М. Фельдблюмъ.

ТЕОРІЯ УРАВНЕНІЯ РИККАТИ

и

СВОЙСТВА ФУНКЦІЙ, ЕМУ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХЪ.

ВАРШАВА.
ТИПОГРАФІЯ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА,
Краковское-Предмѣстье № 3.
1898.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета

Ректоръ проф. *Г. Э. Зенгеръ.*

Отдѣльный оттискъ изъ „Варш. Универс. Извѣстій“ 1898 г.

СОДЕРЖАНІЕ.

Глава III.

Интегрированіе уравненія Риккати общаго вида.

ЧАСТЬ II.

Свойства функцій Риккати.

Глава I.

Характеристическія свойства функцій Риккати.

Глава II.

Особенныя точки функцій Риккати и свойства этихъ функцій въ области особенныхъ точекъ.

ЧАСТЬ III.

Приложенія.

Глава I.

Приложенія теоріи уравненій Риккати частнаго и общаго вида къ анализу.

Глава II.

Геометрическія приложенія теоріи общаго уравненія Риккати.

стр.

Глава III.

Приложеніе уравненія Риккати къ механикѣ.

М. ФЕЛЬДБЛЮМЪ.

ТЕОРІЯ УРАВНЕНІЯ РИККАТИ
И
СВОЙСТВА ФУНКЦІЙ, ЕМУ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХЪ.

ВВЕДЕНІЕ.

Уравненіе, извѣстное подъ названіемъ „уравненія Риккати", получило свое названіе по имени итальянскаго геометра Якова *Риккати* (род. въ Венеціи 1676 г., ум. 1775 г.); изучая одно дифференціальное уравненіе второго порядка, Риккати пришлось интегрировать уравненіе:

$$x^m dq = du + \frac{u^2}{q} dx,$$

гдѣ q есть нѣкоторая функція отъ u и x, а m постоянное. Въ общемъ видѣ интегрированіе этого уравненія не возможно; Риккати замѣтилъ, что его нельзя обынтегрировать въ общемъ видѣ и тогда, когда будемъ считать q функціею одного перемѣннаго x. По поводу этого Риккати заявляетъ, что онъ много трудился надъ этимъ вопросомъ и въ концѣ концовъ не знаетъ, ошибается ли онъ, или эта задача превышаетъ его силы; и вотъ онъ бросаетъ вызовъ современнымъ математикамъ, ставя имъ для рѣшенія слѣдующую задачу: считая въ предыдущемъ уравненіи показатель m даннымъ и принимая, что q есть нѣкоторая степень x, т. е.

$$q = x^n,$$

найти, каково должно быть значеніе показателя n для того, чтобы въ уравненіи можно было раздѣлить перемѣнныя. (Ut igitur ad hanc inquisitionem profundiores analysis et geometriae cultores excitem, sequens problema propono. In superiori formula dato ad libitum exponente m, statuatur quantitas $q = x^n$. Peto, qua ratione determinandi sunt valores alterius exponentis n, ut succedat indeterminatarum separatio et aequationis constructio per solas quadraturas) [1]).

Вызовъ Риккати не долго оставался безъ отвѣта: вскорѣ за нимъ послѣдовало нѣсколько статей одна за другою, и затѣмъ уже уравненіе, получившее названіе Риккатіева, не переставало занимать математиковъ. Въ томъ же томѣ Suppl. Act. Erud., непосредственно послѣ цитированной статьи Риккати, находимъ статью Даніеля *Бернулли*, въ которой онъ, между прочимъ, пишетъ, что онъ самъ, равно какъ его братъ, Николай, и отецъ рѣшили задачу Риккати; рѣшенія своего брата онъ-де не видѣлъ, но, сравнивъ свое рѣшеніе съ рѣшеніемъ отца, онъ убѣдился, что они оба различными методами пришли къ тому же результату; это даетъ ему поводъ думать, что случаи, ими найденные, суть единственно возможные. Желая, по господствовавшему тогда обычаю, скрыть свое рѣшеніе отъ другихъ математиковъ, дабы, какъ онъ заявляетъ, не лишить ихъ желанія самимъ испытать свои силы надъ этимъ вопросомъ, онъ подаетъ свое рѣшеніе въ видѣ криптографа. (Solutionem addo, ne tamen aliis idem tentandi occasionem adimam, illam characteribus occultis involvo, revelaturus significationem, quando tempus postulaverit); вотъ форма, въ какой Д. Бернулли подалъ свое рѣшеніе Риккатіевой задачи:

$24a$, $6b$, $6c$, $8d$, $33e$, $5f$, $2g$, $4h$, $33i$, $6l$, $21m$, $26n$, $16o$, $8p$, $5q$, $17r$, $16s$, $25t$, $32u$, $5x$, $3y$, $+$, $-$, $—$, $\pm$, $=$, 4, 2, 1.

Слѣдующая по времени статья, относящаяся къ уравненію Риккати, принадлежитъ Христіану *Гольдбаху*. Изъ нижецитируемой его статьи мы узнаемъ, что задача, обнародованная Риккати въ 1724 г., была въ обращеніи среди математиковъ гораздо раньше; такъ въ 1721 году (или даже еще раньше) Риккати частнымъ образомъ предложилъ свое уравненіе Николаю *Бернулли*, подавъ его въ формѣ:

$$ax^m dx + by^2 x^p dx = dy.$$

---

[1]) Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus, auctore Co. Jacobo *Riccato*.—Actorum Eruditorum quae Lipsiae publicantur supplementa, tomus VIII an. 1724, pag. 66—73.

Гольдбахъ нашелъ, что уравненіе болѣе общаго вида

$$ayx^m dx + by^n x^p dx = dy$$

имѣетъ интегралъ:

$$y = cx^{\frac{-p-1}{n-1}},$$

гдѣ c есть корень уравненія

$$bc^{n-1} + ac^{f-1} + \frac{p-m}{n-f} = 0,$$

если показатель m равенъ:

$$m = \frac{fp + f - p - n}{n-1}.$$

Николаю Бернулли удалось найти еще другіе случаи интегрируемости; наконецъ въ письмѣ отъ 6 декабря 1721 года Н. Бернулли заявляетъ Гольдбаху, что онъ нашелъ, что предложенное уравненіе рѣшается при условіи:

$$m = \frac{-2np - 4n \pm p}{2n \pm 1},$$

гдѣ p — раціональное число, а n — цѣлое. Самъ Н. Бернулли заявляетъ объ этомъ въ своей статьѣ: „Analysis aequationum quarundam differentialium“ [1]), гдѣ онъ даетъ значеніе m:

$$m = \frac{-4c}{2c \pm 1}$$

(c — произвольное цѣлое число), при которомъ уравненіе:

$$ax^m dx + by^2 dx = dy$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Впервые полный и простой выводъ случаевъ интегрируемости уравненія Риккати находимъ у *Эйлера* въ первомъ томѣ его трактата объ интегральномъ исчисленіи [2]). Эйлеръ писалъ уравненіе Риккати въ формѣ:

$$\frac{du}{dt} + u^2 = at^\mu;$$

---

1) Commentarii academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae, t. I ad an. 1726. 1728 p. 198—207.

2) *Leonhardi Euleri.*—Institutiones calculi integralis, t. I, sectio II, caput I: „De separatione variabilium“ p. 271—275.

къ этому виду первоначальное уравненіе Риккати приводится подстановкою:

$$x^{1-n} = -(n-1)\,t.$$

Во второмъ томѣ того же сочиненія [1]) Эйлеръ излагаетъ свой методъ интегрированія безконечными рядами линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ax^n y = 0,$$

которое находится въ непосредственной связи съ уравненіемъ Риккати. Заслуги Эйлера по отношенію къ уравненію Риккати на этомъ однако не оканчиваются. Въ 1785 г. появляется второй томъ его сборника: „Opuscula analytica“ [2]), въ которомъ онъ показываетъ, что къ интегрированію уравненія Риккати приводится задача вычисленія одного обширнаго класса непрерывныхъ дробей, и затѣмъ, обратно, показываетъ, что интегралъ уравненія Риккати всегда можетъ быть представленъ въ видѣ безконечной непрерывной дроби. Самъ Euler замѣчаетъ при этомъ, что онъ первый занимается интегрированіемъ уравненія Риккати въ случаѣ, когда его интегралъ не берется въ конечномъ видѣ [3]). Методъ непрерывныхъ дробей мы находимъ у Эйлера еще въ неусовершенствованномъ видѣ гораздо раньше: въ 1739 г. въ нижецитируемомъ сочиненіи [4]).

Послѣдующіе математики, занимавшіеся уравненіемъ Риккати, изучали, каждый по своему, условія интегрируемости этого уравненія въ конечномъ видѣ, и всѣ приходили къ тому же результату. То обстоятельство, что не удавалось находить другихъ случаевъ ин-

---

[1]) *Euler.*—loc. cit. t. II, sec. I, cap. VII: „De resolutione aequationis $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^n y = 0$ per series infinitas, p. 151—182.

[2]) *Euler.* — Opuscula analytica. Petropoli t. II, p. 217 — 239: „Summatio fractionis continuae, cuius indices etc. etc.“.

[3]) „.... id quod utique maximam attentionem meretur, cum nullo adhuc modo ista aequatio praeter casus integrabiles tractari potuerit“. Нужно однакожъ замѣтить, что Эйлеровъ методъ непрерывныхъ дробей даетъ только частные интегралы.

[4]) *Euler.*—„De fractionibus continuis observationes“. Comm. ac. sc. Imp. Petr. 1739. t. XI, p. 32—81.

тегрируемости, кромѣ давно извѣстныхъ, должно было наводить математиковъ на мысль, что эти случаи—единственные. И въ самомъ дѣлѣ, въ одной изъ своихъ работъ, о которой рѣчь впереди, *Ліувилю* удалось доказать это положеніе. До этого времени, кромѣ случаевъ интегрируемости, математики старались представить общій интегралъ уравненія Риккати въ общемъ видѣ въ формѣ безконечныхъ рядовъ и опредѣленныхъ интеграловъ, содержащихъ независимое перемѣнное въ качествѣ параметра. Сюда относится первая работа Ліувиля объ уравненіи Риккати, написанная въ 1833 году, не имѣющая, впрочемъ, важнаго значенія по искусственности метода и сложности результатовъ: онъ представляетъ интегралъ уравненія Риккати въ видѣ m-кратнаго опредѣленнаго интеграла отъ суммы нѣкотораго безконечнаго ряда. Затѣмъ слѣдуетъ болѣе замѣчательный мемуаръ *Куммера* (цитируемый ниже), въ которомъ онъ представляетъ интегралъ уравненія Риккати въ видѣ опредѣленнаго интеграла съ перемѣннымъ x въ качествѣ параметра; Куммеръ получилъ свою формулу, просуммировавъ опредѣленнымъ интеграломъ безконечный рядъ, представляющій интегралъ уравненія Риккати. Въ другомъ мемуарѣ [1]) Куммеръ развиваетъ свой методъ суммированія рядовъ опредѣленными интегралами и усовершенствованный методъ опять примѣняетъ къ Риккатіеву уравненію. Совсѣмъ инымъ путемъ получаетъ выраженіе интеграла Риккатіева уравненія въ формѣ опредѣленнаго интеграла *Лобатто*, который не прибѣгаетъ къ посредству безконечныхъ рядовъ, а выводитъ свою формулу непосредственно; методъ Лобатто весьма похожъ на извѣстный въ анализѣ методъ Лапласа интегрированія дифференціальныхъ уравненій опредѣленными интегралами.

Новое направленіе работамъ относительно уравненія Риккати дали труды *Ліувиля*. Въ 1837 г. появляется въ журналѣ, издаваемомъ имъ же, его прекрасный, оригинальный трудъ о классификаціи трансцендентныхъ, затѣмъ въ 1839 г. онъ помѣщаетъ въ томъ же журналѣ обширную статью объ интегрированіи линейныхъ уравненій 2-го порядка въ конечномъ видѣ и, спустя 2 года, въ сочиненіи,

---

[1]) *Kummer.*—De integralibus definitis et seriebus infinitis. Crelle's Jour. 1837. томъ XVII стр. 210—227.

тѣсно связанномъ съ этими двумя работами, озаглавленномъ: „Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati", онъ прилагаетъ результаты своихъ предыдущихъ изслѣдованій къ доказательству замѣчательнаго факта, что общеизвѣстныя условія интегрируемости уравненія Риккати не только достаточны, но и необходимы. Въ послѣдней работѣ Ліувиля находится однако неточность, вслѣдствіе которой доказательства Ліувиля нельзя считать строгимъ; неточность эта, указанная *Genocchi* въ нижецитируемомъ его сочиненіи, состоитъ въ слѣдующемъ. Ліувиль доказываетъ, что для того, чтобы уравненіе:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left(A + \frac{B}{z^2}\right)u,$$

къ которому приводится уравненіе Риккати, имѣло алгебраическій интегралъ, необходимо, чтобы извѣстная система уравненій [1]) опредѣляла раціональную функцію v отъ z, и затѣмъ старается показать, что послѣднее обстоятельство не возможно; съ этою цѣлью онъ обнаруживаетъ, что раціональная функція v отъ z, буде она опредѣляется упомянутою системою уравненій, должна имѣть слѣдующій видъ, по разложеніи на цѣлую часть и простѣйшія дроби:

$$v = cz^{\nu} + c'z^{\nu-1} + \cdots\cdots + c^{(\varsigma)} z^{\nu-\varsigma},$$

гдѣ ν — цѣлое число, положительное, отрицательное или нуль; далѣе Ліувиль доказываетъ, что такая форма функціи v не возможна, причемъ изъ его разсужденій вытекаетъ, что онъ имѣлъ въ виду только случай $\nu > 0$. Съ легкимъ измѣненіемъ приведенное Ліувилемъ доказательство можно распространить и на случай $\nu < 0$, но оно не обнимаетъ случая $\nu = 0$, чего Ліувиль не замѣтилъ, такъ что изъ разсужденій Ліувиля отнюдь не слѣдуетъ, что функція v не можетъ имѣть формы:

$$v = c + c'z^{-1} + c''z^{-2} + \cdots\cdots + c^{(\lambda)} z^{-\lambda}.$$

Усмотрѣвъ этотъ недостатокъ, Genocchi, пользуясь методомъ, употребленнымъ Ліувилемъ въ его сочиненіи: „Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considerées comme fonctions de leur module" [2]), старался доказать инымъ способомъ, что условіе:

$$B = \beta(\beta + 1),$$

---

[1]) Система уравненій (12) гл. II ч. I настоящаго сочиненія.

[2]) Journ. de Liouv. 1840 t. V, p. 441—464.

гдѣ β цѣлое положительное число, или нуль, необходимо для того, чтобы предыдущее дифференціальное уравненіе второго порядка интегрировалось въ конечномъ видѣ. Если расположить систематически доказательство Genocchi, то оказывается, что оно ошибочно; между тѣмъ, какъ показано мною въ концѣ § 5 гл. II первой части настоящаго труда, случай $\nu=0$, упущенный Ліувилемъ, доказывается совершенно аналогично случаю $\nu \neq 0$.

Послѣ Ліувиля почти перестали заниматься уравненіемъ Риккати въ его первоначальной формѣ, а обратились къ болѣе общему уравненію, заключающему въ себѣ, какъ частный видъ Риккатіево уравненіе, а именно—къ уравненію:

$$\frac{dy}{dx}+Py^2+Qy+R=0,$$

гдѣ P, Q, R суть функціи x. Въ послѣднее время подъ названіемъ *уравненія Риккати* понимается именно это уравненіе (Мы его такъ и будемъ называть; первоначальное же уравненіе будемъ называть *частнымъ* уравненіемъ Риккати; функцію y, удовлетворяющую уравненію Риккати (обобщенному), будемъ называть *функціею Риккати*).

Результатъ, добытый Ліувилемъ, многіе математики (*Lebesgue*, *Malmstèn* и др.) старались примѣнить къ другимъ, болѣе общимъ уравненіямъ. Изъ математиковъ послѣ Ліувиля уравненіемъ Риккати частнаго вида занимались: *Lommel*, *Winckler*, *Helmling*, *Cayley*, *Glaisher* и др. *Ломмель* въ своихъ изслѣдованіяхъ надъ Бесселевыми функціями показалъ, что посредствомъ этихъ функцій можно обынтегрировать частное уравненіе Риккати. *Винклеръ* нашелъ новое выраженіе рѣшенія частнаго уравненія Риккати въ опредѣленныхъ интегралахъ. *Гельмлингъ*, по разсмотрѣніи различныхъ уравненій, приводящихся къ частному уравненію Риккати, выводитъ (довольно неизящно) признаки интегрируемости этого уравненія и затѣмъ излагаетъ способъ интегрированія Риккати по приближенію; изложеніе Гельмлинга весма вычурно и во многихъ мѣстахъ страдаетъ неясностью и неточностью. *Глайшеръ* выводитъ 6 различныхъ видовъ частныхъ интеграловъ частнаго уравненія Риккати въ формѣ безконечныхъ рядовъ и затѣмъ ищетъ зависимости между ними; такъ какъ частныхъ интеграловъ можно получить сколько угодно, то, слѣдовательно, изысканія Глайшера не представляютъ никакого особеннаго интереса; пользуясь найденными частными интегралами уравненія Риккати, Глайшеръ вычисляетъ два опредѣленныхъ интеграла, удовлетворяющихъ уравненію Риккати, затѣмъ онъ представляетъ частные интегралы этого уравненія въ символическомъ видѣ. Изысканія *Cayley* такого же рода, какъ изысканія Глайшера. На работахъ Glaisher'a и Cayley основана нижецитируемая работа *Баха*.

Изъ работъ, относящихся спеціально къ уравненію Риккати общаго вида, слѣдуетъ отмѣтить, какъ первую по времени, работу *Гилля*, который занимался *вычисленіемъ* раціональныхъ интеграловъ уравненія Риккати, въ которомъ P, Q, R суть раціональныя функціи x. Потомъ трактовали общее уравненіе Риккати такъ же, какъ и частное: изучали условія интегрируемости его въ квадратурахъ, находили зависимости между различными частными рѣшеніями уравненія и т. д. Сюда относятся, главнымъ образомъ, работы русскихъ математиковъ: *Лѣтникова*, *Флорова*, *Алексѣевскаго*, *Бугаева*, *Анисимова*. Отмѣтимъ еще работу *Максимовича*, который посредствомъ соображеній весьма общаго характера доказалъ невозможность интегрированія конечнымъ числомъ квадратуръ общаго уравненія Риккати въ общемъ видѣ.

Какъ извѣстно, въ новѣйшее время стали понимать задачу интегрированія дифференціальнаго уравненія совсѣмъ иначе, нежели прежде: новѣйшіе математики не довольствуются представленіемъ интегральной функціи въ томъ или другомъ видѣ, а стараются изучить свойства функціи, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ, на основаніи самаго дифференціальнаго уравненія Первые шаги въ этомъ направленіи сдѣлали *Briot* и *Bouquet* [1]); ихъ идеи развили и продолжали современные математики: *Fuchs*, *Poincaré*, *Painlevé*, *Picard*.

Какъ видно изъ предыдущаго обозрѣнія, литература уравненія Риккати очень обширна. Обиліе работъ, относящихся къ такому спеціальному вопросу, объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что уравненіе Риккати имѣетъ весьма важное значеніе не только въ чи-

---

[1]) *Briot et Bouquet.*—Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'école polytechnique. 1856 p. 133–198.

стой, но и въ прикладной математикѣ: кромѣ чисто аналитическаго интереса, представляемаго свойствами функцій Риккати, къ интегрированію уравненія Риккати приводятся многіе вопросы анализа, геометріи, физики и механики.

Въ настоящемъ сочиненіи я постарался: 1) собрать и систематически изложить всѣ болѣе важныя работы, относящіяся къ уравненію Риккати; 2) представить современное состояніе теоріи функцій, удовлетворяющихъ уравненію Риккати (теорію функцій Риккати); 3) разсмотрѣть задачи чистой и прикладной математики, находящіяся въ непосредственной связи съ уравненіемъ Риккати. Сообразно съ этимъ, я и раздѣлилъ свой трудъ на три части. Весь матеріалъ, почерпнутый изъ работъ, трактующихъ объ уравненіи Риккати, я старался разъяснить, видоизмѣнить, гдѣ оказалось нужнымъ, и, по возможности, пополнить.

Вотъ списокъ сочиненій, относящихся къ интересующему насъ вопросу (значеніе сокращеній названій періодическихъ изданій, встрѣчающихся, какъ въ этомъ спискѣ, такъ и въ текстѣ, объяснено въ концѣ сочиненія; римскія цыфры обозначаютъ томы, цыфры, заключенныя въ скобки,—серіи):

J. Riccati.—Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. Act. Erud. Sup. t. VIII 1724, p. 66—73.

D. Bernoulli.—Notata in praecedens schediasma. Act. Erud. Sup. t. VIII p. 73—75.

Chr. Goldbach.—De casibus quibus integrari potest aequatio differentialis $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ observationes quaedam. Com. Ac. P. t. I ad annum 1726. Petropoli 1728, p. 185—197.

N. Bernoulli.—Analysis aequationum quarundam differentialium. Com. Ac. P. t. I p. 198—207.

L. Euler.—Summatio fractionis continuae, cuius indices progressionem arithmeticam constituunt, dum numeratores omnes sunt unitates, ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones docetur. Opuscula analytica t. II Petropoli 1785. p. 217—239.

„ Institutiones calculi integralis (loc. cit.).

Poisson.—Mémoire sur les intégrales définies. Jour. Ec. Pol. 1813. cahier 16 p. 215—246.

E. E. Kummer.—Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies. Crel. J. XII 1834. p. 144—147.

Lobatto.—Sur l'intégration des équations: $\frac{d^n y}{dx^n} - xy = 0$ et $\frac{d^2 y}{dx^2} + abx^n y = 0$ par des intégrales définies. Crel. J. XVII 1837, p. 363—371.

Hill.—De radicibus rationalibus aequationis Riccatianae $\frac{dy}{dx} + a + by + cy^2 = 0$, ubi a, b, c functiones sunt rationales ipsius x. Crel. J. XXV 1843, p. 22—37. (Въ подлинникѣ производная $\frac{dy}{dx}$ обозначена символомъ: $\partial_x y$).

J Liouville.—Mémoire sur l'équation de Riccati. Jour. Ec. Pol. cahier 22, 1833. p. 1—19.

„ Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites. J. Liouv. IV 1839 p. 423—456.

„ Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati. J. Liouv. VI 1841. p. 1—13.

M. Besgue.—Sur l'équation $\frac{dy}{dx} + f(x) \sin y + F(x) \cos y + \varphi(x) = 0$. J. Liouv. XI 1846 p. 445.

Briot et Bouquet.—Recherches sur les propriétés etc. (loc. cit.).

S. Spitzer.—Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. 1860.

„ Integration einiger linearer Differentialgleichungen. Crel. J. 1880 t. LXXXVIII p. 343—347.

Ал. Лѣтниковъ.—Объ условіяхъ интегрируемости нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій. Мат. Сб. I 1866 стр. 297—350.

E. Lommel.—Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig. Teubner 1868.

„ Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Mat. Ann. III 1871 p. 475—487.

„ Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Mat. Ann. XIV p. 510—536.

Cayley.—Phil Mag. 1869.

Glaisher.—On the solution of a differential equation allied to Riccati's. Br. Rep. 1878 p. 469—470.

„ Phil. Mag. 1872.

„ On the relations between the particular integrals in Cayley's solution of Riccati's equation. Phil. Mag. 1879.

„ On Riccati's equation and its transformations, and on some definite integrals which satisfy them. Phil. Trans. CLXXII (3) 1881. p. 759—828. Proc. L. XXXII 1881 p. 444—446. Br. Rep. 1880. Proc. C. 1879.

„ On Riccati's equation. Qu. J. XI p. 267—273.

Glaisher.—On a differential equation allied to Riccati's. Qu. J. XII p. 129—137.

Bach.—De l'intégration par les series de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = y$. Ann. Nor. 1874 III (2) p. 47--68.

A. *Steen.*—Om Formen for integralet af den lineare Differentialligning af anden Orden. Forhandlungen af Kjobenhaven 1874 p. 1—12.

A. *Winckler.*—Integration zweier linearer Differentialgleichungen. Ber. Wien. LXXI Abt. II, 1875 p. 5—32.

Ed. Weyr.—Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Abh. Böh. VIII (6).

E. Picard.—Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches. Ann. Nor. (2). VI, 1877 p. 329—366.

A. *Genocchi.*—Sur l'équation de Riccati. C. R. LXXXV, 1877, p. 391—394.

R. Rawson.—On cognate Riccatian equations. Mess. (2) VII 1877—1878. p. 69—72.

„ Note on a transformation of Riccati's equation. Mess. (2) XII p. 34—36.

„ Solution of a question [5400]. Educ. Times XXVIII p. 76.

A. G. *Greenhill.*—On Riccati's equation and Bessel's equation. Qu. J. XVI, p. 294—298.

P. Helmling. — Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen. Gleichung: $\frac{dy}{dx} + y^2 = X$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. Dorpat 1879.

L. Königsberger.—Ueber den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen. Gött. Nach. 1880, p. 625—630.

„ Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten. Act. Mat. III 1883 p. 1—48. Gött. Nachr. 1883 p. 219—226.

E. Catalan.—Sur l'équation de Riccati. Bul. Belg. (2) XXXI p. 68—73.

W. Heymann. — Ueber eine Transformation der Differentialgleichung $\varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0$. Zeit. Mat. XXVII p. 374—380.

„ Zur Integration der Differentialgleichungen. Zeit. Mat. XXVII p. 1—40.

L. Autonne.—Sur la nature des intégrales algébriques de l'équation de Riccati. C. R. XCVI 1883 p. 1354—1356.

„ Sur la théorie des équations differentielles du premier ordre

et du premier degré. Jour. Ec. Pol. cah. 61, 1891, p. 35—122, cah. 62, 1892, p. 47—180.

П. С. Флоровъ.—Объ уравненіяхъ Риккати. Хар. сооб. 1884 г. стр. 5—35.

