione są założenia (A1) - (A4).

Niech N będzie liczbą naturalną. Przez $h = \frac{1}{N}$ oznaczamy krok dyskretyzacji, który traktujemy jako parametr. Oznaczamy $t_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots.., N$. Dla ustalonego h wprowadzamy przestrzeń skończenie wymiarową $L_h^\infty(0,1;\mathbb{R}^m)$, przedziałami stałych funkcji v zdefiniowanych na $[0,1]$ przez

$$
\begin{array}{l}
v(t) = v(t_j) \quad \text{dla } t \in [t_j, T_{j+1}),\ j = 0, 1, \ldots.., N-1, \\
\text{z normą } \|v\|_\infty = \max\{|v(t_j) \mid j = 0, 1, \ldots.., N-1\}.
\end{array}
$$

Ponadto wprowadzamy przestrzeń $W_h^{1,\infty}(0,1;\mathbb{R}^n)$, ciągłych i przedziałami liniowych funkcji

$$
\begin{array}{l}
y(t) = y(t_j) + (t - t_j)\nabla y(t_j) \quad \text{dla } t \in [t_j, t_{j+1}],\ j = 0, 1, \ldots.., N-1\} \\
\text{z normą } \|y\|_{1,\infty} = \max\{|y(0)|, |\nabla y(t_j)| \mid j = 0, 1, \ldots.., N-1\},
\end{array}
$$

gdzie $\nabla y(t_j) = \frac{1}{h}(y(t_{j+1} - t_j)$. Przestrzeń

$$
X_h^\infty := W_h^{1,\infty}(0,1;\mathbb{R}^n) \times L^\infty(0,1;\mathbb{R}^m)
$$

możemy traktować jako podprzestrzeń przestrzeni X^∞. Wprowadzamy następującą aproksymację zadania $(\mathcal{S})$, którą będziemy nazywać *aproksymacją Eulera*, gdyż do aproksymacji równania stanu zastosowany jest schemat Eulera:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{S})_h & \text{Znajdź } (x_h, u_h) \in X_h^\infty \text{ takie, że} & \\
 & F_h(x_h, u_h) = \min\{F_h(x,u) := & h\Sigma_{j=0}^{N-1}\varphi(x(t_j), u(t_j)) \\
 & & +\psi(x(t_0), (x(t_N))\} \\
 & \text{przy ograniczeniach} & \\
 & \nabla x(t_j) - f(x(t_j), u(t_j)) = 0, & \text{dla } j = 0, 1, ..., N-1, \\
 & \xi(x(t_0), x(t_N)) = 0, & \\
 & \theta(x(t_j), u(t_j)) \square 0, & \text{dla } j = 0, 1, ..., N-1.
\end{array}
$$

Należy zwrócić uwagę, że problemy $(\mathcal{S})$ i $(\mathcal{S})_h$ mają różne struktury, a rozwiązanie zadania $(\mathcal{S})$ nie należy na ogół do przestrzeni X_h^∞. Naszym zadaniem jest oszacowanie odległości pomiędzy (x_0, u_0) a (x_h, u_h). Dla ustalonego h, przez $(\bar{x}_h, \bar{u}_h)$ oznaczamy rzut (x_0, u_0) na podprzestrzeń X_h^∞ i korzystamy z nierówności trójkąta:

$$
\begin{aligned}
\|(x_0, u_0) - (x_h, u_h)\|_{X^\infty} \;\square\; & \|(x_0, u_0) - (\bar{x}_h, \bar{u}_h)\|_{X^\infty} \\
& + \|(\bar{x}_h, \bar{u}_h) - (x_h, u_h)\|_{X^\infty}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Wprowadzamy dodatkowy warunek regularnosci:

(A5) Sterowanie optymalne u_0 jest funkcją ciągłą w przedziale [0,1].

Można pokazać, że, wobec założeń (A2) – (A4), warunek (A5) implikuje ciągłość lipschitzowską u_0, która pozwala oszacować pierwszy człon po prawej stronie (7). Do oszacowanie drugiego członu stosuje się technikę podobną do użytej w dowodzie twierdzenia 4.1, traktując $(\bar{x}_h, \bar{u}_h)$ jako punkt odniesienia. Ostatecznie uzyskuje się następujący wynik (patrz twierdzenie 5.6 w (Malanowski 1998)):

TWIERDZENIE **5.1** *Jeśli założenia* (A1) – (A5) *są spełnione, wówczas istnieje stała* $\eta > 0$ *taka, ze dla każdego* $h < \eta$ *istnieje lokalnie jednoznaczne rozwiązanie zadania* $(\mathcal{S})_h$ *oraz stała* $\ell > 0$, *niezależna od h, taka, że*

$$
\|x_h - x_0\|_{1,\infty}, \|u_0 - u_h\|_\infty \;\square\; \ell\, h \quad \textit{dla wszystkich } h < \eta. \tag{8}
$$

◇

Należy podkreślić, że oszacowanie (8) prędkości zbieżności aproksymacji jest tego samego rzędu co rząd aproksymacji przestrzeni, a więc jest optymalne.

Literatura

Dontchev A.L., Malanowski K.(1999) *A characteriztion of Lipschitzian stability in optimal control,* w: Calculus of Variations and Optimal Control, A. Ioffe, S. Reich and I. Shafrir (eds), CRC Research Notes in Mathematics 411, Chapmann & Hall, Boca Raton, 62–76.

Kurcyusz S. (1976) *On existence and nonexistence of Lagrange multipliers in Banach spaces*, J.Optim. Theory Appl., **20** , 81-110.

Malanowski K. (2001) *Stability and sensitivity analysis for optimal control problems with control–state constraints*, Dissertationes Mathematicae, **CCCXCIV**, 1-51.

Malanowski K. (2001) *On normality of Lagrange multipliers for state constrained optimal control problems*, w: Proceedings of the ECC 2001 Conference, Porto, 254-259.

Malanowski K., Büskens Ch., Maurer H. (1998) *Convergence of approximations to nonlinear optimal control problems*, w: Mathematical Programming with Data Perturbations, A.V.Fiacco (ed.), Marcel-Dekker, New York, 253-284.

Robinson S.M. (1980) *Strongly regular generalized equations*, Math. Oper. Res., **5**, 43-62.

ISBN 83-85847-78-2