В. П. Алексѣевскій.—Замѣтка объ обобщеніи уравненія Риккати. Хар. сооб. 1884 г. стр. 80—82.

W. Meech.—Integration of Riccati's equation. An. of Mat. I p. 97—103 III p. 47—49.

В. П. Максимовичъ.—Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ, и доказательство невозможности такого интегрированія для общаго линейнаго уравненія второго порядка. Казань 1885 г.

J. M. de Tilly.—Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation. Bul. Belg. (3) IX p. 216—235. Mathesis V, supplement III p. 1—20.

A. R. Forsyth.—A particular method for the solution of some linear differential equations of the sec nd order. Mess. XV p. 44—48.

W. W. Johnson.—On the differential equation $\frac{dy}{dx}+y^2+Py+Q=0$. An. of Mat. III p. 112—115.

A. J. Stodółkiewicz. — Przyczynek do nauki o całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego. Akad. Krak. XV 1887 p. 36—43.

„ O pewnej klasie równań różniczkowych rzędu 1-go. Prace III, 1892, p. 52—54.

G. Darboux.—Sur l'équation de Riccati, въ сборникѣ п. з.: „In memoriam Dominici Chelini — collectanea mathematica nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami". Mediolani, 1881, p. 199—205.

„ Leçons sur la théorie générale de surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris 1887—9, I—II.

J. Cockle.—On the equation of Riccati. Proc. M. L. XVIII p. 180—202.

Циммерманъ. — О разложеніи въ непрерывную дробь функціи, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ: $M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2+Q=0$, гдѣ M, N, P, Q—цѣлыя раціональныя функціи. Новор. зап. X, 1889 стр. 1—139.

P. Painlevé.—Mémoire sur les équations differentielles du premier ordre. Ann. Nor. (3) VIII 1891 p. 9 — 58, 103 — 140, 201 — 226, 267—284.

Н. В. Бугаевъ. — Алгебраическіе частные интегралы дифференціальныхъ уравненій. Мат. Сб. XVII 1894 стр. 399—438.

В. А. Анисимовъ. — Уравненіе Риккати общаго вида. Варшава, 1896.

Кромѣ перечисленныхъ здѣсь сочиненій, объ уравненіи Риккати трактуютъ почти всѣ курсы по анализу и спеціальные курсы по теоріи дифференціальныхъ уравненій.

ЧАСТЬ I.
Теорія уравненія Риккати.

ГЛАВА I.
Интегрированіе уравненія Риккати частнаго вида.

§ 1. Признаки интегрируемости частнаго уравненія Риккати.

Будемъ писать частное уравненіе Риккати въ видѣ:

(1) $$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m;$$

коэффиціенты a и b завѣдомо отличны отъ нуля. Согласно *Эйлеру* [1]), замѣтимъ сначала, что уравненіе (1) интегрируется въ конечномъ видѣ при $m = 0$ и при $m = -2$. Дѣйствительно, при $m = 0$ уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$\frac{dy}{b - ay^2} = dx,$$

и въ немъ перемѣнныя раздѣлены, а при $m = -2$ уравненіе (1) имѣетъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{b}{x^2},$$

и подстановка $y = \frac{1}{z}$ преобразовываетъ его въ однородное уравненіе:

$$x^2dz = (ax^2 - bz^2)\, dx,$$

которое легко интегрируется.

---

[1]) *Euler*. — Institutiones calculi integralis, ed. 3. 1824, t. I, p. 271—5.

Для изысканія другихъ случаевъ интегрируемости уравненія (1) въ конечномъ видѣ, преобразуемъ его подстановкою:

$$y=\frac{1}{ax}-\frac{u}{x^2},$$

которая приведетъ уравненіе (1) къ виду:

$$\frac{du}{dx}=\frac{au^2}{x^2}-bx^{m+2},$$

и затѣмъ положимъ $x=\frac{1}{z}$, послѣ чего уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{du}{dz}+au^2=bz^{-m-4}. \qquad (2)$$

Сравнивая уравненіе (2) съ уравненіемъ (1), приходимъ къ слѣдующему заключенію: *если уравненіе* (1) *интегрируется при* $m=\mu$, *то оно интегрируется и при* $m=-\mu-4$.

Дальше, преобразовавъ уравненіе (1) подстановкою:

$$y=-\frac{1}{u},$$

мы представимъ его въ видѣ:

$$\frac{du}{dx}+a=bx^m u^2,$$

и затѣмъ, положивъ $x^{m+1}=z$, получимъ:

$$\frac{du}{dz}-\frac{b}{m+1}u^2=-\frac{a}{m+1}z^{-\frac{m}{m+1}}, \qquad (3)$$

откуда, черезъ сравненіе съ уравненіемъ (1), заключимъ, что *уравненіе* (1) *интегрируется при* $m=-\frac{\mu}{\mu+1}$, *если оно интегрируется при* $m=\mu$.

Такъ какъ уравненіе (1) интегрируется при $m=0$, то на основаніи перваго правила заключаемъ, что оно интегрируется при $m=-4$; отсюда на основаніи второго правила заключаемъ, что оно интегрируется при $m=-\frac{4}{3}$ и т. д. Примѣняя поочередно первое и второе правила и принимая во вниманіе значеніе $m=-2$, заключимъ, что *уравненіе* (1) *интегрируется въ конечномъ видѣ всякій разъ, когда* m *имѣетъ одно изъ значеній:*

$$0, -\frac{2}{1}, -\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}, \cdots\cdots \text{ad inf.},$$

т. е. *когда* m *равняется:*

$$m=\frac{-4k}{2k\pm1}\,(k=0,1,2,3,\ldots\ldots\infty).$$

Таковъ общеизвѣстный признакъ интегрируемости частнаго уравненія Риккати въ конечномъ видѣ.

Съ изложеннымъ методомъ *Эйлера* сходенъ методъ, употребляемый *Кэнигсбергеромъ* [1]). Для сравненія, изложимъ еще методъ *Буля* [2]), отличающійся отъ метода *Эйлера*.

Преобразовавъ уравненіе (1) подстановкою $y=\frac{z}{x}$, представимъ его въ видѣ:

$$x\frac{dz}{dx}-z+az^2=bx^{m+2}.$$

Разсмотримъ уравненіе нѣсколько болѣе общее, а именно:

$$x\frac{dy}{dx}-cy+ay^2=bx^n, \tag{4}$$

такъ что, желая примѣнить результаты, которые мы получимъ, къ уравненію Риккати, намъ нужно будетъ положить: $c=1$ и $n=m+2$. Преобразуемъ уравненіе (4) подстановкою:

$$y=A+\frac{x^n}{y_1},$$

гдѣ A — постоянное, произволомъ котораго воспользуемся; послѣ этого преобразованія уравненіе (4) приметъ видъ:

$$\frac{nx^n}{y_1}-\frac{x^{n+1}}{y_1^{\,2}}\cdot\frac{dy_1}{dx}-Ac-\frac{cx^n}{y_1}+a\left(A^2+\frac{2Ax^n}{y_1}+\frac{x^{2n}}{y_1}\right)=bx^n.$$

Опредѣлимъ теперь A изъ уравненія:

$$aA^2-cA=0,$$

такъ что $A=\frac{c}{a}$ или $A=0$; при этомъ наше дифференціальное уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$x\frac{dy_1}{dx}-(n-c+2aA)\,y_1+by_1^{\,2}=ax^n.$$

---

[1]) *Königsberger.*—Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig 1889 p. 272—275. Сравн. также: *Abbé Moigno.*—Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris, 1844 t. II, p. 468—471.

[2]) *Boole.*—A treatise on differential equations. 2 ed. Cambridge, 1865, p. 91—104.

Разсмотримъ сначала случай, когда $A=\frac{c}{a}$; употребленная нами подстановка въ этомъ случаѣ есть:

$$y=\frac{c}{a}+\frac{x^n}{y_1}, \tag{5}$$

а дифференціальное уравненіе имѣетъ форму:

$$x\frac{dy_1}{dx}-(n+c)y_1+by_1{}^2=ax^n.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (4), видимъ, что послѣднее сохранило свою форму, только вмѣсто коэффиціентовъ: c, a, b имѣемъ соотвѣтственно: $n+c, b, a$. Если вторично примѣнимъ подстановку формы (5), т. е. положимъ:

$$y_1=\frac{n+c}{b}+\frac{x^n}{y_2},$$

то наше дифференціальное уравненіе сохранитъ форму (4), причемъ упомянутые коэффиціенты будутъ соотвѣтственно $2n+c, a, b$. Послѣ i-кратнаго подобнаго преобразованія будемъ имѣть:

$$y_{i-1}=\frac{(i-1)n+c}{p}+\frac{x^n}{y_i},$$

$$x\frac{dy_i}{dx}-(in+c)y_i+qy_i^2=px^n, \tag{6}$$

гдѣ $p=a$ и $q=b$ при i нечетномъ, и $p=b$, $q=a$ при i четномъ. Сопоставляя полученное уравненіе (6) съ уравненіемъ (4), мы видимъ, что вмѣсто коэффиціентовъ c, a, b имѣемъ соотвѣтственно коэффиціенты: $in+c$, q, p, форма же уравненія не измѣнилась. Легко видѣть, что уравненіе (4) интегрируется въ конечномъ видѣ при $n=2c$; для этого стоитъ только положить въ немъ $y=zx^c$, послѣ чего перемѣнныя въ уравненіи раздѣляются. Отсюда заключаемъ, что преобразованное уравненіе (6) интегрируется въ конечномъ видѣ при условіи:

$$n=2(in+c),$$

т. е. если $\frac{n-2c}{2n}$ равняется цѣлому числу i (которое можетъ быть и нулемъ).

Принимая теперь $A=0$, будемъ имѣть подстановку вида:

$$y=\frac{x^n}{y_1}; \tag{7}$$

дифференціальное уравненіе представится въ видѣ:

$$x\frac{dy_1}{dx}-(n-c)y_1+by_1^2=ax^n,$$

такъ что опять уравненіе (4) сохраняетъ свою форму, но вмѣсто коэффиціентовъ c, a, b имѣемъ теперь соотвѣтственно: $n-c$, b, a. Вторичное употребленіе подстановки типа (7) привело бы обратно къ уравненію (4), поэтому станемъ дальше примѣнять подстановки типа (5), Послѣ $(i-1)$-кратнаго примѣненія послѣдняго рода подстановки будемъ имѣть, какъ легко видѣть:

$$y_{i-1}=\frac{(i-1)n-c}{p}+\frac{x^n}{y_i},$$

$$x\frac{dy_i}{dx}-(in-c)y_i+qy_i^2=px^n, \tag{8}$$

гдѣ опять $p=a$, $q=b$ при i нечетномъ и $p=b$, $q=a$ при i четномъ. Подобно предыдущему заключаемъ, что преобразованное уравненіе (8) непосредственно интегрируется при условіи:

$$n=2(in-c),$$

т. е. когда $\frac{n+2c}{2n}$ равно цѣлому числу i $(i=1, 2, \cdots\cdots)$. Итакъ признаки интегрируемости уравненія (4) суть:

$$\frac{n-2c}{2n}=i \quad (i=0,1,2,\cdots) \text{ и } \frac{n+2c}{2n}=i \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

и, слѣдовательно, признаки интегрируемости уравненія (1) суть:

$$\frac{m}{2m+4}=i \quad (i=0,1,2,\cdots) \text{ и } \frac{m+4}{2m+4}=i \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

или:

$$m=\frac{-4i}{2i-1}\,(i=0,1,\cdots\cdots) \text{ и } m=\frac{-4(i-1)}{2i-1}\,(i=1,2,\cdots\cdots).$$

Мѣняя во второмъ равенствѣ $i-1$ на i, мы представимъ его въ видѣ:

$$m = \frac{-4i}{2i+1} (i = 0, 1, \cdots\cdots),$$

такъ что можемъ оба полученныхъ признака соединить въ одинъ слѣдующій:

$$m = \frac{-4i}{2i+1} (i = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

(Замѣтимъ мимоходомъ, что мѣняя въ выраженіи перваго признака интегрируемости i на $-i$, мы представимъ его въ видѣ:

$$m = \frac{-4i}{2i+1} (i = 0, -1, -2, \cdots\cdots),$$

такъ что общій признакъ интегрируемости уравненія Риккати можетъ быть приведенъ въ виду:

$$m = \frac{-4i}{2i+1},$$

гдѣ i есть произвольное цѣлое число: положительное, отрицательное или нуль).

§ 2. Общій интегралъ частнаго уравненія Риккати при выполненіи условія интегрируемости.

Если условіе интегрируемости Риккатіева уравненія (1) въ конечномъ видѣ выполняется, то его общій интегралъ можетъ быть полученъ слѣдующимъ образомъ.

Если число m есть вида $\frac{-4i}{2i-1}$ $(i > 0)$, то по уравненію (1) составляемъ уравненіе (6), въ которомъ принимаемъ: $n = m+2$ и $c = 1$, т. е. уравненіе:

$$x \frac{dy_i}{dx} + \frac{1}{2i-1} y_i + q y_i^2 = p x^{\frac{-2}{2i-1}}.$$

Подстановкою

$$y_i = z x^{\frac{-1}{2i-1}}$$

приводимъ это уравненіе къ виду:

$$\frac{dz}{dx} = (p - qz^2) x^{\frac{-2i}{2i-1}},$$

послѣднее же уравненіе легко интегрируется и даетъ выраженіе z черезъ x и произвольное постоянное вида:

$$z = \varphi(x, C),$$

послѣ чего будемъ имѣть:

$$y_i = \varphi(x, C)\, x^{\frac{-1}{2i-1}}$$

и затѣмъ на основаніи подстановокъ типа (5) получимъ одну изъ формулъ:

$$y_k = \frac{\frac{-2k}{2i-1}+1}{a} + \frac{x^{\frac{-2}{2i-1}}}{y_{k+1}},$$

$$y_k = \frac{\frac{-2k}{2i-1}+1}{b} + \frac{x^{\frac{-2}{2i-1}}}{y_{k+1}}.$$

Такимъ образомъ найдемъ:

$$y = \frac{1}{a} + \frac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{y_1} = \frac{1}{a} + \cfrac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{\frac{2i-3}{2i-1}\cdot\frac{1}{b} + \cfrac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{y_2}} = \text{и т. д.},$$

такъ что окончательно будемъ имѣть:

$$y = \frac{1}{a} + \cfrac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{\frac{2i-3}{2i-1}\cdot\frac{1}{b} + \cfrac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{\frac{2i-5}{2i-1}\cdot\frac{1}{a} + \cfrac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{\frac{2i-7}{2i-1}\cdot\frac{1}{b} + \cdots + \cfrac{x^{-\frac{2}{2i-1}}}{\varphi(x, C)\, x^{-\frac{2}{2i-2}}}}}}.$$

Если число m есть вида $\frac{-4i}{2i+1} (i > 0)$, то, аналогично предыдущему случаю, приводимъ посредствомъ i преобразованій уравненіе (1) къ виду (8), въ которомъ вмѣсто i, n, c будетъ соотвѣтственно: $i+1$, $m+2$, 1, т. е. къ уравненію:

$$x\frac{dy_i}{dx} - \frac{1}{2i+1} y_i + q y_i^2 = p x^{\frac{2}{2i+1}},$$

послѣднее же подстановкою:

$$y_i = z x^{\frac{1}{2i+1}}$$

приводимъ къ виду:

$$\frac{dz}{dx} = (p - qz^2) x^{-\frac{2i}{2i+1}}.$$

Найдя изъ послѣдняго уравненія выраженіе z въ функціи x и произвольнаго постояннаго C вида:

$$z = \psi(x, C),$$

будемъ имѣть:

$$y_i = \psi(x, C) x^{\frac{1}{2i+1}},$$

такъ что на основаніи подстановокъ (7) и (5) найдемъ:

$$y = -\cfrac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{\frac{2i-1}{2i+1}\cdot\frac{1}{b} + \cfrac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{\frac{2i-3}{2i+1}\cdot\frac{1}{a} + \cfrac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{\frac{2i-5}{2i+1}\cdot\frac{1}{b} + \ddots + \cfrac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{\psi(x, C)\, x^{\frac{1}{2i+1}}}}}}.$$

Впрочемъ, для нахожденія общаго интеграла уравненія (1) въ случаѣ его интегрируемости можно пользоваться общими формулами, которыя даны будутъ въ слѣдующихъ параграфахъ.

§ 3. Интегрированіе уравненія Риккати безконечными рядами.

Для интегрированія уравненія (1) безконечнымъ рядомъ, удобно привести это уравненіе предварительно къ линейному. Простѣйшая подстановка, приводящая это уравненіе къ линейному уравненію второго порядка, есть:

$$y = \frac{1}{a}\cdot\frac{dlgz}{dx} = \frac{1}{az}\cdot\frac{dz}{dx}; \tag{9}$$

примѣняя ее, мы представимъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a x^m z, \tag{10}$$

гдѣ обозначено:

$$\alpha = ab.$$

Представимъ, буде это возможно, функцію z разложенною въ рядъ по восходящимъ степенямъ x; по самому виду уравненія (10) заключаемъ, что такое разложеніе будетъ имѣть видъ:

$$z = A_0 x^{\lambda} + A_1 x^{\lambda+m+2} + A_2 x^{\lambda+2m+4} + \ldots + A_i x^{\lambda+i(m+2)} + \ldots \tag{11}$$

Постараемся опредѣлить значеніе показателя λ и коэффиціентовъ A такимъ образомъ, чтобы выраженіе (11) удовлетворяло уравненію (10). Дифференцируя дважды выраженіе (11), найдемъ:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i [\lambda + i(m+2)] [\lambda + i(m+2) - 1] x^{\lambda + i(m+2) - 2},$$

такъ что уравненіе (10) представится въ видѣ:

$$A_0 \lambda (\lambda - 1) x^{\lambda-2} + A_1 (\lambda + m + 2)(\lambda + m + 1) x^{\lambda+m} +$$
$$+ A_2 (\lambda + 2m + 4)(\lambda + 2m + 3) x^{\lambda+2m+2} + \ldots = A_0 \alpha x^{\lambda+m} + A_1 \alpha x^{\lambda+2m+2} + \ldots$$

Обѣ части уравненія должны быть тождественно равны между собою; такъ какъ первый членъ не имѣетъ подобнаго, то его коэффиціентъ долженъ быть нулемъ. Предполагая, что $A_0 \neq 0$, будемъ имѣть условіе

$$\lambda (\lambda - 1) = 0,$$

изъ котораго опредѣлимъ λ, а именно:

$$\lambda = 0 \text{ или } \lambda = 1.$$

Принявъ сначала $\lambda = 0$, получимъ условное уравненіе:

$$A_1 (m+2)(m+1) x^m + A_2 (2m+4)(2m+3) x^{2m+2} + \ldots =$$
$$= A_0 \alpha x^m + A_1 \alpha x^{2m+2} + \ldots,$$

изъ котораго найдемъ слѣдующую рекуррентную формулу для опредѣленія коэффиціентовъ A:

$$i(m+2)[i(m+2) - 1] A_i = \alpha A_{i-1};$$

эта формула дастъ послѣдовательно:

$$A_1 = \frac{\alpha A_0}{(m+1)(m+2)}$$

$$A_2 = \frac{\alpha^2 A_0}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)}$$

. . . .

такъ что, принимая $A_0 = 1$, получимъ слѣдующую формулу, выражающую въ видѣ безконечнаго ряда частный интегралъ уравненія (10):

$$z_1 = 1 + \frac{\alpha x^{m+2}}{1.(m+1)(m+2)} + \frac{\alpha^2 x^{2m+4}}{1.2.(m+1)(2m+3)(m+2)^2} + \\ + \frac{\alpha^3 x^{3m+6}}{1.2.3(m+1)(2m+3)(3m+5)(m+2)^3} + \cdots\cdot \tag{12}$$

Принимая затѣмъ $\lambda = 1$, получимъ подобнымъ же образомъ второй частный интегралъ уравненія (10):

$$z_2 = x + \frac{\alpha x^{m+3}}{1.(m+3)(m+2)} + \frac{\alpha^2 x^{2m+5}}{1.2.(m+3)(2m+5)(m+2)^2} + \\ + \frac{\alpha^3 x^{3m+7}}{1.2.3(m+3)(2m+5)(3m+7)(m+2)^3} + \cdots\cdot \tag{13}$$

Примѣняя къ рядамъ (12) и (13) признакъ сходимости *Коши*, получимъ соотвѣтственно:

$$\lim_{p=\infty} \frac{u_{p+1}}{u_p} = \lim_{p=\infty} \frac{\alpha x^{m+2}}{p(pm+2p-1)(m+2)} = 0 \qquad \text{при } m \neq -2$$

$$\lim_{p=\infty} \frac{u_{p+1}}{u_p} = \lim_{p=\infty} \frac{\alpha x^{m+2}}{p(pm+2p+1)(m+2)} = 0 \qquad \text{при } m \neq -2,$$

такъ что ряды (12) и (13) сходятся на всей плоскости перемѣннаго x, если только m не равно -2; но при $m = -2$ нечего прибѣгать къ безконечнымъ рядамъ, потому что въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, уравненіе Риккати, слѣдовательно и уравненіе (10), интегрируются въ конечномъ видѣ.

Если станемъ искать интегралъ уравненія (10) въ формѣ безконечнаго ряда съ убывающими степенями x, то мы должны будемъ предположить:

$$z = A_0 x^\lambda + A_1 x^{\lambda-m-2} + A_2 x^{\lambda-2m-4} + \cdots\cdot; \tag{14}$$

вычисливъ по формулѣ (14) $\frac{d^2z}{dx^2}$ и вставивъ въ уравненіе (10), получимъ условное уравненіе:

$$A_0\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}+A_1(\lambda-m-2)(\lambda-m-3)x^{\lambda-m-4}+\cdots\cdots=$$
$$=A_0ax^{\lambda+m}+A_1ax^{\lambda-2}+A_2ax^{\lambda-m-4}+\cdots\cdots.$$

При $m\neq-2$ членъ $A_0ax^{\lambda+m}$ не имѣетъ себѣ подобнаго и не можетъ исчезнуть, такъ что послѣднее уравненіе не можетъ обратиться въ тождество; въ частномъ же случаѣ, при $m=-2$ всѣ показатели при x въ уравненіи (14) и въ послѣднемъ уравненіи становятся равными, независимо отъ λ. Поэтому заключаемъ, что въ формѣ (14) нельзя представить интеграла уравненія (10).

Зная два частныхъ рѣшенія z_1 и z_2 линейнаго уравненія второго порядка (10), тотчасъ же находимъ общее рѣшеніе этого уравненія въ формѣ:

$$z=C_1z_1+C_2z_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 — произвольныя постоянныя.

Выраженія (12) и (13) могутъ быть нѣсколько упрощены, если положимъ:

$$m+2=n,$$

такъ что предложенное уравненіе Риккати будетъ имѣть видъ:

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{n-2}, \tag{15}$$

а образованное изъ него линейное:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=ax^{n-2}z. \tag{16}$$

Будемъ имѣть общій интегралъ послѣдняго уравненія въ видѣ:

$$z=C_1\left[1+\frac{ax^n}{1.(n-1)n}+\frac{a^2x^{2n}}{1\cdot2(n-1)(2n-1)n^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{a^3x^{3n}}{1.2.3(n-1)(2n-1)(3n-1)n^3}+\cdots\right]+C_2x\left[1+\frac{ax^n}{1.(n+1)n}+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2x^{2n}}{1.2(n+1)(2n+1)n^2}+\frac{a^3x^{3n}}{1.2.3(n+1)(2n+1)(3n+1)n^3}+\cdots\right] \tag{17}$$

и затѣмъ, на основаніи преобразованія (9), заключимъ, что общій интегралъ уравненія Риккати (15) имѣетъ видъ:

$$y = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{\alpha x^{n-1}}{n-1}\left[1+\frac{\alpha x^n}{1.(2n-1)n}+\frac{\alpha^2 x^{2n}}{1.2(2n-1)(3n-1)n^2}+\cdots\right]+C\left[1+\frac{\alpha x^n}{1.n}+\frac{\alpha^2 x^{2n}}{1.2(n+1)n^2}+\cdots\right]}{1+\frac{\alpha x^n}{1.(n-1)n}+\frac{\alpha^2 x^{2n}}{1.2(n-1)(2n-1)n^2}+\cdots+Cx\left[1+\frac{\alpha x^n}{1.(n+1)n}+\frac{\alpha^2 x^{2n}}{1.2(n+1)n^2}+\cdots\right]}, \qquad (18)$$

гдѣ $C = \frac{C_2}{C_1}$ есть произвольное постоянное, а $\alpha = ab$.

Выраженіе (18) въ двухъ случаяхъ не представляетъ собою интеграла уравненія (15), а именно: когда число n имѣетъ видъ:

$$n = \frac{1}{i} \text{ или } n = -\frac{1}{i},$$

гдѣ i цѣлое положительное число. Если n равно $+\frac{1}{i}$, то, начиная съ нѣкотораго мѣста всѣ члены въ разложеніи z_1 становятся безконечно большими вслѣдствіе появленія въ знаменателяхъ множителя, равнаго нулю; если n равно $-\frac{1}{i}$, то происходитъ то же явленіе въ разложеніи z_2; поэтому при $n = +\frac{1}{i}$ имѣемъ только одинъ частный интегралъ z_2 уравненія (16), а при $n = -\frac{1}{i}$ имѣемъ только частный интегралъ z_1. Но въ обоихъ случаяхъ, на основаніи имѣющагося одного частнаго интеграла, можно непосредственно получить другой частный интегралъ, а слѣдовательно и общій интегралъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $n = -\frac{1}{i}$, такъ что имѣемъ одинъ только интегралъ z_1; будемъ имѣть тождественно:

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} = \alpha x^{n-2} z_1 .$$

Раздѣляя уравненіе (16) почленно на это уравненіе, получимъ:

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\frac{d^2 z_1}{dx^2}} = \frac{z}{z_1}$$

или:

$$z\frac{d^2z_1}{dx^2}-z_1\frac{d^2z}{dx^2}=0.$$

Интегрируя одинъ разъ послѣднее уравненіе, получимъ:

$$z_1\frac{dz}{dx}-z\frac{dz_1}{dx}=C'\ ^{1)}$$

или:

$$d\left(\frac{z}{z_1}\right)=C'\frac{dx}{{z_1}^2},$$

гдѣ C'—произвольное постоянное; интегрируя еще разъ, получимъ:

$$\frac{z}{z_1}=C'\int\frac{dx}{{z_1}^2}=C'\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{{z_1}^2}+C_1,$$

гдѣ C_1 новое произвольное постоянное, а x_0 — какое-нибудь значеніе x. Имѣемъ такимъ образомъ общій интегралъ уравненія (16):

$$z=C_1z_1+C'z_1\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{{z_1}^2}.$$

Подобнымъ же образомъ при $n=\frac{1}{i}$ получимъ общій интегралъ уравненія (16) въ видѣ:

$$z=C_2z_2+C''z_2\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{{z_2}^2}.$$

Не трудно найти форму разложенія въ безконечный рядъ найденныхъ частныхъ интеграловъ для $n=\pm\frac{1}{i}$. Въ случаѣ $n=-\frac{1}{i}$ мы нашли частное рѣшеніе:

$$z_2=z_1\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{{z_1}^2};$$

---

[1]) Эта формула можетъ быть получена также, какъ слѣдствіе изъ извѣстной формулы *Ліувиля*. См. *В. Анисимовъ*.—Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Москва 1889, стр. 22.

имѣемъ:

$$\frac{1}{z_1^2}=\left[1+\frac{ax^{-\frac{1}{i}}}{1\left(\frac{1}{i}+1\right)\frac{1}{i}}+\frac{a^2x^{-\frac{2}{i}}}{1.2\left(\frac{1}{i}+1\right)\left(\frac{2}{i}+1\right)\frac{1}{i^2}}+\cdots\right]^{-2}=$$

$$=1+\beta_1 x^{-\frac{1}{i}}+\cdots+\beta_{i-1}x^{-\frac{i-1}{i}}+\beta_i x^{-1}+\cdots$$

Умножая всѣ члены этого уравненія на dx и интегрируя, найдемъ съ точностью до аддитивнаго постояннаго:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{z_1^2}=x+\gamma_1 x^{1-\frac{1}{i}}+\gamma_2 x^{1-\frac{2}{i}}+\cdots+\gamma_{i-1}x^{\frac{1}{i}}+\gamma_{i+1}x^{-\frac{1}{i}}+$$

$$+\gamma_{i+2}x^{-\frac{2}{i}}+\cdots+\beta_i\, lgx.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$z_2=\beta_i\left[1+\frac{ax^{-\frac{1}{i}}}{1\left(\frac{1}{i}+1\right)\frac{1}{i}}+\frac{a^2x^{-\frac{2}{i}}}{1.2\left(\frac{1}{i}+1\right)\left(\frac{2}{i}+1\right)\frac{1}{i^2}}+\cdots\right]lgx+$$

$$+x+\delta_1 x^{1-\frac{1}{i}}+\delta_2 x^{1-\frac{2}{i}}+\cdots$$

Въ случаѣ $n=+\frac{1}{i}$, мы нашли второй частный интегралъ:

$$z_1=z_2\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{z_2^2};$$

поступая аналогично предыдущему случаю, мы найдемъ слѣдующую форму разложенія z_1 въ безконечный рядъ:

$$z_1=\varepsilon_1 x\left[1+\frac{ax^{\frac{1}{i}}}{1\left(\frac{1}{i}+1\right)\frac{1}{i}}+\frac{a^2x^{\frac{2}{i}}}{1.2\left(\frac{1}{i}+1\right)\left(\frac{2}{i}+1\right)\frac{1}{i^2}}+\cdots\right]lgx-$$

$$-1+\eta_1 x^{\frac{1}{i}}+\eta_2 x^{\frac{2}{i}}+\cdots.$$

Замѣтимъ, что въ полученныхъ разложеніяхъ коэффиціентъ при lgx есть также интегралъ уравненія (16). [1]).

---

[1]) Сравн. *В. Анисимовъ.*—Основанія и т. д. стр. 49.

§ 4. Интегрированіе частнаго уравненія Риккати опредѣленными интегралами.

Для представленія общаго интеграла уравненія Риккати посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ существуетъ нѣсколько пріемовъ. Мы изложимъ важнѣйшіе изъ нихъ, причемъ представимъ уравненіе Риккати преобразованнымъ въ линейное уравненіе (16).

Киттег рѣшаетъ интересующій насъ вопросъ косвеннымъ путемъ, представляя интегральную функцію уравненія (16) разложенною въ рядъ (17) и суммируя этотъ рядъ опредѣленными интегралами. Очевидно, достаточно умѣть суммировать рядъ:

$$f(\mu, x) = 1 - \frac{x}{1(\mu+1)} + \frac{x^2}{1\cdot 2(\mu+1)(\mu+2)} - \cdots;$$

тогда будемъ имѣть:

$$z = C_1 f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{ax^n}{n^2}\right) + C_2 f\left(\frac{1}{n}, -\frac{ax^n}{n^2}\right).\, x \tag{19}$$

Для опредѣленія суммы $f(\mu, x)$, поступимъ слѣдующимъ образомъ. Положимъ:

$$\varphi(x) = \cos 2\sqrt{x},$$

тогда будемъ имѣть:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{2^2 x}{2!} + \frac{2^4 x^2}{4!} - \frac{2^6 x^3}{6!} + \cdots;$$

на основаніи этого разложенія можемъ написать:

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} \varphi(xu)\, du = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k . 2^{2k} x^k u^k}{(2k)!}\, du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^k}{(2k)!} \int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}}\, du.$$

Обозначая послѣдній интегралъ, стоящій подъ знакомъ суммы, черезъ J_k, будемъ имѣть:

$$J_k = \int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}}\, du = \Big|_{u=0}^{u=1} (k-\tfrac{1}{2})\, u^{k-\frac{3}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_0^1 \frac{k-\frac{1}{2}}{\mu+\frac{1}{2}} u^{k-\frac{3}{2}}(1-u)^{\mu+\frac{1}{2}} du = \frac{2k-1}{2\mu+1}\int_0^1 \left[u^{k-\frac{3}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} - u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}}\right] du =$$

$$= \frac{2k-1}{2\mu+1} J_{k-1} - \frac{2k-1}{2\mu+1} J_k,$$

откуда найдемъ:

$$J_k = \frac{2k-1}{2(\mu+k)} J_{k-1} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2(\mu+k)(\mu+k-1)} J_{k-2} = \cdots = \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^k(\mu+1)(\mu+2)\ldots.(\mu+k)} J_0,$$

такъ что послѣ упрощеній получимъ:

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} \varphi(xu)\, du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(\mu+1)\cdots(\mu+k)} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} du =$$

$$= f(\mu, x) \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\mu-\frac{1}{2}} du$$

Полагая затѣмъ $u = v^2$, получимъ:

$$f(\mu, x) = \frac{\int_0^1 (1-v^2)^{\mu-\frac{1}{2}} \cos 2v\sqrt{x}\cdot dv}{\int_0^1 (1-v^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dv}.$$

Зная $f(\mu, x)$, легко получимъ на основаніи формулы (19) выраженіе z черезъ опредѣленные интегралы.

Найденное выраженіе для $f(\mu, x)$ имѣетъ смыслъ только при $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, такъ что изложеннымъ пріемомъ можно найти интегралъ уравненія (16) только при $n \geqslant 2$; но легко получить выраженіе интегральной функціи уравненія (16) черезъ опредѣленные интегралы, годное и для прочихъ значеній n. Съ этою цѣлью обозначимъ черезъ S_p сумму p первыхъ членовъ разложенія $f(\mu, x)$, тогда будемъ имѣть:

$$f(\mu, x) = S_p + \frac{(-1)^p x^p}{p!(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+p)}\left[1 - \frac{x}{(p+1)(\mu+p+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{(p+1)(p+2)(\mu+p+1)(\mu+p+2)} - \cdots\right].$$

Сумму ряда, стоящаго въ скобкахъ, можемъ вычислить подобно предыдущему. Для этого замѣтимъ соотношеніе:

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1} f(\mu+p, xu)\,du = \int_0^1 (1-u)^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k u^k}{k!(\mu+p+1)\cdots(\mu+p+k)}\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!(\mu+p+1)\cdots(\mu+p+k)} \int_0^1 u^k (1-u)^{p-1}\,du.$$

Обозначая послѣднiй интегралъ черезъ U_k, будемъ имѣть:

$$U_k = \int_0^1 u^k (1-u)^{p-1}\,du = \Big|_{u=0}^{u=1} k u^{k-1} (1-u)^{p-1} + \frac{k}{p} \int_0^1 u^{k-1} (1-u)^p\,du =$$

$$= \frac{k}{p} \int_0^1 [u^{k-1}(1-u)^{p-1} - u^k (1-u)^{p-1}]\,du = \frac{k}{p} U_{k-1} - \frac{k}{p} U_k,$$

откуда найдемъ:

$$U_k = \frac{k}{p+k} U_{k-1} = \frac{k(k-1)}{(p+k)(p+k-1)} U_{k-2} = \cdots\cdots =$$

$$= \frac{k!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+k)} U_0,$$

такъ что будемъ имѣть:

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1} f(\mu+p, xu)\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(\mu+p+1)\cdots(\mu+p+k)\,(p+1)\cdots(p+k)} \int_0^1 (1-u)^{p-1}\,du,$$

и слѣдовательно:

$$1 - \frac{x}{(p+1)(\mu+p+1)} + \cdots = p \int_0^1 (1-u)^{p-1} f(\mu+p, xu)\,du.$$

Вставляя это выраженiе въ формулу для $f(\mu, x)$, найдемъ:

$$f(\mu, x) = S_p + \frac{(-1)^p x^p}{(p-1)!(\mu+1)\cdots(\mu+p)} \int_0^1 (1-u)^{p-1} f(\mu+p, xu)\,du.$$

Подъ знакомъ интеграла выразимъ $f(\mu+p, xu)$ на основанiи ранѣе найденной формулы; тогда получимъ:

$$f(\mu,x)=S_p+Kx^p\int_0^1(1-u)^{p-1}du\int_0^1(1-v^2)^{\mu+p-\frac{1}{2}}\cos 2v\sqrt{xu}\,dv\,,$$

гдѣ обозначено:

$$K=\frac{(-1)^p}{(p-1)!(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+p)\int_0^1(1-v^2)^{\mu+p-\frac{1}{2}}dv}=constans.$$

Если $n<2$, и слѣдовательно $\mu<-\frac{1}{2}$, такъ что прежнею формулою для $f(\mu,x)$ нельзя пользоваться, то употребляемъ послѣднюю формулу, причемъ ничѣмъ не опредѣленное p выбираемъ такъ, чтобы удовлетворялось условіе:

$$\mu+p\geqslant-\tfrac{1}{2},\ \text{т. е. } p\geqslant-(\mu+\tfrac{1}{2}).$$

Такимъ образомъ по формулѣ (19) всегда можемъ написать общее рѣшеніе уравненія (16), выраженное черезъ опредѣленные интегралы, а затѣмъ уже не трудно получить интегралъ уравненія Риккати на основаніи преобразованія (9).

Совсѣмъ другимъ методомъ получаетъ выраженіе интегральной функціи уравненія (16) черезъ опредѣленные интегралы *Lobatto;* изложимъ его методъ.

Представимъ уравненіе (1) преобразованнымъ подстановкою (9) въ уравненіе (10), и постараемся удовлетворить послѣднему уравненію опредѣленнымъ интеграломъ:

$$z=\int_r^s e^{-ut}\,Udu, \tag{20}$$

гдѣ s и r—постоянные предѣлы, которые можемъ выбрать произвольно, параметръ t есть нѣкоторая произвольная функція x, а U—произвольная функція u. Дифференцируя уравненіе (20) по x дважды, найдемъ:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{dt}{dx}\int_r^s e^{-ut}\,Uu\,du$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\int_r^s e^{-ut}\,Uu^2du-\frac{d^2t}{dx^2}\int_r^s e^{-ut}\,Uudu.$$

Вставивъ послѣднее выраженіе въ уравненіе (10), будемъ имѣть:

$$(21)\qquad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \int_r^s e^{-ut} U u^2 du - \frac{d^2t}{dx^2}\int_r^s e^{-ut} U u du = \alpha x^m \int_r^s e^{-u} U du.$$

Опредѣлимъ теперь функцію t такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \alpha x^m,$$

откуда, полагая $m = 2(n-1)$, получимъ:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\alpha} x^{n-1},$$

$$t = \frac{\sqrt{\alpha}}{n} \cdot x^n,$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \sqrt{\alpha}(n-1)\, x^{n-2},$$

такъ что уравненіе (21) приметъ видъ:

$$\sqrt{\alpha}. x^{2(n-1)} \int_r^s e^{-ut} U(u^2-1) du - (n-1) x^{n-2} \int_r^s e^{-ut} U u du = 0,$$

или, такъ какъ $\sqrt{\alpha} = ntx^{-n}$, то имѣемъ:

$$(22)\qquad nt \int_r^s e^{-ut} U(u^2-1) du - (n-1) \int_r^s e^{-ut} U u du = 0.$$

Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int_r^s e^{-ut} U(u^2-1) du \cdot = \frac{1}{t} \Big/_{u=r}^{u=s} e^{-ut} U(1-u^2) - \frac{1}{t}\int_r^s e^{-ut} \cdot \frac{d[U(1-u^2)]}{du} du,$$

такъ что уравненіе (22) преобразуется въ слѣдующее:

$$(23)\qquad \Big/_{u=r}^{u=s} n e^{-ut} U(1-u^2) - \int_r^s e^{-ut}\left[(n-1) U u + n \cdot \frac{d[U(1-u^2)]}{du}\right] du = 0.$$

Опредѣлимъ теперь функцію U такъ, чтобы подынтегральное выраженіе въ уравненіи (23) исчезало тождественно; для этого интегрируемъ дифференціальное уравненіе:

$$(n-1) U u du + n(1-u^2) dU - 2n U u du = 0,$$

откуда находимъ:

$$\frac{dU}{U}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{udu}{1-u^2}$$

и слѣдовательно:

$$U=c(1-u^2)^{-\frac{n+1}{2n}},$$

гдѣ c — произвольное постоянное. Уравненіе (23) приметъ тогда видъ:

$$\Big/_{u=r}^{u=s} cne^{-ut}(1-u^2)^{\frac{n-1}{2n}}=0,$$

и будетъ, очевидно, удовлетворено тождественно, если выберемъ предѣлы соотвѣтственно равными 1 и ∞, въ предположеніи, что $\frac{n-1}{2n}$ не отрицательно, т. е. что n не лежитъ между 0 и 1, и слѣдовательно m не лежитъ между -2 и 0; тогда на основаніи уравненія (20) заключимъ, что уравненіе (10) имѣетъ частный интегралъ:

$$y=\int_1^{\infty} e^{-ut}(1-u^2)^{-\frac{n+1}{2n}}du=\int_1^{\infty} e^{-\frac{2u\sqrt{\alpha}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}(1-u^2)^{-\frac{m+4}{2m+4}}du.$$

Чтобы получить второй частный интегралъ уравненія (10), положимъ:

$$y=x\int_p^q e^{-ut}Udu$$

и поступимъ по предыдущему способу. Дифференцируя y два раза по x и вставляя выраженія y и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ уравненіе (10), получимъ.

$$\int_p^q e^{-ut}\left[x\frac{d^2t}{dx^2}-ux\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+2\frac{dt}{dx}\right]Uudu+\alpha x^{m+1}\int_p^q e^{-ut}Udu=0,$$

или, полагая опять:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2=\alpha x^m:$$

$$x\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\int_p^q e^{-ut}(1-u^2)Udu+\left(x\frac{d^2t}{dx^2}+2\frac{dt}{dx}\right)\int_p^q e^{-ut}Uudu=0.$$

Исключая такъ же, какъ и раньше, $\frac{dt}{dx}$ и $\frac{d^2t}{dx^2}$, получимъ уравненіе, отличающееся отъ уравненія (22) только знакомъ при n, такъ что въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$U = C(1-u^2)^{-\frac{n-1}{2n}},$$

а для опредѣленія предѣловъ интеграціи получимъ уравненіе:

$$\int_{u=p}^{u=q} Cne^{-ut}(1-u^2)^{\frac{n+1}{2n}} = 0,$$

такъ что можемъ принять $p=1$, $q=\infty$ съ условіемъ, что $\frac{n+1}{2n}$ не отрицательно, т. е. что n не содержится между 0 и -1, и, слѣдовательно, что m не содержится между -2 и -4. При этомъ условіи имѣемъ частный интегралъ уравненія (10):

$$y = x\int_1^\infty e^{-ut}(1-u^2)^{-\frac{n-1}{2n}}du = x\int_1^\infty e^{-\frac{2\sqrt{a}.u}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}(1-u^2)^{-\frac{m}{2m+4}}du.$$

Такимъ образомъ, если m не лежитъ между 0 и -4, имѣемъ общій интегралъ уравненія (10) въ видѣ:

$$y = C_1\int_1^\infty e^{-\frac{2u\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}(1-u^2)^{\frac{m+4}{2m+4}}du + C_2\int_1^\infty e^{-\frac{2u\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}(1-u^2)^{-\frac{m}{2m+4}}du.$$

Какъ легко видѣть, изложенный пріемъ *Lobatto* даетъ много произволу въ опредѣленіи формы интеграловъ; такъ нпр., полагая разъ:

$$y = \int_r^s (e^{ut}+e^{-ut})\,Udu,$$

другой разъ:

$$y = x\int_p^q (e^{ut}+e^{-ut})\,Udu,$$

Лобатто получаетъ при тѣхъ же соотвѣтственныхъ ограниченіяхъ, что и раньше, слѣдующіе два частныхъ интеграла:

$$y=\int_0^1 (e^{ut}+e^{-ut})(1-u^2)^{-\frac{n+1}{2n}}du=\int_0^1 \Big(e^{\frac{2u\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}+e^{-\frac{2u\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}\Big)(1-u^2)^{-\frac{m+4}{2m+4}}du,$$

$$y=x\int_0^1 (e^{ut}+e^{-ut})(1-u^2)^{-\frac{n-1}{2n}}du=x\int_0^1 \Big(e^{\frac{2u\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}+e^{-\frac{2u\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}}\Big)(1-u^2)^{-\frac{m}{2m+4}}du.$$

Въ заключеніе этого параграфа изложимъ еще методъ интегрированія дифференціальнаго уравненія (10) опредѣленными интегралами, употребляемый *Кёнигсбергеромъ* [1]).

На основаніи разложенія:

$$\cos(\mu \cos\omega)=1-\frac{\mu^2}{2!}\cos^2\omega+\frac{\mu^4}{4!}\cos^4\omega-\cdots$$

можемъ написать:

$$\int_0^\pi \cos(\mu\cos\omega)\sin^\beta\omega\, d\omega=\int_0^\pi \sin^\beta\omega\, d\omega-\frac{\mu^2}{2!}\int_0^\pi \cos^2\omega\sin^\beta\omega\, d\omega+\frac{\mu^4}{4!}\int_0^\pi \cos^4\omega\sin^\beta\omega\, d\omega-\cdots$$

гдѣ β произвольное постоянное число, большее, чѣмъ -1 (ибо при $\beta \leqq -1$ всѣ опредѣленные интегралы послѣдней формулы теряютъ смыслъ). Принимая во вниманіе соотношеніе:

$$\int_0^\pi \cos^{2\nu}\omega\sin^\beta\omega\, d\omega=\frac{1.3.5.\ldots.(2\nu-1)}{(2+\beta)(4+\beta)\ldots..(2\nu+\beta)}\int_0^\pi \sin^\beta\omega\, d\omega,$$

мы можемъ предыдущую формулу переписать въ видѣ:

$$\int_0^\pi \cos(\mu\cos\omega)\sin^\beta\omega\, d\omega=$$

$$=\int_0^\pi \sin^\beta\omega\, d\omega\Big[1-\frac{1}{\beta+2}.\frac{\mu^2}{2!}+\frac{1.3}{(\beta+2)(\beta+4)}.\frac{\mu^4}{4!}-\frac{1.3.5}{(\beta+2)(\beta+4)(\beta+6)}.\frac{\mu^6}{6!}+\cdots\Big].$$

Положимъ въ этой формулѣ:

$$\beta=-\frac{2}{m+2},\ \mu=\frac{2\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1},$$

---

[1]) *L. Königsberger*. — Lehrbuch der Theorie etc. стр. 327—330.

такъ что условіе $\beta > -1$ окажется равносильнымъ требованію, чтобы m не находилось между 0 и -2; тогда будемъ имѣть:

$$\int_0^\pi cos\left(\frac{2\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega\right)sin^{-\frac{2}{m+2}}\omega\,d\omega =$$

$$=\left[1+\frac{ax^{m+2}}{1(m+1)(m+2)}+\frac{a^2x^{2m+4}}{1.2(m+1)(2m+3)(m+2)^2}+\cdots\right]\int_0^\pi sin^{-\frac{2}{m+2}}\omega d\omega.$$

Сравнивая эту формулу съ формулою (12), выражающею въ формѣ безконечнаго ряда интегралъ уравненія (10), видимъ, что во второй части послѣдней формулы какъ разъ имѣемъ это выраженіе интеграла; поэтому, обозначая по прежнему этотъ частный интегралъ уравненія (10) черезъ z_1 и опуская постоянный множитель $\int_0^\pi sin^{-\frac{2}{m+2}}\omega\,d\omega$, не зависящій отъ x, будемъ имѣть:

$$z_1 = \int_0^\pi cos\left(\frac{2\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega\right)sin^{-\frac{2}{m+2}}\omega\,d\omega.$$

Замѣтивъ, что интегралъ (13) получается изъ интеграла (12), если въ немъ послѣдовательно: 1) перемѣнить m на $-m-4$, 2) замѣнить x на $\frac{1}{x}$ и 3) умножить всѣ члены на x [1]), мы тотчасъ же изъ найденнаго частнаго интеграла z_1 находимъ второй частный интегралъ z_2:

$$z_2 = x\int_0^\pi cos\left(\frac{2\sqrt{a}}{m+2}x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega\right)sin^{\frac{2}{m+2}}\omega\,d\omega.$$

На основаніи предыдущаго ограниченія относительно m заключаемъ, что z_2 представляетъ интегралъ уравненія (10) при условіи, чтобы m лежало внѣ промежутка отъ -2 до -4. Поэтому при $m > 0$ или $m < -4$ имѣемъ общій интегралъ уравненія (10):

---

[1]) Можно провѣрить, что, полагая въ уравненіи (10): $m = -\mu - 4$, $x = \frac{1}{\xi}, y = \frac{\eta}{\xi}$, получимъ уравненіе, съ нимъ тождественное.

$$z = C_1 \int_0^\pi \cos\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{m+2} x^{\frac{m}{2}+1} \cos\omega\right) \sin^{-\frac{2}{m+2}} \omega d\omega + C_2 x \int_0^\pi \cos\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{m+2} x^{\frac{m}{2}+1} \cos\omega\right) \sin^{\frac{2}{m+2}} \omega\, d\omega$$

или:

$$z = \int_0^\pi \cos\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{m+2} x^{\frac{m}{2}+1} \cos\omega\right) \sin^{\frac{2}{m+2}} \omega \left(C_1 \sin^{-\frac{4}{m+2}} \omega + C_2 x\right) d\omega;$$

при $0 > m > -4$ имѣемъ только одинъ частный интегралъ, а именно: при $0 > m > -2 - z_1$, а при $-2 > m > -4 - z_2$; при $m = 0$, $m = -2$, $m = -4$ уравненіе (10), какъ извѣстно, интегрируется въ конечномъ видѣ.

§ 5. Интегрированіе частнаго уравненія Риккати посредствомъ Бесселевыхъ функцій [1]).

Бесселева функція перваго рода $J^{(n)}(z)$ опредѣляется слѣдующею формулою:

$$J^{(n)}(z) = \frac{z^n}{2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z\cos\omega) \sin^{2n}\omega\, d\omega =$$

$$= \frac{z^n}{2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{iz\cos\omega} \sin^{2n}\omega\, d\omega = \frac{z^n}{2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} e^{izu} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} du,$$

причемъ аргументъ z можетъ принимать произвольныя комплексныя значенія, параметръ же n считается дѣйствительнымъ и большимъ чѣмъ $-\frac{1}{2}$. Бесселева функція второго рода $Y^{(n)}(z)$ опредѣляется формулою:

$$Y^{(n)}(z) = \frac{z^n}{\pi . 1 . 3 \ldots (2n-1)} \int_0^\pi \cos(z\cos\omega) \sin^{2n}\omega . \lg \sin^2\omega\, d\omega + \lg z . J^{(n)}(z) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{2^{p+1}}{p+1} n(n-1) \ldots (n-p) . \frac{J^{(n-p-1)}(z)}{z^{p+1}},$$

---

[1]) Содержаніе настоящаго параграфа цѣликомъ заимствовано изъ цитированнаго сочиненія *Ломмеля:* „Studien etc.“.

годною для n цѣлаго положительнаго, или $n=0$. Обѣ эти функціи удовлетворяютъ основному Бесселеву уравненію:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

и обладаютъ другими свойствами, характеризующими Бесселевы функціи. Изъ свойствъ Бесселевыхъ функцій, *Lommel* выводитъ слѣдующія два соотношенія, которымъ при цѣломъ $n \geqslant 0$ удовлетворяетъ также функція $Y^{(n)}(z)$: [1]).

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sqrt{x}\,J^{(n)}\left(x^{-\frac{1}{2n}}\right)\right]=-\frac{x^{-\frac{2n+1}{n}}}{(2n)^2}\sqrt{x}\,J^{(n)}\left(x^{-\frac{1}{2n}}\right) \tag{24}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\sqrt{x}\,J^{(n)}\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right]=-\frac{x^{\frac{1-2n}{n}}}{(2n)^2}\sqrt{x}\,J^{(n)}\left(x^{\frac{1}{2n}}\right). \tag{25}$$

На основаніи уравненія (24) заключаемъ, что функція

$$z=\sqrt{x}\,J^{(n}\left(x^{-\frac{1}{2n}}\right) \tag{26}$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{4n^2}x^{-\frac{2n+1}{n}}z;$$

положивъ:

$$x=\frac{\xi}{(-4\alpha n^2)^n}, \tag{27}$$

представимъ послѣднее уравненіе въ видѣ:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}=\alpha\xi^{-\frac{2n+1}{n}}z,$$

или, полагая:

$$-\frac{2n+1}{n}=m, \quad \text{т. е. } n=-\frac{1}{m+2} \tag{28}$$

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}=\alpha\xi^m z. \tag{10 bis}$$

---

[1]) *Lommel*, loc. cit. стр. 102, § 27, формулы (10) и (11).

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что получимъ частный интегралъ уравненія (10), если въ выраженіи (26) совершимъ преобразованія (27) и (28); пропустивъ послѣ этихъ преобразованій всѣ постоянные множители, получимъ:

$$z_1 = \sqrt{\xi}\, J^{\left(-\frac{1}{m+2}\right)}\left(\frac{2\sqrt{-\alpha}}{m+2}\xi^{\frac{m}{2}+1}\right).$$

Второй частный интегралъ уравненія (10 *bis*) получимъ на основаніи соотношенія (25). Обозначая опять черезъ z функцію:

$$z = \sqrt{x}\, J^{(n)}\left(x^{\frac{1}{2n}}\right), \tag{29}$$

заключимъ, что она удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{4n^2} x^{\frac{1-2n}{n}} z,$$

которое послѣ подстановокъ:

$$x = \xi(-4\alpha n^2)^n \tag{30}$$

$$\frac{1-2n}{n} = m, \text{ т. е. } n = \frac{1}{m+2} \tag{31}$$

преобразовывается въ уравненіе (10 *bis*); примѣняя къ выраженію (29) преобразованія (30) и (31), найдемъ, что уравненіе (10 *bis*) имѣетъ частный интегралъ вида:

$$z_2 = \sqrt{\xi}\, J^{\left(\frac{1}{m+2}\right)}\left(\frac{2\sqrt{-\alpha}}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}\right).$$

Мѣняя въ интегралахъ z_1 и z_2 букву ξ на x, получимъ два частныхъ интеграла уравненія (10), а его общій интегралъ будетъ:

$$z = \sqrt{x}\left[C_1 J^{\left(\frac{1}{m+2}\right)}(X) + C_2 J^{\left(-\frac{1}{m+2}\right)}(X)\right],$$

гдѣ обозначено:

$$X = \frac{2\sqrt{-\alpha}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}.$$

Необходимо замѣтить, что найденное выраженіе z представляетъ общій интегралъ уравненія (10) только при условіи, что $\frac{1}{m+2}$ не есть цѣлое число; въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{1}{m+2}$ равно цѣлому числу μ, то на основаніи свойства Бесселевой функціи J, выражаемаго уравненіемъ: [1]).

$$J^{(-\mu)}(z) = (-1)^{\mu} J^{(\mu)}(z),$$

заключимъ, что два найденныхъ частныхъ интеграла совпадаютъ; но съ другой стороны при цѣломъ n уравненіямъ (24) и (25) удовлетворяетъ и Бесселева функція втораго рода $Y^{(n)}(x)$, поэтому, въ случаѣ, когда $\frac{1}{m+2}$ есть цѣлое число, кромѣ интеграла z_1, имѣемъ второй частный интегралъ:

$$z_2 = \sqrt{x}\; Y^{\left(\frac{1}{m+2}\right)}\left(\frac{2\sqrt{-a}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right),$$

такъ что въ разсматриваемомъ случаѣ общій интегралъ уравненія (10) имѣетъ видъ:

$$z = \sqrt{x}\left[C_1 J^{\left(\frac{1}{m+2}\right)}(X) + C_2 Y^{\left(\frac{1}{m+2}\right)}(X)\right],$$

гдѣ X имѣетъ прежнее значеніе. Предыдущій анализъ исчерпываетъ всѣ случаи, за исключеніемъ случая $m = -2$, но въ этомъ случаѣ уравненіе (10) интегрируется непосредственно въ конечномъ видѣ.

---

[1]) *Lommel.*—Studien etc. стр. 10 формула Va.

ГЛАВА II.

Необходимыя условія интегрируемости частнаго уравненія Риккати въ конечномъ видѣ.

Въ предыдущей главѣ различными способами мы убѣдились, что условіе:

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1},$$

гдѣ i — цѣлое положительное число, или нуль, достаточно для того, чтобы уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m \tag{1}$$

имѣло общій интегралъ въ видѣ конечной функціи x (т. е. выражающійся конечнымъ числомъ алгебраическихъ функцій и элементарныхъ трансцендентныхъ). Въ настоящей главѣ будетъ доказано, что сказанныя условія не только достаточны для этого, но и необходимы.

Прежде чѣмъ приступить къ спеціально занимающему насъ вопросу, приведемъ въ сжатой формѣ нѣкоторыя основныя свойства алгебраическихъ функцій и изложимъ главнѣйшія изслѣдованія *Ліувиля* относительно трансцендентныхъ функцій, необходимыя для пониманія дальнѣйшаго.

§ 1. Нѣкоторыя свойства алгебраическихъ функцій.

Алгебраической функціею x называется, какъ извѣстно, корень y уравненія:

$$Z = X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots\cdots + X_{n-1} y + X_n = 0,$$

гдѣ X_0, $X_1, \ldots\ldots X_n$ — цѣлые полиномы по x, а n—цѣлое положительное число.

Алгебраическое уравненіе

$$Z = 0$$

называется *неприводимымъ*, если ни одинъ изъ его корней y не удовлетворяетъ другому алгебраическому уравненію степени ниже n-ой. Для того, чтобы уравненіе $Z=0$ было неприводимо, достаточно и необходимо, чтобы многочленъ Z не разлагался на произведеніе двухъ многочленовъ по y, коэффиціенты которыхъ были бы раціональныя функціи x.

Если алгебраическое уравненіе неприводимо, то среди его n корней: y_1, $y_2, \ldots\ldots y_n$ нѣтъ ни одного, равнаго нулю, и нѣтъ двухъ корней равныхъ между собою.

Если одинъ корень y_1 неприводимаго алгебраическаго уравненія $Z=0$ удовлетворяетъ другому алгебраическому уравненію: $U=0$ (приводимому или неприводимому), то и всѣ остальные корни перваго уравненія удовлетворяютъ второму уравненію.

§ 2. Доказательство трансцендентности нѣкоторыхъ функцій.

Всякая функція, которая не можетъ быть представлена, какъ корень алгебраическаго уравненія, называется *трансцендентною* функціею.

Докажемъ трансцендентность натуральнаго логариѳма lgx. Изъ аналитическаго опредѣленія этой функціи:

$$y = lgx = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

вытекаетъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Допустимъ, что y есть алгебраическая функція x, т. е. корень неприводимаго алгебраическаго уравненія:

$$f(x, y) = 0;$$

дифференцируя это уравненіе по x и принимая во вниманіе значеніе $\frac{dy}{dx}$, получимъ:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

что представляетъ новое алгебраическое уравненіе; такъ какъ последнему уравненію удовлетворяетъ одинъ корень уравненія $f = 0$, то ему должны удовлетворять и всѣ корни уравненія $f = 0$: пусть это уравненіе n-ой степени относительно y; обозначая его корни черезъ: $y_1, y_2, \ldots y_n$, будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x} = dy_1 = dy_2 = \cdots = dy_n = \frac{1}{n} d\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

или, называя коэффиціенты при y^n и y^{n-1} въ функціи f соотвѣтственно черезъ P и Q:

$$dlgx = -\frac{1}{n} d \frac{Q}{P},$$

$$lgx = -\frac{Q}{nP}.$$

Такъ какъ P и Q суть цѣлые многочлены по x, то заключаемъ, что y, будучи алгебраическою функціею x, можетъ быть только раціональная функція. Докажемъ, что y не можетъ быть раціональною функціею x.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, будетъ:

$$y = \frac{X}{Y},$$

гдѣ X и Y суть цѣлые многочлены по x, не имѣющіе общихъ множителей; тогда будемъ имѣть:

$$YX' - XY' = \frac{Y^2}{x},$$

откуда видимъ, что Y должно дѣлиться на x; полагаемъ поэтому:

$$Y = Zx^n,$$

причемъ Z, равно какъ и X, на x не дѣлятся, такъ что послѣднее уравненіе приметъ видъ:

$$nXZ = x(ZX' - XZ') - Z^2 x^n,$$

но это уравненіе абсурдно, такъ какъ правая часть дѣлится на x, лѣвая же не дѣлится; слѣдовательно, y не есть раціональная функція x; такимъ образомъ доказано, что y есть трансцендентная функція x.

Изъ доказаннаго вытекаетъ, какъ прямое слѣдствіе, трансцендентность функціи:

$$\Phi(x) = lg F(x),$$

гдѣ $F(x)$ есть алгебраическая функція x; дѣйствительно, если $F(x) = z$ есть алгебраическая функція x, то и x есть алгебраическая функція z: $x = F_1(z)$; такимъ образомъ, если бы $\Phi(x)$ было алгебраическою функціею x, то на основаніи уравненія:

$$lgz = \Phi[F_1(z)],$$

очевидно, мы заключили бы, что lgz есть алгебраическая функція, что не возможно.

Такъ же легко доказать, на основаніи предыдущаго, что e^x есть трансцендентная функція. По опредѣленію функціи $y = e^x$ имѣемъ:

$$lgy = x,$$

откуда видимъ, что y не можетъ быть алгебраическою функціею x. Подобнымъ же образомъ можно доказать, что функціи: $e^{f(x)}$, $F(x) e^{f(x)}$, гдѣ f и F суть знаки алгебраическихъ функцій, трансцендентны.

Функція:

$$F = F_1(x) e^{f_1(x)} + F_2(x) e^{f_2(x)},$$

гдѣ F_1, F_2, f_1 и f_2 алгебр. функціи x, не можетъ быть алгебраическою; дѣйствительно, дифференцируя, найдемъ.

$$F' = e^{f_1}(F_1 f_1' + F_1') + e^{f_2}(F_2 f_2' + F_2');$$

исключая e^{f_1} изъ выраженій для F и F', получимъ:

$$[F_1(F_2f_2'+F_2')-F_2(F_1f_1'+F_1')]e^{f_2}=F_1F_1'-F(F_1f_1'+F');$$

такъ какъ лѣвая часть послѣдняго уравненія есть трансцендентная функція, то функція F не можетъ быть алгебраическою; это уравненіе было бы возможно въ случаѣ алгебраической функціи F только тогда, когда множитель при e^{f_2} былъ бы тождественно равенъ нулю, но тогда мы имѣли бы:

$$\frac{dlgF}{dx}=\frac{df_1}{dx}+\frac{dlgF_1'}{dx},$$

и слѣдовательно:

$$C\frac{F}{F_1}=e^{f_1},$$

что опять абсурдно, если F — алгебраическая функція.

Такъ же докажемъ, что всякая функція вида:

$$\Sigma F_i(x)e^{f_i(x)},$$

гдѣ всѣ F_i и f_i — алгебраическія функціи, есть функція трансцендентная.

§ 3. Классификація элементарныхъ трансцендентныхъ функцій.

Всѣ элементарныя трансцендентныя функціи (показательная, логариѳмическая, тригонометрическія, круговыя, степенныя при ирраціональномъ или комплексномъ показателѣ) сводятся къ двумъ основнымъ: lgx и e^x.

Всякая функціональная зависимость, содержащая конечное число алгебраическихъ, логариѳмическихъ и показательныхъ функцій, даетъ т. н. *конечныя* функціи, которыя дѣлятся на явныя и неявныя. Конечная функція называется *явною,* если она можетъ быть представлена въ видѣ:

$$y=F(x),$$

гдѣ $F(x)$ содержитъ конечное число функцій: алгебраическихъ, логариѳмическихъ и показательныхъ; если же функція y опредѣляется уравненіемъ вида:

$$f(x, y)=0,$$

гдѣ f — конечная функція относительно x и относительно y, и не можетъ быть представлена въ видѣ:

$$y = F(x),$$

то y называется *неявною* функціею x. Такъ нпр. функція y, опредѣляемая уравненіемъ:

$$lgy = xy,$$

есть конечная неявная. Алгебраическая функція y считается явною функціею перемѣннаго x даже въ томъ случаѣ, когда алгебраическое уравненіе, опредѣляющее эту функцію, не разрѣшимо относительно y [1]). Въ послѣдующемъ, говоря о конечныхъ функціяхъ, будемъ имѣть въ виду только явныя конечныя функціи.

Конечныя функціи *Ліувиль* дѣлитъ на *порядки* (éspèces). Условимся называть алгебраическія функціи *трансцендентными функціями нулевого порядка*. Функцію $y = F(x)$ будемъ называть *трансцендентною перваго порядка*, если въ ней символы логариѳмическихъ и показательныхъ функцій относятся непосредственно къ алгебраическимъ функціямъ, такъ что трансцендентная функція 1-го порядка есть алгебраическая функція отъ аргументовъ: x, lgu, e^v, гдѣ u и v — алгебраическія функціи x. Вообще, будемъ называть функцію перемѣннаго x *трансцендентною n-го порядка*, если въ ней знаки логариѳмическихъ и показательныхъ функцій относятся непосредственно къ трансцендентнымъ $(n-1)$-го порядка, такъ что общій видъ трансцендентной функціи n-го порядка есть:

$$y = f(lg\varphi, e^{\psi}, \chi),$$

гдѣ f есть знакъ алгебраической функціи отъ всѣхъ аргументовъ, изъ функцій φ и ψ одна есть трансцендентная $(n-1)$-го порядка, дру-

---

[1]) *Liouville* называетъ такую функцію: „une fonction bien définie“. Сравн. его мемуаръ: „Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients“. J. Liouv. II 1837 p. 56—104. Тамъ же онъ доказываетъ (стр. 76 — 85), что логариѳмическая функція не можетъ быть явно выражена черезъ однѣ алгебраическія и показательныя, и, обратно, показательная функція не можетъ быть явно выражена черезъ однѣ алгебраическія и логариѳмическія.

гая же — не выше $(n-1)$-го порядка, а χ—трансцендентная порядка не выше $(n-1)$-го.

Трансцендентную функцію n-го порядка вида $lg\varphi$ или e^{φ} (φ — трансц. $(n-1)$-го порядка), будемъ называть *одночленною.* Трансцендентныя функціи, содержащія только символы логариѳмовъ или только символы показательныхъ функцій, называются соотвѣтственно *чисто-логариѳмическими* или *чисто-показательными* функціями.

Легко замѣтить, что порядокъ трансцендентной функціи не ниже порядка ея производной.

Иногда функція можетъ быть только по виду трансцендентною n-го порядка, на самомъ же дѣлѣ она можетъ быть послѣ упрощенія представлена, какъ функція низшаго порядка; такъ нпр. функція e^{lgx} повидимому есть трансцендентная 2-го порядка, хотя она въ дѣйствительности есть алгебраическая; функція e^{x+2lgx}, повидимому трансцендентная 2-го порядка, приводится въ виду: x^2e^x и есть слѣдовательно трансцендентная 1-го порядка. Трансцендентная функція можетъ быть изображена въ различной формѣ, причемъ она состоитъ изъ различнаго числа одночленныхъ функцій; будемъ называть *каноническою* ту форму трансцендентной функціи n-го порядка, которая содержитъ наименьшее число одночленныхъ функцій n-го порядка.

Трансцендентныя функціи, приведенныя къ каноническому виду, обладаютъ нѣкоторыми особенными свойствами.

Пусть

$$u = f(x, \theta, \eta, \ldots \lambda)$$

будетъ трансцендентная функція 1-го порядка, такъ что f есть алгебраическая функція отъ всѣхъ аргументовъ, а $\theta, \eta, \ldots \lambda$ суть одночленныя функціи 1-го порядка числомъ μ; пусть, кромѣ того, написанный видъ функціи u каноническій, т. е. допускаемъ, что нѣтъ трансцендентной функціи 1-го порядка, тождественной съ u и имѣющей меньше одночленныхъ функцій 1-го порядка, чѣмъ μ; утверждаемъ тогда, что *всякая алгебраическая зависимость между* $x, \theta, \eta, \ldots \lambda$, *есть тождество;* такъ что, если найдемъ какую-нибудь алгебраическую зависимость между $x, \theta, \eta \ldots \lambda$, то она будетъ удовлетворена, если вмѣсто $x, \theta, \eta \ldots \lambda$ возьмемъ какія-нибудь числа: $x, a_1, a_2, \ldots a_\mu$, зависящія отъ x или постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы имѣли алгебраическую зависимость:

$$\varphi(x, \theta, \eta, \dots \lambda) = 0$$

не тождественную, то изъ нея мы могли бы выразить нпр. θ, какъ алгебраическую функцію етъ $x, \eta, \dots \lambda$, и, вставивъ это выраженіе θ въ функцію f, мы уменьшили бы въ ней число одночленныхъ трансцендентныхъ, что противорѣчило бы нашему предположенію. Итакъ зависимость $\varphi = 0$ есть тождество, и имѣемъ тождественно:

$$\varphi(x, a_1, a_2, \dots a_\mu) = 0,$$

какія бы ни были постоянныя или перемѣнныя $a_1, a_2, \dots a_\mu$.

Доказанное свойство принадлежитъ также трансцендентнымъ функціямъ высшихъ порядковъ. Пусть дана трансцендентная функція n-го порядка U въ канонической формѣ:

$$U = F(\Theta, \mathrm{H}, \dots \Lambda, \mathrm{X}),$$

гдѣ F есть знакъ алгебраической функціи отъ всѣхъ аргументовъ, X — трансцендентная не выше $(n-1)$-го порядка, а $\Theta, \mathrm{H}, \dots \Lambda$ — μ одночленныхъ трансцендентныхъ n-го порядка. Утверждаемъ тогдэ, что между функціями: Θ, $\mathrm{H}, \dots \Lambda$ и любыми трансцендентными порядка ниже n-го не можетъ существовать алгебраической зависимости; дѣйствительно, при существованіи подобной зависимости мы могли бы изъ нея выразить нпр. Θ въ функкіи $\mathrm{H}, \dots \Lambda$ и трансцендентныхъ низшихъ порядковъ и, вставивъ это выраженіе Θ въ функцію F, мы уменьшили бы число одночленныхъ трансцендентныхъ n-го порядка, входящихъ въ составъ функціи F, между тѣмъ, какъ мы предположили, что эта функція представлена въ каноническомъ видѣ. На основаніи этого свойства, если мы найдемъ какое-нибудь алгебраическое соотношеніе между Θ, $\mathrm{H}, \dots \Lambda$ и трансцендентными порядка ниже n-го, то это соотношеніе не нарушится, если мы въ немъ замѣнимъ функціи $\Theta, \mathrm{H}, \dots \Lambda$ произвольными постоянными или функціями.

§ 4. Лемма[1]). При α комплексномъ или ирраціональномъ функція $y = x^\alpha$ есть трансцендентная второго порядка.

Докажемъ прежде всего, что предложенная функція трансцендентна.

---

[1]) Помѣщаемъ эту лемму здѣсь, чтобы потомъ не прерывать хода разсужденія.

Дифференцируя ее, убѣждаемся, что она удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$x\frac{dy}{dx}=\alpha y, \tag{2}$$

и намъ предстоитъ доказать, что это уравненіе не имѣетъ алгебраическаго интеграла. Пусть уравненію (2) удовлетворяетъ какой-нибудь корень неприводимаго алгебраическаго уравненія μ-ой степени:

$$f(x,y)=0; \tag{3}$$

дифференцируя послѣднее уравненіе, получимъ:

$$f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}=0, \tag{4}$$

или, на основаніи уравненія (2):

$$xf'_x+\alpha yf'_y=0. \tag{5}$$

Послѣднее уравненіе - алгебраическое, и такъ какъ ему удовлетворяетъ одинъ корень уравненія (3), то ему удовлетворяютъ и всѣ корни: y_1, $y_2, \dots y_\mu$ этого уравненія; но тѣ же корни удовлетворяютъ, очевидно, уравненію (4), поэтому, сравнивая уравненія (4) и (5), заключаемъ, что всѣ корни: y_1, $y_2, \dots y_\mu$ суть частные интегралы уравненія (2). Составивъ функцію:

$$y_0=\sqrt[\mu]{y_1\, y_2 \cdots\cdots y_\mu},$$

легко убѣдимся, что и она удовлетворяетъ уравненію (2); но съ другой стороны, такъ какъ всѣ y_i отличны отъ нуля, то произведеніе $y_1, y_2, \dots y_\mu$ также отлично отъ нуля и, какъ раціональная симметрическая функція отъ корней уравненія (3), оно можетъ быть представлено въ видѣ раціональной функціи отъ коэффиціентовъ этого уравненія, такъ что можемъ написать:

$$y_1\cdot y_2 \cdots \cdot y_\mu=\frac{X}{Y},$$

гдѣ X и Y цѣлые многочлены по x, не имѣющіе общаго множителя; поэтому будемъ имѣть:

$$y_0=\sqrt[\mu]{\frac{X}{Y}};$$

дифференцируя послѣднее выраженіе, получимъ:

$$\frac{dy_0}{dx}=\frac{y_0}{\mu}\cdot\frac{YX'-XY'}{XY},$$

или, на основаніи уравненія (2).

$$\frac{x}{\mu}(YX'-XY')=\alpha XY,$$

отсюда заключаемъ, что XY должно дѣлиться на x; но, такъ какъ X и Y взаимно просты, то либо X дѣлится на x, либо Y. Допустимъ сначала, что X дѣлится на x, такъ что:

$$X=Zx^n,$$

причемъ Z на x не дѣлится, а n—цѣлое положительное число. Вычисливъ X' и вставивъ въ предыдущую зависимость, получимъ:

$$\left(\frac{n}{\mu}-\alpha\right)YZ=\frac{x}{\mu}(ZY'-YZ').$$

Если α ирраціональное число, или комплексное, то $\frac{n}{\mu}-\alpha$ всегда отлично отъ нуля, такъ что правая часть этого уравненія дѣлится на x, а лѣвая не дѣлится, что представляетъ, конечно, абсурдъ. Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и Y не можетъ дѣлиться на x; слѣдовательно y не можетъ быть алгебраическою функціею x.

Убѣдившись, что y есть трансцендентная функція, опредѣлимъ порядокъ ея трансцендентности. Изъ уравненія:

$$y=e^{\alpha\, lgx}$$

заключаемъ, что этотъ порядокъ не выше второго, поэтому, если мы докажемъ, что y не есть трансцендентная перваго порядка, то мы тѣмъ же самымъ докажемъ, что y есть трансцендентная 2-го порядка.

Положимъ, что посредствомъ какихъ-либо преобразованій удается представить y, какъ трансцендентную 1-го порядка; приведемъ тогда число одночленныхъ трансцендентныхъ перваго порядка къ minimum; пусть одна изъ этихъ одночленныхъ трансцендентныхъ будетъ логариѳмическая: $\theta=lgu$, гдѣ u — алгебраическая функція; обозначая совокупность остальныхъ одночленныхъ трансцендентныхъ, входящихъ въ составъ y, черезъ Φ, будемъ имѣть:

$$y = \varphi(x, \Phi, \theta),$$

гдѣ φ — знакъ алгебраической функціи отъ всѣхъ ея аргументовъ. Дифференцируя по x, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x + \varphi'_\theta \cdot \frac{u'}{u},$$

гдѣ φ'_x обозначаетъ производную, взятую по явно входящему x и по x, входящему въ φ черезъ Φ, а φ'_θ — производную по явно входящему θ. Изъ опредѣленія же функціи y находимъ:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x},$$

такъ что имѣемъ:

$$\varphi'_x + \varphi'_\theta \frac{u'}{u} = \frac{\alpha}{x} \varphi.$$

Мы получимъ такимъ образомъ алгебраическую зависимость между θ и другими трансцендентными, входящими въ составъ φ; на основаніи доказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ заключаемъ, что эта зависимость не нарушится, если θ замѣнимъ черезъ $\mu + \theta$, гдѣ μ — произвольное постоянное, такъ что имѣемъ:

$$\frac{d}{dx} \varphi(x, \Phi, \mu + \theta) = \frac{\alpha}{x} \varphi(x, \Phi, \mu + \theta)$$

и слѣдовательно:

$$\frac{d\varphi(x, \Phi, \mu + \theta)}{\varphi(x, \Phi, \mu + \theta)} = \frac{d\varphi(x, \Phi, \theta)}{\varphi(x, \Phi, \theta)},$$

отсюда, интегрируя, найдемъ:

$$\varphi(x, \Phi, \mu + \theta) = A \varphi(x, \Phi, \theta),$$

гдѣ A — нѣкоторое постоянное; если при $x = a$ будетъ: $\Phi = b$ и $\theta = c$, то найдемъ:

$$A = \frac{\varphi(a, b, \mu + c)}{\varphi(a, b, c)},$$

такъ что будемъ имѣть:

$$\varphi(a, b, c) \,.\, \varphi(x, \Phi, \mu + \theta) = \varphi(a, b, \mu + c) \,.\, \varphi(x, \Phi, \theta);$$

Продифференцируемъ это уравненіе по μ и послѣ дифференцированія положимъ $\mu = 0$; замѣтивъ, что:

$$\varphi'_{\mu}(x, \Phi, \mu+\theta) = \varphi'_{\theta}(x, \Phi, \mu+\theta),$$

$$\varphi'_{\mu}(a, b, \mu+c) = \varphi'_{c}(a, b, \mu+c),$$

будемъ имѣть:

$$\varphi(a, b, c) \,.\, \varphi'_{\theta}(x, \Phi, \theta) = \varphi'_{c}(a, b, c) \,.\, \varphi(x, \Phi, \theta),$$

или, замѣняя θ черезъ произвольный перемѣнный параметръ λ:

$$\frac{\varphi'_{\lambda}(x, \Phi, \lambda)}{\varphi(x, \Phi, \lambda)} = \frac{\varphi'_{c}(a, b, c)}{\varphi(a, b, c)}.$$

Умножая обѣ части этого уравненія на $d\lambda$ и интегрируя получимъ:

$$lg\, \varphi(x, \Phi, \lambda) = \frac{\varphi'_{c}(a, b, c)}{\varphi(a, b, c)} \lambda + B,$$

гдѣ B есть функція, не зависящая явнымъ образомъ отъ λ; но послѣднее уравненіе нелѣпо, потому что оно выражаетъ, что логариѳмъ отъ алгебраической функціи отъ λ есть алгебраическая функція отъ λ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что y, будучи выражено, какъ трансцендентная перваго порядка въ каноническомъ видѣ, не можетъ содержать логариѳмовъ; слѣдовательно, если возможно такое выраженіе функціи y, то она можетъ содержать однѣ только показательныя функціи. Пусть одна изъ нихъ будетъ: $\theta = e^u$, гдѣ u — алгебраическая функція x; можемъ опять представить:

$$y = \varphi(x, \Phi, \theta),$$

гдѣ Φ есть совокупность всѣхъ остальныхъ трансцендентныхъ. Дифференцируя по x, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x + \varphi'_{\theta}\, \theta\, u',$$

гдѣ φ'_x и φ'_{θ} имѣютъ тѣ же значенія, что и раньше. Отсюда найдемъ:

$$\frac{\varphi'_x(x, \Phi, \theta) + \varphi'_{\theta}(x, \Phi, \theta)\, \theta\, u'}{\varphi(x, \Phi, \theta)} = \frac{\alpha}{x}.$$

Опять имѣемъ право замѣнить въ послѣднемъ уравненіи θ черезъ $\mu\theta$, гдѣ μ — произвольное постоянное; послѣ этого получимъ:

$$\frac{\varphi'_x(x, \Phi, \mu\theta) + \varphi'_\theta(x, \Phi, \mu\theta) \, . \, \mu\theta u'}{\varphi(x, \Phi, \mu\theta)} = \frac{\alpha}{x},$$

причемъ въ этой формулѣ подъ $\varphi'_\theta(x, \Phi, \mu\theta)$ понимаемъ результатъ подстановки $\mu\theta$ вмѣсто θ въ функцію: $\varphi'_\theta(x, \Phi, \theta)$. Сравнивая послѣднія два уравненія, получимъ:

$$\frac{d\varphi(x, \Phi, \mu\theta)}{\varphi(x, \Phi, \mu\theta)} = \frac{d\varphi(x, \Phi, \theta)}{\varphi(x, \Phi, \theta)},$$

откуда послѣ интегрированія найдемъ:

$$\varphi(a, b, c) \, \varphi(x, \Phi, \mu\theta) = \varphi(a, b, \mu c) \, \varphi(x, \Phi, \theta),$$

гдѣ опять b и c суть соотвѣтственно значенія Φ и θ для $x = a$. Продифференцируемъ это уравненіе по μ и послѣ дифференцированія положимъ $\mu = 1$. Замѣтивъ, что:

$$\varphi'_\mu(x, \Phi, \mu\theta) = \frac{\theta}{\mu} \varphi'_\theta(x, \Phi, \mu\theta),$$

$$\varphi'_\mu(a, b, \mu c) = \frac{c}{\mu} \varphi'_c(a, b, \mu c),$$

получимъ:

$$\theta \, . \, \varphi(a, b, c) \, \varphi'_\theta(x, \Phi, \theta) = c\varphi'_c(a, b, c) \, \varphi(x, \Phi, \theta),$$

или:

$$\frac{\varphi'_\theta(x, \Phi, \theta)}{\varphi(x, \Phi, \theta)} = \frac{c\varphi'_c(a, b, c)}{\varphi(a, b, c)} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{m}{\theta},$$

причемъ для краткости обозначено:

$$m = \frac{c\varphi'_c(a, b, c)}{\varphi(a, b, c)} = constans.$$

Умножая обѣ части полученнаго уравненія на $d\theta$ и интегрируя, получимъ:

$$lg\,\varphi(x, \Phi, \theta) = m\,lg\,\theta + lg A,$$

гдѣ A — функція, не зависящая явнымъ образомъ отъ θ; изъ послѣдняго уравненія получимъ:

$$\varphi(x, \Phi, \theta) = y = A\theta^m = Ae^{mu}.$$

Итакъ, если y содержитъ показательную функцію e^u, то послѣдняя входитъ въ составъ y только въ видѣ множителя, можемъ поэтому всѣ показательныя функціи соединить въ одну, и тогда будемъ имѣть:

$$y = ze^t,$$

гдѣ z и t — алгебраическія функціи отъ x. Такимъ образомъ, если y есть трансцендентная функція перваго порядка, то она можетъ быть представлена въ видѣ:

$$y = x^\alpha = ze^t,$$

откуда найдемъ:

$$lg\frac{x^\alpha}{z} = t;$$

послѣднее уравненіе возможно только при условіи:

$$x^\alpha = Cz,$$

гдѣ C — постоянное, и тогда будетъ:

$$t = constans,$$

и слѣдовательно:

$$y = C'z,$$

гдѣ C' — также постоянное; но полученный результатъ представляетъ абсурдъ въ виду того, что по доказанному y не есть алгебраическая функція; такимъ образомъ лемма доказана.

Для цѣлей дальнѣйшаго преобразуемъ по *Ліувилю* уравненіе (1) слѣдующимъ образомъ. Приведя его предварительно извѣстною подстановкою:

$$y = \frac{1}{a} \cdot \frac{dlg\eta}{dx}$$

къ виду:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \alpha x^m \eta,$$

гдѣ $\alpha = ab$, полагаемъ затѣмъ:

$$\eta = x^p u,$$

гдѣ p пока не опредѣляемъ, послѣ чего наше уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2px^{-1}\frac{du}{dx} = [\alpha x^m - p(p-1)x^{-2}]u.$$

Затѣмъ полагаемъ:

$$x = z^q,$$

причемъ q также пока не опредѣляемъ; тогда наше уравненіе преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (1-q+2pq)z^{-1}\frac{du}{dz} = q^2[\alpha z^{mq+2q-2} - p(p-1)z^{-2}]u.$$

Опредѣлимъ теперь p и q изъ уравненій:

$$1-q+2pq = 0$$

$$mq+2q-2 = 0,$$

т. е. примемъ:

$$p = -\frac{m}{4},\ q = \frac{2}{m+2},$$

тогда будемъ имѣть дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left(A + \frac{B}{z^2}\right)u, \tag{6}$$

гдѣ постоянныя A и B имѣютъ значенія:

$$A = \left(\frac{2}{m+2}\right)^2\alpha,\ B = -\left(\frac{2}{m+2}\right)^2\frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right). \tag{7}$$

Указанное преобразованіе не выполнимо въ случаѣ $m = -2$, но тогда, какъ извѣстно, уравненіе Риккати, а слѣдовательно и уравненіе (6) легко интегрируется въ конечномъ видѣ; поэтому случай $m = -2$ исключимъ изъ разсмотрѣнія; также будемъ предполагать m отличнымъ отъ 0 и отъ -4, (при каковыхъ значеніяхъ уравненія (1) и (6) тоже легко интегрируются), для того, чтобы B было завѣдомо отлично отъ нуля; замѣтимъ еще, что A всегда отлично отъ нуля.

Изъ формы подстановокъ, приводящихъ уравненіе (1) къ уравненію (6), заключаемъ, что если первое интегрируется въ конечномъ видѣ, то и второе такъ же интегрируется, и наоборотъ; поэтому вмѣсто того, чтобы искать необходимыя условія интегрируемости уравненія (1), можемъ искать такія же условія для уравненія (6) къ чему именно приступаемъ.

§ 5. Трансцендентность интеграловъ дифференціальнаго уравненія (6).

Докажемъ сначала, что уравненіе (6) не имѣетъ алгебраическаго интеграла (не считая, конечно, частнаго рѣшенія $u=0$).

Если бы уравненіе (6) имѣло какой-нибудь алгебраическій интегралъ, то онъ былъ бы корнемъ нѣкотораго неприводимаго алгебраическаго уравненія n-ой степени:

$$f(z,u)=u^n+Z_1 u^{n-1}+\cdots+Z_{n-1}u+Z_n=0, \tag{8}$$

гдѣ $Z_1, Z_2 \ldots Z_n$ — раціональныя функціи z. Дифференцируя это уравненіе 2 раза по z, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dz}=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial u}\cdot\frac{du}{dz}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dz^2}=0. \tag{10}$$

Если функція u удовлетворяетъ одновременно дифференціальному уравненію (6) и алгебраическому уравненію (8), то она будетъ удовлетворять и уравненію (10) послѣ того, какъ мы въ немъ положимъ:

$$\frac{du}{dz}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}}$$

на основаніи уравненія (9) и

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\left(A+\frac{B}{z^2}\right)u$$

на основаніи уравненія (6); но тогда уравненіе (10) будетъ алгебраическое, и слѣдовательно ему будутъ удовлетворять всѣ n корней: $u_1, u_2, \ldots u_n$ уравненія (8), откуда заключаемъ, что всѣ эти n корней будутъ интегралами уравненія (6).

Составимъ функцію:

$$v = u_1^{\mu} + u_2^{\mu} + \cdots + u_n^{\mu} = \Sigma u^{\mu},$$

гдѣ μ — нѣкоторое цѣлое положительное число; функція v, какъ раціональная симметрическая функція отъ корней уравненія (8), при всякомъ μ выражается раціональнымъ образомъ черезъ коэффиціенты этого уравненія; поэтому, если не всѣ коэффиціенты $Z_1, Z_2, \ldots Z_{n-1}$ уравненія (8) равны нулю [1]), то среди чиселъ: $1, 2, \ldots n$ найдется, по крайней мѣрѣ, одно значеніе для μ, при которомъ v не есть тождественный нуль; пусть для μ выбрано именно такое значеніе, тогда v должно быть раціональною функціею z. Но мы обнаружимъ, что это не возможно, и этимъ докажемъ ложность сдѣланнаго предположенія о существованіи алгебраическаго интеграла уравненія (6).

Дифференцируя v по z и полагая:

$$\sum\left(\mu\, u^{\mu-1}\frac{du}{dz}\right) = v_1,$$

получимъ:

$$\frac{dv}{dz} = v_1;$$

дифференцируя затѣмъ v_1, полагая потомъ:

$$\sum\left[\mu(\mu-1)\, u^{\mu-2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right] = v_2$$

и замѣняя $\frac{d^2u}{dz^2}$ на основаніи уравненія (6) черезъ функцію:

$$Pu = \left(A + \frac{B}{z^2}\right)u, \tag{11}$$

получимъ:

$$\frac{dv_1}{dz} = \mu Pv + v_2.$$

---

[1]) Z_n всегда отлично отъ нуля; въ противномъ случаѣ уравненіе (8) не было бы неприводимо.

8

Опять дифференцируемъ v_2, замѣняемъ послѣ дифференцированія $\frac{d^2u}{dz^2}$ черезъ Pu и обозначаемъ:

$$\sum\left[\mu(\mu-1)(\mu-2)u^{\mu-3}\left(\frac{du}{dz}\right)^3\right]=v_3,$$

тогда получимъ:

$$\frac{dv_2}{dz}=2(\mu-1)Pv_1+v_3$$

и т. д. Будемъ получать дифференціальныя уравненія вида:

$$\frac{dv_{i+1}}{dz}=(i+1)(\mu-i)Pv_i+v_{i+2},$$

гдѣ v_i имѣетъ значеніе:

$$v_i=\sum\left[\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)u^{\mu-i}\left(\frac{du}{dz}\right)^i\right].$$

Для значеній $i\geqq\mu+1$ функція v_i равна нулю, такъ что будемъ имѣть $\mu+1$ функцій: $v, v_1, v_2, \ldots v_\mu$, связанныхъ нижеслѣдующею системою $\mu+1$ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка:

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dv}{dz}=v_1\\
&\frac{dv_1}{dz}=1.\mu Pv+v_2\\
&\frac{dv_2}{dz}=2(\mu-1)Pv_1+v_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dv_{i+1}}{dz}=(i+1)(\mu-i)Pv_i+v_{i+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dv_\mu}{dz}=\mu Pv_{\mu-1}
\end{aligned}\right.$$

Теперь легко опредѣлить видъ функціи v, если она раціональна. Положимъ, что знаменатель функціи v имѣетъ корни z_1, $z_2\ldots$ соотвѣтственной кратности: $\pi_1, \pi_2, \ldots$ Отдѣлимъ отъ v цѣлую часть E, а изъ дробной части выдѣлимъ тѣ простыя дроби, которыя соотвѣтствуютъ одному какому-нибудь корню знаменателя v, нпр. z_1; тогда получимъ:

$$v = E + \frac{\alpha_1}{(z-z_1)^{\pi_1}} + \frac{\alpha_2}{(z-z_1)^{\pi_1 - 1}} + \cdots + \frac{\alpha_{\pi_1}}{z-z_1} + \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad (13)$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\pi_1}$ — постоянныя, изъ которыхъ α_1 завѣдомо отлично отъ нуля, а $\frac{\varphi}{\psi}$ — несократимая дробь и $\psi(z_1) \neq 0$. На основанiи уравненiй (12) и (13) заключаемъ, что функцiи: $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ будутъ вида:

$$v_1 = E_1 + \frac{\beta_1}{(z-z_1)^{\pi_1+1}} + \frac{\beta_2}{(z-z_1)^{\pi_1}} + \cdots$$

$$v_2 = E_2 + \frac{\gamma_1}{(z-z_1)^{\pi_1+2}} + \frac{\gamma_2}{(z-z_1)^{\pi_1+1}} + \cdots$$

. . . .

$$v_{\mu-1} = E_{\mu-1} + \frac{\sigma_1}{(z-z_1)^{\pi_1+\mu-1}} + \frac{\sigma_2}{(z-z_1)^{\pi_1+\mu-2}} + \cdots$$

$$v_\mu = E_\mu + \frac{\tau_1}{(z-z_1)^{\pi_1+\mu}} + \frac{\tau_2}{(z-z_1)^{\pi_1+\mu-1}} + \cdots,$$

гдѣ $E_1, E_2, \ldots E_\mu$ — цѣлые многочлены, всѣ $\beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau$ — постоянные коэффицiенты, изъ которыхъ $\beta_1, \gamma_1, \ldots \sigma_1, \tau_1$ обязательно отличны отъ нуля. На основанiи послѣдняго изъ уравненiй (12) заключаемъ, что степень двучлена $z-z_1$ въ знаменателѣ $v_{\mu-1}$ не ниже, а выше, чѣмъ въ знаменателѣ v_μ; слѣдовательно функцiя v не можетъ имѣть вида (13); но если мы примемъ, что единственный корень знаменателя функцiи v есть $z_1 = 0$, то получимъ результатъ, совмѣстный съ послѣднимъ изъ уравненiй (12) благодаря виду функцiи P. Итакъ, приходимъ къ заключенiю, что функцiя v, равно какъ и функцiи $v_1, v_2, \ldots$ должны имѣть слѣдующую форму:

$$v = cz^{\nu} + dz^{\nu-1} + \cdots + kz^{\rho}$$

$$v_1 = c_1 z^{\nu_1} + d_1 z^{\nu_1 - 1} + \cdots + lz^{\rho_1}$$

. . . .

$$v_\mu = c_\mu z^{\nu_\mu} + d_\mu z \nu_\mu - 1 + \cdots + qz^{\rho_\mu},$$

причемъ коэффицiенты $c, c_1, \ldots c_\mu$ считаемъ отличными отъ нуля; показатели $\nu, \nu_1, \ldots \nu_\mu$, равно какъ $\rho, \rho_1, \ldots \rho_\mu$ суть цѣлыя числа, положительныя, отрицательныя или нули. Убѣдимся, что и такая форма функціи v не возможна; для этого докажемъ, что ν не можетъ быть отлично отъ нуля. Пусть ν имѣетъ какое-нибудь цѣлое, отличное отъ нуля значеніе — положительное, или отрицательное. Замѣнимъ послѣднее уравненіе (12) слѣдующимъ:

$$\frac{dv_\mu}{dz} = \mu P v_{\mu-1} + v_{\mu+1}$$

съ дополнительнымъ условіемъ:

$$v_{\mu+1} = 0.$$

Можемъ для аналогіи предполагать $v_{\mu+1}$ въ видѣ функціи $c_{\mu+1} z^{\nu_{\mu+1}}$, причемъ будемъ имѣть:

$$c_{\mu+1} = 0.$$

На основаніи уравненій (12) найдемъ послѣдовательно:

$$v_1 = \nu c z^{\nu-1} + \cdots$$

$$v_2 = -\mu A c z^{\nu} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причемъ для краткости мы выписываемъ только члены съ высшими степенями z. Докажемъ, что вообще будемъ имѣть:

$$(14)\quad \begin{cases} v_{2q-1} = (-1)^{q-1} c A^{q-1} C_{2q-1} z^{\nu-1} + \cdots \\ v_{2q} = (-1)^q c A^q C_{2q} z^{\nu} + \cdots \end{cases}$$

гдѣ всѣ C — постоянныя. Формулы (14), очевидно, вѣрны для $q=1$; докажемъ, что онѣ вѣрны для $q=i+1$, если вѣрны для $q=i$. Принимаемъ, что онѣ вѣрны для $q=i$; на основаніи общаго уравненія системы (12), найдемъ:

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} v_{2i+1} = \dfrac{dv_{2i}}{dz} - 2i(\mu-2i+1) P v_{2i-1} \\ v_{2i+2} = \dfrac{dv_{2i+1}}{dz} - (2i+1)(\mu-2i) P v_{2i}; \end{cases}$$

вставляя въ эти формулы выраженія v_{2i-1} и v_{2i}, вычисленныя по формуламъ (14), получимъ выраженія v_{2i+1} и v_{2i+2} указаннаго вида, причемъ коэффиціенты C будутъ имѣть значенія:

$$C_{2i+1} = \nu C_{2i} + 2i(\mu - 2i + 1) C_{2i-1}$$

$$C_{2i+2} = (2i+1)(\mu - 2i) C_{2i}.$$

Если ν положительно, то для значеній k: $k \leq \mu$ C_k положительно. Что касается $C_{\mu+1}$, то при $\mu = 2n$, найдемъ:

$$C_{\mu+1} = C_{2n+1} = \nu C_{2n} + 2n\, C_{2n-1} > 0,$$

а при $\mu = 2n+1$:

$$C_{\mu+1} = C_{2n+2} = (2n+1) C_{2n} > 0,$$

такъ что при всякомъ μ: $C_{\mu+1} > 0$; на основаніи формулъ (14) заключаемъ, что для $c_{\mu+1}$ получится также значеніе (положительное или отрицательное), отличное отъ нуля, что не возможно, ибо $c_{\mu+1}$ завѣдомо равно нулю. Если ν отрицательно, то, пока указатель при C не превосходитъ μ, всѣ коэффиціенты C_{2i+2} положительны, а всѣ C_{2i+1} — отрицательны ($C_0 > 0$, $C_1 < 0$). Въ этомъ случаѣ при $\mu = 2n$ получимъ:

$$C_{\mu+1} = C_{2n+1} < 0,$$

а при $\mu = 2n+1$:

$$C_{\mu+1} = C_{2n+2} > 0;$$

опять оказывается, что $C_{\mu+1}$ отлично отъ нуля, такъ что и для $c_{\mu+1}$ получится значеніе, отличное отъ нуля, что не возможно. Такимъ образомъ доказано, что ν не можетъ быть отличнымъ отъ нуля.

Пусть теперь будетъ: $\nu = 0$; тогда функція v имѣетъ видъ:

$$v = c_0 + cz^{-1} + \cdots + c' z^{-\rho}. \qquad (c_0 \neq 0).$$

По уравненіямъ (12) найдемъ подобно предыдущему:

$$v_1 = -c z^{-2} + \cdots$$

$$v_2 = -\mu A (c_0 + cz^{-1}) + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Докажемъ, что вообще будемъ имѣть:

$$v_{2q-1} = (-1)^q c A^{q-1} C_{2q-1} z^{-2} + \cdots$$

$$v_{2q} = (-1)^q A^q C_{2q} (c_0 + c z^{-1}) + \cdots,$$

гдѣ всѣ C — постоянныя. Для $q = 1$ формулы вѣрны; пусть онѣ вѣрны для $q=i$; докажемъ, что онѣ вѣрны для $q=i+1$; по уравненіямъ (12 *bis*) находимъ:

$$v_{2i+1}=(-1)^{i+1} c\, A^i\, C_{2i+1}\, z^{-2}+\cdots$$

$$v_{2i+2}=(-1)^{i+1}\, A^{i+1}\, C_{2i+2}\,(c_0+cz^{-1})+\cdots,$$

т. е. формулы заданнаго вида, причемъ будемъ имѣть:

$$C_{2i+1}=C_{2i}+2i\,(\mu-2i+1)\,C_{2i-1}$$

$$C_{2i+2}=(2i+1)\,(\mu-2i)\,C_{2i}.$$

Эти формулы для всякаго μ даютъ значеніе $C_{\mu+1}$ отличное отъ нуля (именно $C_{\mu+1}>0$), такъ что и для $c_{\mu+1}$ получилось бы значеніе, отличное отъ нуля, что опять не возможно. Такимъ образомъ оказывается, что ν не можечъ равняться нулю. Сопоставляя этотъ результатъ съ предыдущимъ, заключаемъ, что система (12) не совмѣстна при раціональномъ значеніи функціи v, а отсюда вытекаетъ непосредственно, что уравненіе (6) не имѣетъ алгебраическаго интеграла.

§ 6. Форма конечныхъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія (6) наинизшаго порядка трансцендентности.

На основаніи доказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ заключаемъ, что всякая конечная функція, удовлетворяющая уравненію (6), есть функція трансцендентная. Если существуютъ *конечныя* трансцендентныя функціи, удовлетворяющія уравненію (6), то среди нихъ найдется по крайней мѣрѣ одна, трансцендентность которой будетъ порядка не высшаго, чѣмъ трансцендентность всякой другой изъ нихъ; обозначимъ этотъ наинизшій порядокъ трансцендентности черезъ n (n по самому смыслу—число конечное). Въ частности, если всѣ конечные интегралы уравненія (6) суть трансцендентныя одного и того же порядка, то подъ n будемъ понимать этотъ общій порядокъ. Изучимъ форму трансцендентныхъ функцій n-го порядка, удовлетворяющихъ уравненію (6).

Разсмотримъ одну изъ такихъ интегральныхъ функцій и приведемъ ее къ каноническому виду, т. е. сведемъ къ minimum число содержащихся въ ней одночленныхъ трансцендентныхъ n-го порядка. Докажемъ, что тогда этотъ интегралъ не будетъ содержать логариѳмовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что разсматриваемый интегралъ u въ каноническомъ видѣ содержитъ одночленную трансцендентную: $l\varepsilon = \theta$, гдѣ ε—трансцендентная $(n-1)$-го порядка; тогда можемъ представить:

$$u = F(z, \Phi, \theta),$$

гдѣ Φ есть трансцендентная n-го или низшаго порядка и не содержитъ явнымъ образомъ θ, а F есть символъ алгебраической функціи отъ аргументовъ: z, Φ, θ. Продифференцировавъ u два раза и назвавъ результатъ черезъ F_1, получимъ:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = F_1(z, \Phi_1, \theta).$$

$\frac{d^2u}{dz^2}$ есть, очевидно, трансцендентная функція отъ z порядка не выше n-го; Φ_1 имѣетъ значеніе аналогичное Φ въ функціи F, а F_1 есть алгебраическая функція отъ своихъ аргументовъ. Такъ какъ функція u удовлетворяетъ уравненію (6), то имѣемъ слѣдующую алгебраическую зависимость:

$$F_1(z, \Phi_1, \theta) = PF(z, \Phi, \theta);$$

на основаніи § 3 заключаемъ, что эта зависимость не нарушится, если вмѣсто θ возьмемъ въ ней $\theta+\mu$, гдѣ μ—произвольное постоянное число; получимъ:

$$F_1(z, \Phi_1, \theta+\mu) = PF(z, \Phi, \theta+\mu)$$

но, замѣтивъ, что:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d(\theta+\mu)}{dz},$$

найдемъ:

$$\frac{d^2F(z, \Phi, \theta+\mu)}{dz^2} = F_1(z, \Phi_1, \theta+\mu),$$

откуда заключаемъ, что $F(z, \Phi, \theta+\mu)$ есть также интегралъ уравненія (6). Продифференцировавъ уравненіе (6) по μ, получимъ:

$$\frac{d^2\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)}{dz^2} = P\frac{\partial u}{\partial \mu},$$

такъ что интеграломъ уравненія (6) будетъ также функція:

$$\frac{\partial F(z, \Phi, \theta+\mu)}{\partial \mu},$$

а слѣдовательно и функція:

$$\frac{\partial^2 F(z, \Phi, \theta+\mu)}{\partial \mu^2},$$

независимо отъ значенія μ; полагая въ послѣднихъ двухъ функціяхъ $\mu=0$, замѣтимъ, что результаты этой подстановки ($\mu=0$) соотвѣтственно равны функціямъ:

$$\frac{\partial F(z, \Phi, \theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F(z, \Phi, \theta)}{\partial \theta^2},$$

причемъ дифференцированіе производится частнымъ образомъ только по явно входящему θ; обозначимъ послѣднія двѣ функціи соотвѣтственно черезъ:

$$F'_\theta(z, \Phi, \theta), \quad F''_\theta(z, \Phi, \theta).$$

Ясно, что интегралъ F'_θ не можетъ быть тождественно равенъ нулю, потому что тогда мы имѣли бы алгебраическую зависимость:

$$F'_\theta(z, \Phi, \theta)=0,$$

тождественную по отношенію къ θ, а это служило бы признакомъ того, что $F(z, \Phi, \theta)$ не зависитъ отъ θ, что не вѣрно.

Дальше, легко замѣтить, что отношеніе интеграловъ F и F'_θ не можетъ равняться постоянному; дѣйствительно, въ такомъ случаѣ мы имѣли бы алгебраическую зависимость:

$$F'_\theta(z, \Phi, \theta)=KF(z, \Phi, \theta),$$

гдѣ $K=const.;$ въ ней мы могли бы считать θ простымъ перемѣннымъ параметромъ; интегрируя послѣднее дифференціальное уравненіе съ частными производными, мы нашли бы:

$$F(z, \Phi, \theta)=\Omega e^{K\theta},$$

гдѣ Ω отъ θ непосредственно не зависитъ, но этотъ результатъ абсурденъ, такъ какъ съ правой стороны имѣемъ показательную функцію аргумента θ, а съ лѣвой—алгебраическую функцію того же аргумента.

На основаніи доказанныхъ свойствъ интеграловъ F и F'_θ заключаемъ, что третій интегралъ F''_θ непремѣнно будетъ имѣть видъ:

$$F''_\theta(z, \Phi, \theta) = C_1 F'_\theta(z, \Phi, \theta) + C_2 F(z, \Phi, \theta),$$

гдѣ C_1 и C_2—нѣкоторыя постоянныя; послѣдняя зависимость тождественна относительно θ; разсматривая функцію F, какъ функцію аргумента θ и считая z и Φ параметрами, не зависящими отъ θ, будемъ имѣть для опредѣленія F линейное дифференціальное уравненіе второго порядка, общій интегралъ котораго имѣетъ видъ:

$$F(z, \Phi, \theta) = \alpha_1 e^{m_1\theta} + \alpha_2 e^{m_2\theta},$$

гдѣ m_1 и m_2—корни уравненія:

$$m^2 - C_1 m - C_2 = 0,$$

а α_1 и α_2—произвольныя функціи аргументовъ z и Φ, не содержащія θ. Въ частномъ случаѣ, если:

$$m_1 = m_2 \neq 0,$$

будемъ имѣть:

$$F(z, \Phi, \theta) = (\alpha_1 + \theta\alpha_2) e^{m_1\theta},$$

наконецъ, при условіи:

$$m_1 = m_2 = 0,$$

найдемъ:

$$F(z, \Phi, \theta) = \alpha_1 + \alpha_2 \theta.$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что если интегралъ F въ канонической формѣ содержитъ одночленную логариѳмическую функцію, то онъ долженъ имѣть одну изъ слѣдующихъ трехъ формъ:

$$F(z, \Phi, \theta) = \alpha_1 e^{m_1\theta} + \alpha_2 e^{m_2\theta}$$

$$F(z, \Phi, \theta) = (\alpha_1 + \alpha_2 \theta) e^{m_1\theta}$$

$$F(z, \Phi, \theta) = \alpha_1 + \alpha_2 \theta.$$

Но не трудно замѣтить, что ни въ одной изъ этихъ трехъ формъ интегралъ F не можетъ представиться; дѣйствительно, первыя двѣ формы не возможны потому, что функція F по отношенію къ аргументу θ алгебраическая, функціи же $\alpha_1 e^{m_1\theta}+\alpha_2 e^{m_2\theta}$ и $(\alpha_1+\alpha_2\theta)e^{m_1\theta}$ — трансцендентны (см. § 2); третья же форма интеграла F не возможна потому, что въ такомъ случаѣ мы имѣли бы интегралъ уравненія (6) вида:

$$F'_\theta(z, \Phi, \theta)=\alpha_2,$$

не зависящій отъ θ, слѣдовательно содержащій, по крайней мѣрѣ, одною трансцендентною n-го порядка меньше, чѣмъ интегралъ F, что не согласуется съ сдѣланнымъ нами предположеніемъ.

Можемъ такимъ образомъ считать доказаннымъ, что въ конечномъ интегралѣ уравненія (6) n-го (наименьшаго) порядка трансцендентности, приведенномъ къ канонической формѣ, одночленныя трансцендентныя n-го порядка суть только показательныя функціи. Изслѣдуемъ теперь, въ какой формѣ эти показательныя функціи содержатся въ разсматриваемомъ интегралѣ.

Пусть одна изъ такихъ показательныхъ функцій будетъ: $\theta=e^{\varepsilon}$, гдѣ ε — трансцендентная $(n-1)$-го порядка. Полагаемъ опять:

$$u=F(z, \Phi, \theta),$$

гдѣ Φ есть трансцендентная n-го или низшаго порядка, и θ явнымъ образомъ не содержитъ, а F есть алгебраическая функція отъ аргументовъ z, Φ, θ. Дифференцируя u два раза по z и обозначая, какъ раньше:

$$\frac{d^2u}{dz^2}=F_1(z, \Phi_1, \theta),$$

гдѣ Φ_1 имѣетъ значеніе, аналогичное значенію Φ въ интегралѣ F, получимъ на основаніи уравненія (6):

$$F_1(z, \Phi_1, \theta)=PF(z, \Phi, \theta),$$

что представляетъ алгебраическую зависимость, тождественную по отношенію къ θ и другимъ трансцендентнымъ n-го порядка; полагая въ ней вмѣсто θ — $\mu\theta$, гдѣ μ произвольное постоянное, найдемъ:

$$F_1(z, \Phi_1, \mu\theta)=PF(z, F, \mu\theta),$$

откуда, на основаніи формулъ:

$$\frac{d\theta}{dz}=\theta\frac{d\varepsilon}{dz}$$

$$\frac{d(\mu\theta)}{dz}=\mu\,\theta\frac{d\varepsilon}{dz},$$

получимъ:

$$\frac{d^2F(z,\Phi,\mu\theta)}{dz^2}=F_1(z,\Phi_1,\mu\theta)$$

и такимъ образомъ убѣдимся, что при какомъ угодно значеніи μ функція $F(z,\Phi,\mu\theta)$ есть также интегралъ уравненія (6). Такъ какъ $\frac{\partial u}{\partial\mu}$ удовлетворяетъ уравненію (6), то, продифференцировавъ интегралъ $F(z,\Phi,\mu\theta)$ два раза частнымъ образомъ по μ и положивъ послѣ дифференцированія $\mu=1$, получимъ два новыхъ частныхъ интеграла уравненія (6), которые, какъ легко усмотрѣть, будутъ совпадать соотвѣтственно съ первою и второю частными производными $F(z,\Phi,\theta)$, взятыми по явно входящему θ и умноженными соотвѣтственно на θ и θ^2, такъ что будемъ имѣть:

$$\left[\frac{\partial F(z,\Phi,\mu\theta)}{\partial\mu}\right]_{\mu=1}=\theta F'_\theta(z,\Phi,\theta)$$

$$\left[\frac{\partial^2F(z,\Phi,\mu\theta)}{\partial\mu^2}\right]_{\mu=1}=\theta^2F''_\theta(z,\Phi,\theta),$$

гдѣ F'_θ и F''_θ, какъ сказано выше, суть частныя производныя: $\frac{\partial F}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}$ функціи F по явно входящему θ.

И въ этомъ случаѣ F'_θ не можетъ быть тождественнымъ нулемъ, потому что тогда оказалось бы, что $F(z,\Phi,\theta)$ не зависитъ отъ θ. Положимъ затѣмъ, что интегралы $\theta F'_\theta$ и F не суть различные интегралы уравненія (6), т. е. что ихъ отношеніе равно постоянному K:

$$\theta F'_\theta=KF,$$

тогда, умножая обѣ части этого соотношенія на $d\theta$ и интегрируя, получимъ:

$$F(z,\Phi.\theta)=\Omega\,\theta^K,$$

гдѣ Ω есть функція z и Φ, не зависящая отъ θ.

Интеграломъ того же типа можно удовлетворить уравненію (6) и въ томъ случаѣ, когда отношеніе $\theta F'_\theta$ и F не есть постоянное. Дѣйствительно, тогда третій интегралъ $\theta^2 F''_\theta$ необходимо долженъ имѣть видъ:

$$\theta^2 F''_\theta = C_1 \theta F'_\theta + C_2 F, \tag{15}$$

гдѣ C_1 и C_2—постоянныя; мы имѣемъ слѣдовательно для опредѣленія F, какъ функціи θ, линейное дифференціальное уравненіе второго порядка; его общій интегралъ есть:

$$F(z, \Phi, \theta) = \alpha_1 \theta^{m_1} + \alpha_2 \theta^{m_2},$$

гдѣ m_1 и m_2—корни уравненія:

$$m(m-1) = C_1 m + C_2,$$

а α_1 и α_2—функціи z и Φ, не зависящія отъ θ. Интеграломъ уравненія (6) будетъ также функція:

$$F(z, \Phi, \mu\theta) = \alpha_1 \mu^{m_1} \theta^{m_1} + \alpha_2 \mu^{m_2} \theta^{m_2},$$

гдѣ μ произвольное постоянное; слѣдовательно уравненіе (6) будетъ имѣть также интегралъ:

$$\frac{F(z, \Phi, \mu\theta) - \mu^{m_2} F(z, \Phi, \theta)}{\mu^{m_1} - \mu^{m_2}} = \alpha_1 \theta^{m_1}$$

того же типа, что и функція $\Omega\theta^K$. Если отношеніе F и $\theta F'_\theta$ не равно постоянному, то ни α_1 ни α_2 не могутъ быть нулями; дѣйствительно, если бы было $\alpha_1 = 0$, то мы имѣли бы:

$$F = \alpha_2 \theta^{m_2},$$

$$\theta F'_\theta = m_2 \alpha_2 \theta^{m_2},$$

такъ что отношеніе $\dfrac{\theta F'_\theta}{F}$ равнялось бы постоянному m_2; такъ же убѣждаемся въ невозможности предположенія $\alpha_2 = 0$ въ разсматриваемомъ случаѣ.

Относительно чиселъ m_1 и m_2 замѣтимъ, что онѣ не могутъ быть равны между собою. Дѣйствительно, если бы было $m_1 = m_2$, то уравненіе (15) имѣло бы интегралъ вида:

$$F(z, \Phi, \theta) = \alpha_1 \theta^{m_1} + \alpha_2 \theta^{m_1} lg\, \theta,$$

гдѣ опять α_1 и α_2 отъ θ явнымъ образомъ не зависятъ; но такая форма интеграла при $\alpha_2 \neq 0$ не возможна; въ самомъ дѣлѣ: 1) если m_1 — число дѣйствительное раціональное, то отсюда мы получили бы:

$$lg\,\theta = \frac{F(z, \Phi, \theta) - \alpha_1 \theta^{m_1}}{\alpha_2 \theta^{m_1}},$$

такъ что функція $lg\,\theta$ была бы алгебраическая относительно θ; 2) если m_1 — число дѣйствительное—ирраціональное, или комплексное, то мы нашли бы:

$$\theta^{m_1} = \frac{F(z, \Phi, \theta)}{\alpha_1 + \alpha_2\, lg\,\theta},$$

такъ что функція θ^{m_1} была бы трансцендентная перваго порядка относительно θ, между тѣмъ какъ изъ леммы, доказанной въ § 4, слѣдуетъ, что эта функція должна быть трансцендентная второго порядка.

Изъ всего изложеннаго въ этомъ параграфѣ слѣдуетъ, что если мы въ интегралѣ уравненія (6) вида: $u = f(z)$, гдѣ f есть конечная трансцендентная функція перемѣннаго z порядка n, приведемъ число одночленныхъ трансцендентныхъ n-го порядка къ minimum, то всѣ онѣ будутъ вида e^{ε}; если одна изъ нихъ будетъ θ, то уравненію (6) всегда можно удовлетворить интеграломъ вида: $\alpha\theta^m$, гдѣ m — постоянное, а α не содержитъ θ. То же самое можно сказать и объ остальныхъ одночленныхъ трансцендентныхъ n-го порядка; называя всѣ эти одночленныя трансцендентныя черезъ:

$$\theta_1 = e^{\varepsilon}, \quad \theta_2 = e^{\varepsilon}, \ldots.$$

заключимъ, что уравненіе (6) имѣетъ интегралъ вида:

$$u = \beta\theta_1^{m_1}\theta_2^{m_2}\ldots\ldots = \beta e^{m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + \cdots} = \beta e^{\gamma},$$

гдѣ β и γ — трансцендентныя $(n-1)$-го порядка.

§ 7. Зависимость между интегралами уравненія (6) и интегралами нѣкотораго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка (18).

Представимъ интегралъ u уравненія (6) въ видѣ:

$$u = \beta e^{\gamma} = e^{\int t dz}, \tag{16}$$

гдѣ t—функція z, подлежащая опредѣленію. Дифференцируя выраженіе (16), получимъ:

$$\frac{du}{dz}=e^{\gamma}\left(\frac{d\beta}{dz}+\beta\frac{d\gamma}{dz}\right)=tu=t\beta e^{\gamma}$$

и слѣдовательно будемъ имѣтъ:

$$t=\frac{1}{\beta}\left(\frac{d\beta}{dz}+\beta\frac{d\gamma}{dz}\right). \tag{17}$$

Непосредственно можемъ убѣдиться, что опредѣленная нами функція t удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{dt}{dz}+t^2=P, \tag{18}$$

гдѣ P имѣетъ значеніе доставляемое формулою (11). Пусть функція t есть трансцендентная m-го порядка; на основаніи уравненія (17) видимъ непосредственно, что

$$m<n. \tag{19}$$

Докажемъ, что $m=0$, т. е. что t есть алгебраическая функція z; для этого употребимъ опять методъ доказательства отъ противнаго. Предположимъ, что $m>0$, и представимъ функцію t въ каноничеcкой формѣ; пусть затѣмъ одна изъ одночленныхъ трансцендентныхъ m-го порядка, входящихъ въ составъ функціи t, будетъ $\theta=lg\,\varepsilon$, гдѣ ε—трансцендентная порядка $m-1$; обозначая тогда черезъ Φ совокупность остальныхъ одночленныхъ трансцендентныхъ, содержащихся въ t, мы представимъ:

$$t=\varphi(z,\Phi,\theta), \tag{20}$$

причемъ завѣдомо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\neq 0.$$

Дифференцируя выраженіе (20) по z, получимъ:

$$\frac{dt}{dz}=\varphi'_z+\varphi'_\theta\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{d\varepsilon}{dz},$$

гдѣ φ'_z есть производная φ по z, входящему въ составъ φ явно и черезъ функцію Φ, а φ'_θ—производная по явно входящему θ. На основаніи уравненія (18) послѣднее уравненіе перепишется въ видѣ:

$$\varphi'_z + \varphi'_\theta \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dz} + \varphi^2 = P.$$

По извѣстному принципу имѣемъ право въ послѣднемъ соотношеніи замѣнить θ на $\theta + \mu$, гдѣ μ — произвольное постоянное; тогда получимъ:

$$d\varphi(z, \Phi, \theta + \mu) + [\varphi(z, \Phi, \theta + \mu]^2 dz = Pdz,$$

откуда заключаемъ, что уравненіе (18) наряду съ интеграломъ (20) имѣетъ интегралъ:

$$t = \varphi(z, \Phi, \theta + \mu),$$

и слѣдовательно, на основаніи соотношенія (16) заключаемъ, что уравненіе (6) имѣетъ интегралъ:

$$u = e^{\int \varphi(z, \Phi, \theta + \mu) dz}.$$

Интеграломъ того же уравненія (6) будетъ также $\frac{du}{d\mu}$ при всякомъ μ. Полагая въ частности $\mu = 0$, найдемъ слѣдующіе два частныхъ интеграла уравненія (6):

$$u_1 = e^{\int \varphi(z, \Phi, \theta) dz}$$

$$u_2 = e^{\int \varphi(z, \Phi, \theta) dz} . \int \varphi'_\theta(z, \Phi, \theta) dz.$$

Но всякіе два интеграла уравненія (6) связаны между собою зависимостью (ср. стр. 26):

$$u_1 \frac{du_2}{dz} - u_2 \frac{du_1}{dz} = constans; \tag{21}$$

примѣняя эту формулу къ найденнымъ интеграламъ u_1 и u_2, получимъ:

$$u_1{}^2 \varphi'_\theta(z, \Phi, \theta) = C,$$

причемъ постоянное C не можетъ равняться нулю, ибо φ'_θ отлично отъ нуля; далѣе, имѣемъ:

$$u_1 = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\varphi'_\theta(z, \Phi, \theta)}},$$

но на основаніи этой формулы оказалось бы, что u_1 есть трансцендентная порядка не выше m-го, между тѣмъ, какъ мы предположили, наинизшій порядокъ трансцендентности интеграловъ уравненія

(6) есть n-ый, и по формулѣ (19) $m < n$. Отсюда заключаемъ, что функція t въ канонической формѣ не содержитъ одночленныхъ трансцендентныхъ m-го порядка вида $lg\varepsilon$.

Допустимъ поэтому, что t содержитъ одночленныя показательныя функціи m-го порядка; пусть одна изъ нихъ будетъ: $\theta = e^\varepsilon$, гдѣ ε — трансцендентная $(m-1)$-го порядка; опять представляемъ:

$$t = \varphi(z, \Phi, \theta), \quad \varphi'_\theta \neq 0.$$

Получимъ:

$$\frac{dt}{dz} = \varphi'_z + \varphi'_\theta \theta \frac{d\varepsilon}{dz},$$

гдѣ φ'_z и φ'_θ имѣютъ значенія аналогичныя предыдущимъ; послѣднее уравненіе на основаніи уравненія (18) перепишется въ видѣ:

$$\varphi'_z + \varphi'_\theta \, \theta \frac{d\varepsilon}{dz} + \varphi^2 = P;$$

въ этомъ уравненіи, которое есть тождество по отношенію къ трансцендентнымъ m-го порядка, замѣнимъ θ на $\mu\theta$, гдѣ μ — произвольное постоянное, тогда получимъ зависимость:

$$d\varphi(z, \Phi, \mu\theta) + [\varphi(z, \Phi, \mu\theta]^2 dz = Pdz,$$

откуда заключимъ, что интеграломъ уравненія (18) будетъ функція:

$$t = \varphi(z, \Phi, \mu\theta)$$

при всякомъ μ; на основаніи же формулы (16) заключимъ, что интеграломъ уравненія (6) будетъ функція:

$$u = e^{\int \varphi(z, \Phi, \mu\theta) dz}.$$

Дифференцируя ее по μ и принимая затѣмъ $\mu = 1$, найдемъ слѣдующіе два частныхъ интеграла уравненія (6):

$$u_1 = e^{\int \varphi(z, \Phi, \theta) dz}$$

$$u_2 = e^{\int \varphi(z, \Phi, \theta) dz} \cdot \int \theta \varphi'_\theta (z, \Phi, \theta) \, dz,$$

такъ что на основаніи зависимости (21) получимъ:

$$u_1{}^2 \theta \varphi'_\theta (z, \Phi, \theta) = C,$$

причемъ опять $C \neq 0$; отсюда найдемъ:

$$u_1 = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\theta \varphi'_\theta (z, \Phi, \theta)}},$$

такъ что u_1 и въ этомъ случаѣ оказалось бы трансцендентною порядка не выше m-го, что не возможно. Приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что нельзя предположить $m > 0$, и, слѣдовательно, убѣждаемся, что t есть алгебраическая функція z.

Итакъ, если уравненіе (6) имѣетъ конечный интегралъ (трансцендентный), то уравненіе (18) необходимо должно имѣть алгебраическій интегралъ. Задача наша сводится такимъ образомъ къ изысканію необходимыхъ условій существованія алгебраическихъ интеграловъ уравненія (18).

§ 8. Характеръ и видъ алгебраическихъ интеграловъ уравненія (18).

Мы еще болѣе упростимъ нашу задачу, показавъ, что всѣ алгебраическіе интегралы уравненія (18) суть раціональныя функціи z.

Пусть какой-нибудь алгебраическій интегралъ уравненія (19) служитъ корнемъ неприводимаго алгебраическаго уравненія (22):

$$\omega(z, t) = 0, \tag{22}$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{\omega'_z}{\omega'_t},$$

такъ что на основаніи уравненія (18) получимъ:

$$\omega'_z + (P - t^2)\,\omega'_t = 0. \tag{23}$$

Но уравненіе (23) алгебраическое и имѣетъ одинъ корень общій съ неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ (22), поэтому всѣ корни уравненія (22) удовлетворяютъ уравненію (23), и слѣдовательно всѣ корни уравненія (22) удовлетворяютъ дифференціальному уравненію (18); обозначая ихъ черезъ $t_1, t_2, t_3, \ldots$, заключимъ, на основаніи уравненія (16), что уравненіе (6) имѣетъ частныя рѣшенія:

$$u_1 = e^{\int t_1 dz},\ u_2 = e^{\int t_2 dz},\ u_3 = e^{\int t_3 dz}, \ldots$$

Легко однакожъ убѣдиться, что число различныхъ частныхъ рѣшеній уравненія (6) этого типа, а слѣдовательно и число корней t уравненія (22) не можетъ быть больше двухъ. Дѣйствительно, примѣняя къ u_1 и u_2 формулу (21), получимъ:

$$(t_2 - t_1)\, e^{\int (t_1+t_2)dz} = C_1,$$

но:

$$e^{\int (t_1+t_2)\, dz} = u_1 u_2,$$

слѣдовательно имѣемъ:

$$u_1 u_2 = \frac{C_1}{t_2 - t_1}. \tag{24}$$

Изъ неприводимости уравненія (22) слѣдуетъ, что постоянное C_1 отлично отъ нуля: въ противномъ случаѣ было бы $t_2 = t_1$. Если, кромѣ u_1 и u_2 уравненіе (6) имѣетъ еще интегралъ u_3 того же типа, то аналогичнымъ образомъ получимъ:

$$u_2 u_3 = \frac{C_2}{t_3 - t_2},$$

$$u_3 u_1 = \frac{C_3}{t_1 - t_3},$$

гдѣ C_2 и C_3 — постоянныя, не равныя нулю, и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{C_2}{C_3} \cdot \frac{t_1 - t_3}{t_3 - t_2}.$$

Такимъ образомъ, при существованіи интеграла u_3, произведеніе $u_1 u_2$ и отношеніе $\frac{u_2}{u_1}$ были бы раціональными функціями t_1, t_2 и t_3, и слѣдовательно, алгебраическими функціями z, что не возможно, ибо доказано, что уравненіе (6) алгебраическихъ интеграловъ совсѣмъ не имѣетъ.

Изъ доказаннаго вытекаетъ, что уравненіе (22) по отношенію къ t есть степени не выше 2-ой; для доказательства раціональности t нужно только обнаружить, что оно линейное относительно t. Съ этою цѣлью докажемъ предварительно, что функція:

$$v = u_1^2 u_2^2$$

не можетъ быть раціональною функціею z. Для этого послѣдовательнымъ дифференцированіемъ опредѣляемъ $\frac{d^5 v}{dz^5}$ и всякій разъ, послѣ каждаго дифференцированія (начиная со второго), замѣняемъ $\frac{d^2 u_1}{dz^2}$

и $\frac{d^2u_2}{dz^2}$ соотвѣтственно черезъ Pu_1 и Pu_2, на основаніи уравненія (6); найденная такимъ образомъ производная $\frac{d^5v}{dz^5}$ будетъ содержать только первыя производныя u_1 и u_2 по z. Если мы затѣмъ въ системѣ уравненій (12) положимъ $\mu = 4$ и исключимъ послѣдовательно v_1, v_2, v_3 и v_4, то для опредѣленія v получимъ линейное дифференціальное уравненіе 5-го порядка, которое дастъ для $\frac{d^5v}{dz^5}$ выраженіе, тождественное съ найденнымъ раньше, откуда заключимъ, что функція $v = u_1^2 u_2^2$ удовлетворяетъ системѣ уравненій (12) [1]). Но такъ какъ было показано, что система (12) не совмѣстна, если функція v раціональна, то отсюда и заключаемъ, что функція $v = u_1^2 u_2^2$ не есть раціональная функція z.

---

[1]) Къ тому же результату можно проще придти слѣдующимъ косвеннымъ путемъ. Пусть U_1 и U_2 будутъ два различныхъ интеграла уравненія (6), тогда система (12) при $\mu = 4$ будетъ удовлетворяться функціею:

$$v = (U_1 + cU_2)^4,$$

гдѣ c — произвольное постоянное. Но система (12) по исключеніи v_1, v_2, v_3 и v_4 даетъ для v линейное дифференціальное уравненіе 5-го порядка, поэтому, если это уравненіе удовлетворяется функціею:

$$v = U_1^4 + 4c\,U_1^3 U_2 + 6c^2 U_1^2 U_2^2 + 4c^3 U_1 U_2^3 + c^4 U_2^4$$

при произвольномъ значеніи c, то оно имѣетъ слѣдующіе частные интегралы:

$$U_1^4,\ U_1^3U_2,\ U_1^2U_2^2,\ U_1U_2^3,\ U_2^4,$$

но эти интегралы различны, если U_1 и U_2 различны, поэтому общій интегралъ упомянутаго дифференціальнаго уравненія имѣетъ видъ:

$$v = C_1U_1^4 + C_2U_1^3U_2 + C_3U_1^2U_2^2 + C_4U_1U_2^3 + C_5U_2^4, \tag{A}$$

гдѣ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольныя постоянныя. Такъ какъ u_1 и u_2 можно представить въ видѣ:

$$u_1 = \alpha\,U_1 + \beta\,U_2, \quad u_2 = \gamma\,U_1 + \delta\,U_2,$$

то $u_1^2 u_2^2$ заключается въ формѣ (A), слѣдовательно функція $v = u_1^2 u_2^2$ удовлетворяетъ системѣ (12) (точнѣе: упомянутому линейному дифференціальному уравненію). Сравн. *Liouville:* Mémoire sur les transcendantes elliptiques de 1-re et 2-de éspèce, considerées comme fonctions de leur module, p. 444—5. J. Liouv. V 1840 p. 441—464.

Если теперь предположимъ, что уравненіе (22) второй степени относительно t, то изъ него найдемъ:

$$t_1 = U + \sqrt{V},\ t_2 = U - \sqrt{V},$$

гдѣ U и V— нѣкоторыя раціональныя функціи z, и тогда на основаніи уравненія (24) получимъ:

$$u_1 u_2 = \frac{-C_1}{2\sqrt{V}}$$

и слѣдовательно:

$$u_1^2 u_2^2 = \frac{C_1^2}{4V},$$

такъ что $u_1^2 u_2^2$ было бы раціональною функціею z, что по доказанному не возможно, слѣдовательно уравненіе (22) по отношенію къ t линейно.

Доказавъ такимъ образомъ раціональность функціи t, мы займемся теперь опредѣленіемъ ея формы, что намъ понадобится для дальнѣйшаго.

Отдѣливъ въ функціи t цѣлую часть и разложивъ дробную часть на простыя дроби, мы представимъ эту функцію въ видѣ:

$$t = Q + \sum \frac{G}{(z-p)^\lambda},$$

такъ что будемъ имѣть:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dQ}{dz} - \sum \frac{\lambda G}{(z-p)^{\lambda+1}}. \tag{25}$$

Если эти выраженія для t и $\frac{dt}{dz}$ вставимъ въ уравненіе (18), то послѣднее приметъ видъ:

$$\frac{dQ}{dz} - \sum \frac{\lambda G}{(z-p)^{\lambda+1}} + Q^2 + 2Q\sum \frac{G}{(z-p)^\lambda} + \left[\sum \frac{G}{(z-p)^\lambda}\right]^2 - P = 0.$$

Лѣвая часть полученнаго равенства содержитъ цѣлую функцію и дробную; для того, чтобы это равенство удовлетворялось тождественно, необходимо, чтобы отдѣльно цѣлая функція и отдѣльно дробная тождественно обращались въ нуль. Приравнивая нулю цѣлую часть и припоминая значеніе P:

$$P = A + \frac{B}{z^2},$$

получимъ:

$$\frac{dQ}{dz} + Q^2 + Q_1 - A = 0, \tag{26}$$

причемъ черезъ Q_1 обозначена цѣлая часть произведенія: $2Q\sum\frac{G}{(z-p)^\lambda}$.

Замѣтивъ, что степень члена $\frac{dQ}{dz} + Q_1$ по крайней мѣрѣ на единицу ниже степени Q^2, заключимъ, что Q^2 и A должны быть одинаковой степени, но A есть число постоянное, поэтому находимъ:

$$Q = constans,$$

а отсюда вытекаетъ:

$$\frac{dQ}{dz} = 0$$

$$Q_1 = 0,$$

и слѣдовательно уравненіе (26) даетъ:

$$Q^2 - A = 0,$$

откуда опредѣляемъ Q:

$$Q = \pm\sqrt{A}.$$

Опредѣлимъ теперь дробную часть функціи t. Если будемъ считать λ наибольшимъ изъ показателей членовъ вида $\frac{G}{(z-p)^\lambda}$, то уравненіе (25) можно представить въ видѣ:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{\lambda G}{(z-p)^{\lambda+1}} + \frac{M}{N(z-p)^\lambda},$$

а t^2 можно написать въ видѣ:

$$t^2 = \frac{G^2}{(z-p)^{2\lambda}} + \frac{M_1}{N_1(z-p)^{2\lambda-1}},$$

причемъ M, M_1, N, N_1 — цѣлые многочлены по z, изъ которыхъ два послѣдніе при $z = p$ отличны отъ нуля. Вставляя эти выраженія въ уравненіе (18), получимъ:

$$(27)\quad \frac{G^2}{(z-p)^{2\lambda}} - \frac{\lambda G}{(z-p)^{\lambda+1}} + \frac{M_1}{N_1(z-p)^{2\lambda-1}} + \frac{M}{N(z-p)^{\lambda}} - A - \frac{B}{z^2} = 0.$$

Пусть сначала $p \neq 0$. Ясно, что 2λ не меньше, чѣмъ $\lambda+1$; но, съ другой стороны, 2λ не можетъ быть больше, чѣмъ $\lambda+1$, потому что тогда первый членъ лѣвой части уравненія (27) не имѣлъ бы подобнаго, и лѣвая часть этого уравненія не могла бы тождественно равняться нулю (G существенно отлично отъ нуля); въ виду этого необходимо принять:

$$2\lambda = \lambda + 1,$$

или:

$$\lambda = 1;$$

тогда первые два члена въ равенствѣ (27) становятся подобными и другихъ подобныхъ себѣ въ этомъ равенствѣ не имѣютъ, поэтому ихъ сумма: $\frac{G(G-1)}{z-p}$ должна быть тождественнымъ нулемъ; для этого же необходимо условіе: $G = 1$ ($G \neq 0$). Такимъ образомъ совокупность простыхъ дробей со знаменателемъ вида $(z-p)^{\lambda}$, входящихъ въ составъ t, при $p \neq 0$, даетъ членъ вида: $\sum \frac{1}{z-p}$. Чтобы опредѣлить, въ какой формѣ функція t содержитъ дроби со знаменателемъ вида: z^{μ}, положимъ въ уравненіи (27) $p = 0$ и $\lambda = \mu$; тогда получимъ:

$$\frac{G_1^2}{z^{2\mu}} - \frac{G_1}{z^{\mu+1}} + \frac{M_1}{N_1 z^{2\mu-1}} + \frac{M}{N z^{\mu}} - A - \frac{B}{z^2} = 0.$$

Но μ не можетъ превосходить **1**, потому что въ такомъ случаѣ первый членъ не имѣлъ бы подобнаго и не могъ бы исчезнуть; необходимо поэтому принять $\mu = 1$; тогда должна тождественно обратиться въ нуль сумма членовъ, содержащихъ въ знаменателѣ z^2, а для этого достаточно и необходимо, чтобы G_1 было корнемъ уравненія:

$$\omega^2 - \omega = B.$$

Обозначая одинъ изъ корней этого уравненія черезъ $-\beta$, получимъ тождественную зависимость:

$$(28)\qquad \beta(\beta+1) = B.$$

Окончательно приходимъ къ слѣдующему заключенію: если разложимъ раціональную функцію t, опредѣляемую уравненіемъ (18), на цѣлую часть и дробную, затѣмъ сложную дробь разложимъ на простѣйшія, то эта функція приметъ видъ:

$$t = \pm\sqrt{A} - \frac{\beta}{z} + \sum \frac{1}{z-p}, \tag{29}$$

причемъ p отлично отъ нуля, а β есть корень уравненія (28).

§ 9. Общій интегралъ уравненія (6) въ конечномъ видѣ.

Получивъ выраженіе функціи t, мы на основаніи уравненія (16) находимъ слѣдующую форму интеграла уравненія (6):

$$u = e^{\pm z\sqrt{A}} z^{-\beta} Z \tag{30}$$

гдѣ Z есть произведеніе всѣхъ двучленовъ вида $z-p$, служащихъ знаменателями дробей въ выраженіи $\sum \frac{1}{z-p}$. Вставляя выраженіе u въ уравненіе (6) и принимая во вниманіе выраженіе B изъ уравненія (28), получимъ слѣдующее уравненіе, которому должна удовлетворять цѣлая функція Z:

$$z\frac{d^2Z}{dz^2} - 2(\beta \mp z\sqrt{A})\frac{dZ}{dz} \mp 2\beta\sqrt{A}Z = 0. \tag{31}$$

Пусть многочленъ Z будетъ k-ой степени, такъ что можемъ положить:

$$Z = z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z + a_k.$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ a_i достаточно вставить это выраженіе Z въ уравненіе (31) и приравнить нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z. Приравнивая нулю коэффиціентъ при z^k, находимъ:

$$k = \beta,$$

такъ что β необходимо должно быть числомъ цѣлымъ положительнымъ или нулемъ. Приравнивая затѣмъ нулю коэффиціентъ при z^{k-r-1}, получимъ:

$$(32)\qquad a_{r+1} = \pm \frac{(\beta - r)(\beta + r + 1)}{2\sqrt{A}(r+1)} a_r,$$

и по этой формулѣ опредѣлимъ послѣдовательно всѣ коэффиціенты a ($a_0 = 1$). Такимъ образомъ при β цѣломъ и не меньшемъ нуля уравненіе (31) опредѣляетъ многочленъ Z β-ой степени съ коэффиціентами, доставляемыми формулою (32). Соотвѣтственно двойному знаку у $\sqrt{A}$ имѣемъ въ формулѣ (32) также 2 знака, такъ что получимъ два многочлена Z, отличающихся только знаками отдѣльныхъ членовъ: въ одномъ изъ нихъ всѣ знаки положительные, въ другомъ—поперемѣнно положительные и отрицательные. Называя эти два многочлена соотвѣтственно черезъ Z_1 и Z_2, получимъ на основаніи формулы (30) слѣдующее выраженіе общаго интеграла уравненія (6):

$$u = C_1 e^{z\sqrt{A}} z^{-\beta} Z_1 + C_2 e^{-z\sqrt{A}} z^{-\beta} Z_2,$$

гдѣ C_1 и C_2—произвольныя постоянныя.

§ 10. Необходимыя условія интегрируемости уравненія Риккати частнаго вида.

На основаніи результатовъ, полученныхъ въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, мы можемъ утверждать, что для интегрируемости уравненія (6) въ конечномъ видѣ достаточно и необходимо, чтобы коэффиціентъ B былъ вида:

$$B = \beta(\beta + 1),$$

гдѣ β—число цѣлое положительное или нуль. (При $\beta = 0$ будетъ также $B = 0$, а въ этомъ случаѣ уравненіе (6) интегрируется легко въ конечномъ видѣ). Такъ какъ условія интегрируемости уравненія (6) совпадаютъ съ условіями интегрируемости частнаго уравненія Риккати (1):

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

то на основаніи формулы (7) можемъ сказать, что для интегрируемости послѣдняго уравненія въ конечномъ видѣ необходимо и достаточно условіе:

$$\left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4} + 1\right) = -i(i+1),$$

гдѣ i—цѣлое положительное число, или нуль; отсюда легко найдемъ:

$$m = -2 \pm \frac{2}{2i+1},$$

и слѣдовательно:

$$m_1 = \frac{-4i}{2i+1}, \quad m_2 = \frac{-4i-4}{2i+1};$$

мѣняя въ m_2 i на $i-1$, представимъ m_2 въ видѣ:

$$m_2 = \frac{-4i}{2i-1},$$

причемъ въ послѣднемъ выраженіи i должно быть числомъ цѣлымъ положительнымъ, отличнымъ отъ нуля; но, замѣтивъ, что при $i=0$: $m_2=0$, мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе: *для интегрируемости частнаго уравненія Риккати* (1) *въ конечномъ видѣ* *необходимо и достаточно, чтобы показатель m былъ вида:*

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1},$$

гдѣ i—цѣлое положительное число, или нуль.

ГЛАВА III.

Интегрированіе уравненія Риккати общаго вида.

§ 1. Объ условіяхъ интегрируемости уравненія Риккати въ квадратурахъ.

Будемъ писать общее уравненіе Риккати въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0, \tag{1}$$

гдѣ P, Q, R суть нѣкоторыя функціи перемѣннаго x. Въ общемъ видѣ это уравненіе не можетъ быть обынтегрировано конечнымъ числомъ квадратуръ, поэтому стараются изыскивать соотношенія между P, Q, R, при выполненіи которыхъ уравненіе (1) интегрируется въ квадратурахъ. Всѣ подобнаго рода соотношенія носятъ характеръ *достаточности*, но мы совсѣмъ не знаемъ признаковъ *необходимыхъ* для интегрируемости уравненія (1) конечнымъ числомъ квадратуръ; поэтому условія, о которыхъ идетъ рѣчь, представляютъ гораздо меньшій интересъ, чѣмъ извѣстныя условія интегрируемости въ конечномъ видѣ частнаго уравненія Риккати, которыя не только достаточны, но и необходимы. Трудность нахожденія необходимыхъ условій интегрируемости уравненія (1) объясняется общимъ характеромъ функцій P, Q, R.

Достаточныя условія интегрируемости уравненія (1) въ квадратурахъ могутъ быть получаемы самыми разнообразными путями.

Можно задать напередъ форму общаго интеграла, какъ дѣлаетъ *Лѣтниковъ*, и искать видъ дифференціальнаго уравненія, которому онъ удовлетворяетъ; затѣмъ, если получается уравненіе вида Риккати, то дѣлаемъ заключеніе о видѣ функцій P, Q, R, при которомъ уравненіе (1) имѣетъ заданный напередъ интегралъ; ясно, что этотъ методъ совсѣмъ не опредѣленный и оставляетъ много произволу. Таковъ же характеръ всѣхъ изслѣдованій въ этомъ направленіи. Для той же цѣли проф. *Анисимовъ* пользуется интегрирующимъ множителемъ; приведя уравненіе (1) подстановкою

$$y = \frac{1}{Pz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{2}$$

къ линейному:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + S_1 \frac{dz}{dx} + S_2 z = 0, \tag{3}$$

гдѣ обозначено:

$$S_1 = Q - \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dx}$$

$$S_2 = PR,$$

онъ замѣчаетъ, что лѣвая часть уравненія (3), умноженная на произвольную функцію X отъ x, становится полною производною нѣкоторой линейной функціи отъ z и $\frac{dz}{dx}$, если функцію X выбрать такъ, чтобы удовлетворялось дифференціальное уравненіе:

$$XS_2 - \frac{d\,(XS_1)}{dx} + \frac{d^2X}{dx^2} = 0; \tag{4}$$

но интегрированіе уравненія (4) для нахожденія функціи X нисколько не легче, чѣмъ интегрированіе уравненія (3) или интегрированіе уравненія Риккати; поэтому, вмѣсто того, чтобы искать общее выраженіе функціи X, приходится задавать напередъ различныя частныя значенія этой функціи и подыскивать соотвѣтствующія значенія функцій S_1 и S_2 такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (4). Въ цитируемой статьѣ *Флорова* находимъ также выводъ различныхъ условій интегрируемости уравненія (1).

Въ виду неопредѣленности и произвола во всѣхъ этихъ изысканіяхъ, мы не будемъ на нихъ останавливаться.

§ 2. Интегрированіе общаго уравненія Риккати въ случаѣ, если извѣстенъ одинъ или нѣсколько частныхъ его интеграловъ.

Въ общемъ видѣ уравненіе Риккати не интегрируется конечнымъ числомъ квадратуръ, но мы легко находимъ его общій интегралъ, зная хоть одинъ частный интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ y_1 какой-нибудь частный интегралъ уравненія (1), тогда полагаемъ:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \tag{5}$$

и приводимъ уравненіе (1) къ виду:

$$\frac{dz}{dx} - (Q + 2Py_1)z - P = 0;$$

послѣднее уравненіе есть обыкновенное линейное дифференціальное уравненіе: его общій интегралъ есть:

$$z = e^{\int\limits_{x_0}^{x}(Q+2Py_1)\,dx}\left(\int\limits_{x_0}^{x} Pe^{-\int\limits_{x_0}^{x}(Q+2Py_1)\,dx}\,dx + C\right);$$

зная z, находимъ по формулѣ (5) общій интегралъ уравненія (1). Такимъ образомъ видимъ, что, *зная одинъ частный интегралъ уравненія Риккати, мы находимъ его общій интегралъ посредствомъ двухъ квадратуръ.*

Число квадратуръ, необходимыхъ для изысканія общаго интеграла уравненія Риккати, сводится къ одному, если извѣстны два его частныхъ интеграла. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ два частныхъ интеграла уравненія (1): y_1 и y_2. Приведя уравненіе (1) къ виду (3) посредствомъ преобразованія (2), будемъ имѣть на основаніи формулы преобразованія слѣдующіе два частныхъ интеграла линейнаго уравненія (3):

$$z_1 = e^{\int\limits_{x_0}^{x} Py_1\,dx}, \quad z_2 = e^{\int\limits_{x_0}^{x} Py_2\,dx},$$

такъ что общій интегралъ этого уравненія имѣетъ видъ:

$$z = C_1 e^{\int_{x_0}^{x} P y_1 dx} + C_2 e^{\int_{x_0}^{x} P y_2 dx},$$

гдѣ C_1 и C_2 — произвольныя постоянныя. Зная общій интегралъ уравненія (3), на основаніи формулы (2) находимъ непосредственно общій интегралъ уравненія (1):

$$y = \frac{1}{P} \cdot \frac{C_1 P y_1 e^{\int_{x_0}^{x} P y_1 dx} + C_2 P y_2 e^{\int_{x_0}^{x} P y_2 dx}}{C_1 e^{\int_{x_0}^{x} P y_1 dx} + C_2 e^{\int_{x_0}^{x} P y_2 dx}},$$

или, упрощая его:

$$y = \frac{y_1 + C y_2 e^{\int_{x_0}^{x} P(y_2 - y_1) dx}}{1 + C e^{\int_{x_0}^{x} P(y_2 - y_1) dx}}, \qquad (6)$$

гдѣ $C = \frac{C_2}{C_1}$ — произвольное постоянное. Приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что *общій интегралъ уравненія Риккати получается посредствомъ одной квадратуры, если извѣстны два его частныхъ интеграла.*

Наконецъ, *если знаемъ 3 частныхъ интеграла уравненія Риккати, то безъ интегрированія находимъ его общій интегралъ.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть, кромѣ частныхъ интеграловъ y_1 и y_2, имѣемъ еще одинъ частный интегралъ уравненія (1) — y_3. Тогда по формулѣ (6) будемъ имѣть:

$$y_3 = \frac{y_1 + C_0 y_2 e^{\int_{x_0}^{x} P(y_2 - y_1) dx}}{1 + C_0 e^{\int_{x_0}^{x} P(y_2 - y_1) dx}},$$

гдѣ C_0 — нѣкоторое постоянное. Изъ послѣдняго уравненія получимъ:

$$e^{\int_{x_0}^{x} P(y_2 - y_1) dx} = \frac{1}{C_0} \cdot \frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2},$$

вставляя это выраженіе въ уравненіе (6) и называя $\frac{C}{C_0}$ черезъ c, получимъ:

$$y = \frac{y_1(y_3 - y_2) + cy_2(y_1 - y_3)}{y_3 - y_2 + c(y_1 - y_3)},$$

откуда видимъ, что *общій интегралъ уравненія Риккати есть раціональная функція отъ трехъ его частныхъ интеграловъ.*

§ 3. Характеристическое свойство уравненія Риккати.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что общая интегральная функція уравненія Риккати есть раціональная функція отъ трехъ его частныхъ интеграловъ. *Königsberger* доказалъ [1]), что кромѣ уравненій класса Риккати (и образующихся изъ него посредствомъ алгебраическаго преобразованія) нѣтъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, общій интегралъ которыхъ выражался бы раціональнымъ образомъ черезъ какое-либо число независимыхъ трансцендентныхъ частныхъ интеграловъ. Приведемъ въ сжатомъ видѣ доказательство *Кёнигсбергера.*

Сначала найдемъ, при какихъ условіяхъ общій интегралъ z уравненія:

(7) $$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, z),$$

гдѣ φ — алгебраическая функція отъ x и z, выражается *алгебраически* черезъ n частныхъ интеграловъ: $z_1, z_2 \dots z_n$ (съ условіемъ, что этотъ общій интегралъ не выражается алгебраически черезъ меньшее число частныхъ интеграловъ). Пусть будетъ:

(8) $$z = f(z_1, z_2, \dots z_n, c),$$

гдѣ f — алгебраическая функція отъ всѣхъ аргументовъ, а c — произвольное постоянное. Предполагаемъ, что между $z_1, z_2, \dots z_n$, равно какъ между ними и независимымъ перемѣннымъ x, нѣтъ никакихъ алгебраическихъ зависимостей. Дифференцируя уравненіе (8) и принимая во вниманіе уравненіе (7), получимъ:

$$\varphi(x, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} (\varphi(x, z_i)).$$

---

[1]) *Königsberger.*—Ueber die etc.—Act. Mat. III 1883 p. 1—48.

Вслѣдствіе сдѣланнаго нами предположенія заключаемъ, что послѣднее соотношеніе тождественно относительно $x, z_1, z_2, \ldots z_n, c$, такъ что тождествами будутъ и слѣдующія равенства:

$$\frac{\partial\varphi(x,f)}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial z_k}\varphi(x,z_i)+\frac{\partial f}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial\varphi(x,z_k)}{\partial z_k}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,f)}{\partial f}\cdot\frac{df}{dc}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial c}\varphi(x,z_i),$$

гдѣ k — какое-нибудь число изъ ряда: $1, 2, \ldots n$. Исключая изъ нихъ $\frac{\partial\varphi}{\partial f}$, получимъ:

$$\frac{\partial\varphi(x,z_k)}{\partial z_k}+\sum_{i=1}^{n}\varphi(x,z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}lg\frac{\frac{\partial f}{\partial z_k}}{\frac{\partial f}{\partial c}}=0.$$

Положимъ въ этомъ тождествѣ:

$$\varphi(x,z_k)=Z_k$$

и будемъ считать Z_k функціею перемѣннаго z_k, содержащею x въ видѣ произвольнаго параметра; далѣе, отдѣлимъ отъ суммы Σ въ послѣднемъ тождествѣ членъ, соотвѣтствующій $i=k$, а сумму остальныхъ членовъ (для $i=1, 2, \ldots k-1, k+1, \ldots n$) обозначимъ: $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(k)}$, тогда будемъ имѣть:

$$\frac{dZ_k}{dz_k}+Z_k\frac{\partial}{\partial z_k}lg\frac{\frac{\partial f}{\partial z_k}}{\frac{\partial f}{\partial c}}=-\sum_{i=1}^{n}{}^{(k)}\varphi(x,z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}lg\frac{\frac{\partial f}{\partial z_k}}{\frac{\partial f}{\partial c}}.$$

Полученное уравненіе линейно относительно Z_k, поэтому, интегрируя его, найдемъ:

$$Z_k=\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}}\left[\xi-\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_k}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\sum_{i=1}^{n}{}^{(k)}\varphi(x,z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}lg\frac{\frac{\partial f}{\partial z_k}}{\frac{\partial f}{\partial c}}dz_k\right],$$

или:

$$(9)\qquad \varphi(x,z_k)=\xi\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial z_k}}-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial c}}{\dfrac{\partial f}{\partial z_k}}\sum_{i=1}^{n}{}^{(k)}\varphi(x,z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}\int\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_k}}{\dfrac{\partial f}{\partial c}}dz_k,$$

гдѣ ξ вообще зависитъ отъ $x, z_1, z_2, \ldots z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots z_n$ и c.

Пользуясь формулою (9), представляющею условіе существованія алгебраической зависимости (8), изслѣдуемъ, каковъ долженъ быть видъ функціи φ для того, чтобы z было *раціональною* функціею отъ $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Пусть существуетъ зависимость:

$$z=f(z_1,z_2,\ldots z_n,c)=\frac{f_0(z_2,\ldots z_n,c)z_1^{\mu}+f_1(z_2,\ldots z_n,c)z_1^{\mu-1}+\cdots+f_{\mu}(z_2,\ldots z_n,c)}{\varphi_0(z_2,\ldots z_n,c)z_1^{\nu}+\varphi_1(z_2\ldots z_n,c)z_1^{\nu-1}+\cdots+\varphi_{\nu}(z_2,\ldots z_n,c)}.$$

На основаніи соображеній, изложенныхъ *Кёнигсбергеромъ* въ нижецитируемомъ его сочиненіи [1]) на стр. 77, можно заключить, что необходимо должно быть:

$$\mu=\nu=1,$$

такъ что, если z есть раціональная функція отъ $z_1, z_2, \ldots z_n$, то непремѣнно z должно быть линейною раціональною функціею по отношенію къ каждому изъ этихъ n частныхъ интеграловъ въ отдѣльности; можемъ поэтому написать:

$$z=f(z_1, z_2, \ldots z_n, c)=\frac{R_0+R_1 z_1}{Q_0+Q_1 z_1},$$

гдѣ $R_0, R_1, Q_0, Q_1,$ — цѣлыя функціи, линейныя по отношенію къ каждому изъ перемѣнныхъ: $z_2, z_3, \ldots z_n$. Составимъ правую часть уравненія (9), принимая въ немъ $k=1$. Имѣемъ.

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial c}}=\frac{R_1 Q_0-R_0 Q_1}{S_0 z_1^2+S_1 z_1+S_2},$$

гдѣ для краткости обозначено:

---

1) *Königsberger.* — Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig. ed. Teubner. 1882. (Цитируемъ по словамъ *Кёнигсбергера*).

$$S_0 = Q_1 \frac{\partial R_1}{\partial c} - R_1 \frac{\partial Q_1}{\partial c},$$

$$S_1 = Q_1 \frac{\partial R_0}{\partial c} - R_1 \frac{\partial Q_0}{\partial c} + Q_0 \frac{\partial R_1}{\partial c} - R_0 \frac{\partial Q_1}{\partial c},$$

$$S_2 = Q_0 \frac{\partial R_0}{\partial c} - R_0 \frac{\partial Q_0}{\partial c}.$$

Пусть корни трехчлена: $S_0 z_1^2 + S_1 z_1 + S_2$ будутъ: a и b (это — алгебраическія функціи отъ $z_2, \dots z_n$ и c), и пусть сначала a отлично отъ b; будемъ тогда имѣть:

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{R_1 Q_0 - R_0 Q_1}{S_0 (a-b)} \, lg \frac{z_1 - a}{z_1 - b},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = M lg L + \frac{R_1 Q_0 - R_0 Q_1}{S_0 z_1^2 + S_1 z_1 + S_2} \cdot \frac{z_1 \left(\frac{\partial b}{\partial z_i} - \frac{\partial a}{\partial z_i} \right) + b \frac{\partial a}{\partial z_i} - a \frac{\partial b}{\partial z_i}}{a - b},$$

гдѣ M и L — функціи отъ $z_1, z_2, \dots z_n$. Если мы послѣднее выраженіе вставимъ въ уравненіе (9), то при суммированіи должны тождественно исчезнуть всѣ члены съ логариѳмами, потому что $\varphi(x, z_1)$, по предположенію, есть алгебраическая функція отъ x и z_1. Поэтому въ результатѣ подстановки получимъ:

$$\varphi(x, z_1) = \xi \frac{S_0 z_1^2 + S_1 z + S_2}{R_1 Q_0 - R_0 Q_1} - \sum_{i=1}^{n} \varphi(x, z_i) \frac{z_i \left(\frac{\partial b}{\partial z_i} - \frac{\partial a}{\partial z_i} \right) + b \frac{\partial a}{\partial z_i} - a \frac{\partial b}{\partial z_i}}{a - b}.$$

Оказывается, что функція $\varphi(x, z_1)$ должна быть цѣлымъ многочленомъ второй степени относительно z_1.

Къ тому же результату придемъ, принимая $a = b$. Будемъ имѣть:

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{R_0 Q_1 - R_1 Q_0}{S_0 (z_1 - a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}} dz_1 = \frac{R_0 Q_1 - R_1 Q_0}{S_0 (z_1 - a)^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial z_i} + \frac{1}{z - a} \cdot \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot \frac{R_0 Q_1 - R_1 Q_0}{S_0},$$

и слѣдовательно:

$$\varphi(x,z_1)=\xi\frac{S_0 z_1^2+S_1 z+S_2}{R_1 Q_0-R_0 Q_1}+\sum_{i=2}^{n}\varphi(x,z_i)\left[\frac{\partial a}{\partial z_i}-\frac{S_0(z_1-a)}{R_1 Q_0-R_0 Q_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_i}\cdot\frac{R_0 Q_1-R_1 Q_0}{S_0}\right],$$

такъ что и въ данномъ случаѣ функція $\varphi(x,z_1)$ оказывается цѣлою функціею второй степени относительно z_1.

На основаніи полученнаго результата приходимъ къ заключенію, что для того, чтобы общій интегралъ уравненія (7) былъ раціональною функціею отъ нѣкотораго числа частныхъ интеграловъ, необходимо, чтобы это уравненіе имѣло видъ:

$$\frac{dz}{dx}=\varphi_1(x)\,.\,z^2+\varphi_2(x)\,.\,z+\varphi_3(x),$$

т. е. чтобы оно примыкало къ классу Риккати.

Изъ предыдущаго параграфа знаемъ, что число n, фигурирующее въ этомъ изслѣдованіи, равно 3.

Königsberger доказалъ въ той же статьѣ въ 3-мъ томѣ „Acta Mathematica“, что, кромѣ уравненій Риккати, нѣтъ уравненій перваго порядка, которыхъ общій интегралъ выражается *алгебраически* черезъ n частныхъ интеграловъ и произвольное постоянное.

ЧАСТЬ II.

Свойства функцій Риккати.

ГЛАВА I.

Характеристическія свойства функцій Риккати.

§ 1. Теорема объ ангармоническомъ отношеніи четырехъ интеграловъ уравненія Риккати.

Въ § 2 предшествующей главы мы видѣли, что общій интегралъ y уравненія Риккати связанъ раціонально съ тремя частными интегралами: y_1, y_2, y_3 и однимъ произвольнымъ постояннымъ c формулою:

$$y=\frac{y_1(y_3-y_2)+cy_2(y_1-y_3)}{y_3-y_2+c(y_1-y_3)}. \tag{1}$$

Опредѣляя изъ этой формулы c, получимъ:

$$c=\frac{(y_1-y)(y_3-y_2)}{(y_1-y_3)(y-y_2)}$$

или

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=c. \tag{2}$$

Уравненіе (2) служитъ выраженіемъ слѣдующей теоремы: *ангармоническое отношеніе* [1]) *произвольныхъ четырехъ частныхъ интеграловъ уравненія Риккати равно постоянному.* Эта теорема

---

[1]) Терминъ „ангармоническое отношеніе“ заимствованъ изъ проективной геометріи и употребленъ здѣсь въ переносномъ смыслѣ.

имѣетъ первостепенную важность въ приложеніяхъ уравненія Риккати, особенно къ вопросамъ геометріи.

Теорема объ ангармоническомъ отношеніи четырехъ интеграловъ уравненія Риккати впервые [1]) была доказана *Picard*'омъ въ нижецитируемомъ его сочиненіи [2]). Онъ доказалъ ее слѣдующимъ образомъ. Если y, y_1, y_2, y_3 — интегралы уравненія Риккати, то должно быть тождественно:

$$\frac{dy}{dx}+Py^2+Qy+R=0$$

$$\frac{dy_1}{dx}+Py_1{}^2+Qy_1+R=0$$

$$\frac{dy_2}{dx}+Py_2{}^2+Qy_2+R=0$$

$$\frac{dy_3}{dx}+Py_3{}^2+Qy_3+R=0,$$

откуда вытекаетъ слѣдующее уравненіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & y^2 & y & 1 \\ \frac{dy_1}{dx} & y_1{}^2 & y_1 & 1 \\ \frac{dy_2}{dx} & y_2{}^2 & y_2 & 1 \\ \frac{dy_3}{dx} & y_3{}^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая опредѣлитель по элементамъ перваго вертикальнаго столбца, найдемъ:

$$\frac{dy}{dx}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)+\frac{dy_1}{dx}(y_2-y_3)(y_3-y)(y-y_2)+$$
$$+\frac{dy_2}{dx}(y_3-y)(y-y_1)(y_1-y_3)+\frac{dy_3}{dx}(y-y_1)(y_1-y_2)(y_2-y)=0,$$

откуда легко получаемъ соотношеніе:

$$\frac{d[(y-y_1)(y_3-y_2)]}{(y-y_1)(y_3-y_2)}-\frac{d[(y-y_2)(y_3-y_1)]}{(y-y_2)(y_3-y_1)}=0$$

и далѣе, простымъ интегрированіемъ находимъ уравненіе (2).

---

[1]) По свидѣтельству *Antonne*'а въ ст.: „Sur la nature etc.“ loc cit

[2]) *Picard*.—loc. cit. § 9, стр. 341.

Доказанная теорема характеристична для функцій Риккати, т. е. каждая функція, обладающая свойствомъ, выраженнымъ въ уравненіи (2), удовлетворяетъ уравненію Риккати. Въ самомъ дѣлѣ, написавъ уравненіе (2) въ видѣ:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=cX,$$

гдѣ X—опредѣленная функція x, получимъ дифференцированіемъ:

$$(y'-y'_1)(y-y_2)-(y'-y'_2)(y-y_1)=c(y-y_2)^2X';$$

исключая отсюда c на основаніи предыдущаго уравненія, получимъ уравненіе Риккати, въ которомъ будемъ имѣть:

$$P=-\frac{1}{y_1-y_2}\cdot\frac{X'}{X},\quad Q=\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}\cdot\frac{X'}{X}-\frac{d\lg(y_1-y_2)}{dx},$$

$$R=-\frac{1}{y_1-y_2}\left(y'_1y_2-y'_2y_1-y_1y_2\frac{X'}{X}\right).$$

§ 2. Форма зависимости общаго интеграла уравненія Риккати отъ произвольнаго постояннаго.

Изъ формулы (1) предыдущаго параграфа заключаемъ, что общій интегралъ уравненія Риккати имѣетъ видъ:

$$y=\frac{X_1+CX_2}{X_3+CX_4},\tag{3}$$

гдѣ X_1, X_2, X_3, X_4 — функціи x, а C — произвольное постоянное; эта форма интеграла показываетъ, что *общій интегралъ уравненія Риккати есть линейная раціональная функція отъ произвольнаго постояннаго* [1]).

Свойство это замѣчательно въ томъ отношеніи, что, хотя мы выраженія общаго интеграла уравненія Риккати не знаемъ, тѣмъ не менѣе знаемъ, въ какой формѣ въ этотъ интегралъ входитъ произвольное постоянное. Отмѣченное свойство функцій Риккати, кромѣ того, находится, какъ увидимъ впослѣдствіи, въ самой тѣсной связи со свойствами ихъ особенныхъ точекъ. Линейная раціональная за-

---

[1]) Это свойство функцій Риккати было извѣстно еще Лагранжу. См. *Lagrange*, Oeuvres, t. IX p. 106.

висимость функцій Риккати отъ произвольнаго постояннаго такъ же характеристична для этихъ функцій, какъ теорема объ ангармоническомъ отношеніи четырехъ интеграловъ уравненія Риккати: дифференцируя уравненіе (3) и исключая произвольное постоянное, придемъ къ уравненію Риккати. Этого слѣдовало ожидать напередъ, такъ какъ уравненіе (3), равно какъ уравненіе (2), есть только другая форма уравненія (1).

ГЛАВА II.

Особенныя точки функцій Риккати и свойства этихъ функцій въ области особенныхъ точекъ.

§ 1. Особенныя точки функцій Риккати.

Изложивъ характеристическія свойства функцій Риккати, перейдемъ къ изученію ихъ особенныхъ точекъ; при этомъ изученіи преимущественно будемъ пользоваться свойствами интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія 2-го порядка, къ которому приводится уравненіе Риккати.

Коэффиціенты P, Q, R въ уравненіи Риккати будемъ считать въ дальнѣйшемъ *однозначными* функціями x на всей плоскости этого перемѣннаго.

Функція Риккати, какъ всякая общая интегральная функція дифференціальнаго уравненія, можетъ имѣть два рода особенныхъ точекъ: 1) могутъ быть особенныя точки, не зависящія отъ значенія произвольнаго постояннаго; положеніе такихъ точекъ не мѣняется, когда мѣняемъ постоянное C, слѣдовательно эти точки принадлежатъ всѣмъ *опредѣленіямъ* [1]) интегральной функціи; такія точки называются *неподвижными особенными точками;* 2) кромѣ неподвиж-

[1]) *Опредѣленіемъ* (détermination) функціи, содержащей произвольное постоянное, называется значеніе функціи, соотвѣтствующее какому-нибудь частному значенію произвольнаго постояннаго.

ныхъ, могутъ быть еще т. н. *подвижныя особенныя точки*, перемѣщающіяся на плоскости при измѣненіи произвольнаго постояннаго.

По свойству функціи въ области особенной точки, послѣдняя можетъ быть трехъ родовъ: 1) *полюсъ* [1]) — точка, въ которой функція получаетъ безконечно большое значеніе, но такъ, что обратная величина функціи обращается въ этой точкѣ въ нуль и остается голоморфною въ области этой точки; если $x = x_0$ есть полюсъ функціи $f(x)$, то всегда можно представить эту функцію въ видѣ:

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{(x - x_0)^m},$$

гдѣ m — цѣлое положительное число, причемъ функція $f_1(x)$ въ области точки x_0 голоморфна, а въ самой точкѣ x_0 конечна и отлична отъ нуля; число m называется *порядкомъ* полюса x_0; 2) *существенно особенная точка* [2]) — въ такой точкѣ ни самая функція, ни ея обратная величина не имѣетъ опредѣленнаго значенія, а можетъ принимать произвольное напередъ заданное значеніе; 3) *точка развѣтвленія*, или *алгебраически критическая точка* [3]) — въ такой точкѣ функція имѣетъ одно опредѣленное значеніе, но въ области этой точки она многозначна и имѣетъ вообще n *вѣтвей*.

Painlevé доказалъ, что интегральная функція дифференціальнаго уравненія перваго порядка вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

гдѣ f — раціональная функція отъ y, не имѣетъ подвижныхъ существенно особенныхъ точекъ. Такъ какъ уравненіе Риккати относится къ этому классу уравненій, то заключаемъ à priori, что подвижныя особенныя точки функціи Риккати могутъ быть только алгебраически критическія и полюсы.

Докажемъ, что функція Риккати не имѣетъ подвижныхъ алгебраически критическихъ точекъ. Для этого замѣтимъ, что на осно-

---

[1]) Франц. *pôle;* по *Вейерштрасу: ausserwesentliche singuläre Stelle*.

[2]) Франц. *point singulier essentiel;* по *Вейерштрасу: wesentliche singuläre Stelle*.

[3]) Франц. *point critique algébrique, point de ramification;* нѣм. *der Verzweigungspunkt*.

ваніи характеристическаго свойства функціи Риккати эту функцію можно представить въ видѣ:

$$y = \frac{K + Ly_0}{M + Ny_0},$$

гдѣ y_0 — начальное значеніе y, соотвѣтствующее нѣкоторому произвольно заданному значенію $x = x_0$ (причемъ x_0 считаемъ обыкновенною точкою функціи y), а K, L, M, N — функціи x, не зависящія отъ y_0; y_0 играетъ роль произвольнаго постояннаго. На основаніи послѣдней формулы заключаемъ, что y есть раціональная функція отъ y_0, и, обратно, y_0 есть раціональная функція отъ y; слѣдовательно, обѣ эти функціи однозначны. Допустимъ, что, выйдя изъ точки x_0 съ какимъ-нибудь значеніемъ y_0, продолжаемъ аналитически по общеизвѣстному способу функцію y по нѣкоторому пути до произвольной обыкновенной точки x, причемъ путь $x_0 x$ не долженъ проходить ни черезъ одну изъ неподвижныхъ особенныхъ точекъ. Такъ какъ y есть раціональная функція отъ y_0, то мы при выполненіи этого условія должны придти въ точку x съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ значеніемъ y, зависящимъ единственно отъ начальнаго значенія y_0; мѣняя y_0, будемъ получать въ x различныя опредѣленныя значенія y. Если мы совершимъ обратный переходъ по тому же пути отъ точки x къ точкѣ x_0, то такъ же окажется, что y_0 есть однозначная, вполнѣ опредѣленная функція y. Этотъ результатъ, вытекающій непосредственно изъ вышенаписанной формы функціи Риккати, не совмѣстенъ съ предположеніемъ, что эта функція имѣетъ подвижныя алгебраически критическія точки. Въ самомъ дѣлѣ, если бы были такія точки, то мѣняя непрерывно y_0 и выбирая надлежащимъ образомъ путь $x_0 x$ (при соблюденіи однако условія, чтобы онъ не проходилъ ни черезъ одну изъ неподвижныхъ особенныхъ точекъ), мы могли бы достигнуть того, что одна изъ подвижныхъ алгебраически-критическихъ точекъ придетъ на линію $x_0 x$; тогда y перестанетъ быть опредѣленною однозначною функціею y_0; то же самое произойдетъ при разсматриваніи y_0, какъ функціи y.

Итакъ, подвижныя особенныя точки функціи Риккати могутъ быть только полюсами.

Неподвижныя особенныя точки функціи Риккати опредѣлимъ аналитически слѣдующимъ образомъ. Мы видѣли (§ 1), что преобразованіе:

$$y = \frac{1}{Pz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{1}$$

приводитъ уравненіе Риккати къ виду:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(Q - \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + PRz = 0. \tag{2}$$

Послѣднее уравненіе линейно, слѣдовательно его особенныя точки неподвижны и служатъ особенными точками коэффиціентовъ этого уравненія. Но такъ какъ мы предположили, что коэффиціенты P, Q, R уравненія Риккати однозначны, то для функціи z могутъ быть особенными точками только тѣ значенія x, при которыхъ коэффиціенты уравненія (2) обращаются въ безконечность, и, кромѣ того, точка $x = \infty$. Такимъ образомъ особенныя точки функціи z опредѣляются уравненіями:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \infty \\ P = 0 \\ P = \infty \\ Q = \infty \\ PR = \infty. \end{array}\right. \tag{3}$$

Въ частномъ случаѣ, если P, Q и R — цѣлые многочлены по x, или вообще голоморфныя функціи x, то особенными точками функціи z могутъ быть только корни функціи P и точка $x = \infty$. Среди корней уравненій (3) могутъ оказаться, впрочемъ, и такія точки, которыя не будутъ особенными точками для функціи z; такого рода точки, по отношенію къ функціи z, называются точками, *особенными по виду*. Всѣ особенныя точки функціи z вообще будутъ, на основаніи уравненія (1), особенными точками функціи Риккати, а именно: ея неподвижными особенными точками, потому что онѣ не зависятъ отъ произвольнаго постояннаго, входящаго въ составъ функціи Риккати.

Кромѣ этихъ неподвижныхъ особенныхъ точекъ (которыя могутъ принадлежать къ тремъ перечисленнымъ категоріямъ особенныхъ точекъ) функція Риккати можетъ имѣть, какъ мы видѣли, еще подвижные полюсы. Функція Риккати имѣетъ то замѣчательное свойство, что всѣ ея подвижные полюсы суть полюсы 1-го порядка. Свойство это, открытое проф. Анисимовымъ, мы докажемъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть $x=x_0$ будетъ полюсъ функціи Риккати, не совпадающій ни съ одною изъ ея неподвижныхъ особенныхъ точекъ, слѣдовательно x_0 не удовлетворяетъ ни одному изъ уравненій (3). Тогда можемъ представить y въ видѣ:

$$y=(x-x_0)^{-n}F(x), \tag{4}$$

гдѣ n—цѣлое положительное число, а $F(x)$ при $x=x_0$ конечно и отлично отъ нуля. Дифференцируя выраженіе (4) найдемъ:

$$\frac{dy}{dx}=(x-x_0)^{-n}F'(x)-n(x-x_0)^{-n-1}F(x).$$

Вставляя это выраженіе и выраженіе y въ уравненіе:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)=0,$$

получимъ:

$$(x-x_0)^{-n}F'(x)-n(x-x_0)^{-n-1}F(x)+P(x)(x-x_0)^{-2n}[F(x)]^2+$$
$$+Q(x)(x-x_0)^{-n}F(x)+R(x)=0,$$

или:

$$nF(x)=(x-x_0)F'(x)+P(x)(x-x_0)^{-n+1}[F(x)]^2+(x-x_0)Q(x)F(x)+$$
$$+(x-x_0)^{n+1}R(x).$$

Полагая въ этомъ тождествѣ $x=x_0$ и имѣя въ виду вышесказанныя свойства точки x_0 и функціи $F(x)$, найдемъ:

$$n=P(x_0)F(x_0)\Big/^{x=x_0}(x-x_0)^{-n+1}. \tag{5}$$

Такъ какъ лѣвая часть полученнаго тождества конечна и отлична отъ нуля, то такова же должна быть и правая часть, что возможно только при условіи:

$$-n+1=0,\ \text{т. е.}\ n=1,$$

чѣмъ и доказано, что всѣ подвижныя особенныя точки функціи Риккати суть полюсы перваго порядка [1]).

Изъ доказаннаго свойства функціи Риккати выводимъ непосред-

---

[1]) Сравн. это доказательство съ доказательствомъ проф. *Анисимова*: „Уравненіе Риккати общаго вида“ стр. 18.

ственное слѣдствіе, что эта функція не можетъ имѣть подвижныхъ нулей выше 1-го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи характеристическаго свойства (3) функціи Риккати заключаемъ, что обратная величина этой функціи есть также функція Риккати, слѣдовательно, если бы функція Риккати y имѣла подвижной нуль $x=x_0$ порядка $n>1$, то эта точка была бы подвижнымъ полюсомъ функціи Риккати $y_1=\frac{1}{y}$ порядка $n>1$.

§ 2. Свойства функціи Риккати въ области ея особенныхъ точекъ.

Такъ какъ подвижныя особенныя точки функціи Риккати суть полюсы 1-го порядка, то въ области каждой изъ этихъ точекъ функція *однозначна*.

На основаніи формулъ (4) и (5) легко получить форму разложенія функціи въ области такого полюса $x=x_0$. А именно, такъ какъ $n=1$, то изъ формулы (5) имѣемъ:

$$F(x_0)=\frac{1}{P(x_0)},$$

и отсюда заключаемъ на основаніи формулы (4), что въ области $x=x_0$ функція Риккати разлагается въ безконечный рядъ вида:

$$y=\frac{1}{P(x_0)}\cdot\frac{1}{x-x_0}+a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots\cdots\cdots$$

Изслѣдуемъ свойства функціи Риккати въ области ея неподвижныхъ особенныхъ точекъ.

Всякую точку $x=a$ простымъ линейнымъ преобразованіемъ:

$$x_1=x-a$$

можемъ перенести въ начало координатъ. Пусть точка $x=0$ будетъ одною изъ неподвижныхъ особенныхъ точекъ функціи Риккати, слѣдовательно и особенною точкою функціи z, опредѣляемой линейнымъ уравненіемъ (2).

Если обозначимъ черезъ z_1 и z_2 два *различныхъ* частныхъ интеграла уравненія (2), то его общій интегралъ выразится формулою:

$$z=C_1z_1+C_2z_2,$$

гдѣ C_1 и C_2—произвольныя постоянныя, а тогда функція Риккати, на основаніи преобразованія (1), представится въ видѣ:

$$y=\frac{1}{P}\cdot\frac{z'_1+C_0 z'_2}{z_1+C_0 z_2}, \tag{6}$$

гдѣ $C_0=\frac{C_2}{C_1}$—также произвольное постоянное. Заставимъ перемѣнное x описать въ положительномъ направленіи простой сомкнутый контуръ, заключающій внутри себя точку $x=0$, и не заключающій другихъ особенныхъ точекъ. Условимся значеніе какой-нибудь функціи $f(x)$ послѣ такого обхода изображать символомъ $\overline{f(x)}$, такъ что значенія интеграловъ z_1 и z_2 послѣ сказаннаго обхода будутъ соотвѣтственно $\overline{z_1}$ и $\overline{z_2}$. Изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій знаемъ, что $\overline{z_1}$ и $\overline{z_2}$ будутъ также интегралами уравненія (2) и слѣдовательно они выражаются, какъ однородныя линейныя функціи отъ z_1 и z_2, такъ что будемъ имѣть:

$$\overline{z_1}=\alpha_{11} z_1+\alpha_{12} z_2$$
$$\overline{z_2}=\alpha_{21} z_1+\alpha_{22} z_2,$$

гдѣ $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$—постоянные коэффиціенты—т. н. *коэффиціенты обхода* около особенной точки $x=0$; эти коэффиціенты удовлетворяютъ условію:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{7}$$

Замѣняя въ формулѣ (6) y черезъ y_0 и называя значеніе функціи y_0 послѣ обхода около точки $x=0$ черезъ y_1, получимъ:

$$y_1=\overline{y_0}=\frac{1}{P}\cdot\frac{\overline{z_1}'+C_0\overline{z_2}'}{\overline{z_1}+C_0\overline{z_2}}=\frac{1}{P}\cdot\frac{z_1'+C_1 z_2'}{z_1+C_1 z_2}, \tag{8}$$

гдѣ обозначено:

$$C_1=\frac{\alpha_{12}+C_0\alpha_{22}}{\alpha_{11}+C_0\alpha_{21}}=\varphi(C_0). \tag{9}$$

Значеніе y_1 послѣ обхода, опредѣляемое формулою (8), будетъ вообще отлично отъ первоначальнаго значенія y_0. Если x обойдетъ еще разъ точку $x=0$ въ томъ же направленіи, то получимъ новое значеніе функціи Риккати—y_2, опредѣляемое по той же формулѣ (8):

$$y_2 = \overline{y_1} = \frac{1}{P} \cdot \frac{z_1' + C_2 z_2'}{z_1 + C_2 z_2},$$

гдѣ мы положили:

$$C_2 = \frac{\alpha_{12} + C_1 \alpha_{22}}{\alpha_{11} + C_1 \alpha_{21}} = \varphi(C_1);$$

будемъ обозначать условно:

$$\varphi(C_1) = \varphi[\varphi(C_0)] = \varphi^2(C_0).$$

Совершая неопредѣленное число обходовъ въ положительномъ направленіи около точки $x = 0$, получимъ рядъ значеній функціи Риккати:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_i, y_{i+1}, \ldots\ldots,$$

вообще говоря, различныхъ. Значеніе y_{i+1} получается изъ y_i послѣ обхода въ положительномъ направленіи около точки $x = 0$, т. е., по нашему обозначенію:

$$y_{i+1} = \overline{y_i}.$$

Соотвѣтственно ряду значеній для y, получимъ по формулѣ (9) рядъ значеній для постояннаго C:

$$C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_i, C_{i+1}, \ldots\ldots,$$

причемъ будемъ имѣть:

$$C_{i+1} = \varphi(C_i) = \varphi^{i+1}(C_0).$$

Если заставимъ перемѣнное x обойти точку $x = 0$ въ отрицательномъ направленіи, то получимъ значеніе y_{-1}, удовлетворяющее условію:

$$\overline{y_{-1}} = y_0.$$

Соотвѣтствующее значеніе C_{-1} опредѣлится изъ формулы:

$$C_0 = \frac{\alpha_{12} + C_{-1}\alpha_{22}}{\alpha_{11} + C_{-1}\alpha_{21}},$$

такъ что:

$$C_0 = \varphi(C_{-1})$$

или условно:

$$C_{-1} = \varphi^{-1}(C_0).$$

Когда x совершитъ неопредѣленное число обходовъ около точки $x = 0$ въ отрицательномъ направленіи, то получимъ рядъ вообще различныхъ значеній функціи Риккати.

$$y_0, y_{-1}, y_{-2}, \ldots\ldots, y_{-i}, y_{-i-1}, \ldots\ldots,$$

причемъ будемъ имѣть:

$$y_{-i} = \overline{y}_{-i-1};$$

соотвѣтствующій рядъ значеній C будетъ:

$$C_0, C_{-1}, C_{-2}, \ldots\ldots C_{-i}, C_{-i-1}, \ldots\ldots,$$

причемъ C_{-i} опредѣляется формулою:

$$C_{-i} = \varphi^{-1}(C_{-i+1}) = \varphi^{-i}(C_0).$$

Будемъ такимъ образомъ имѣть неопредѣленно простирающійся въ обѣ стороны рядъ значеній функціи Риккати:

$$\ldots\ldots y_{-i-1}, y_{-i}, \ldots\ldots y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\ldots y_i, y_{i+1}, \ldots\ldots \tag{10}$$

съ соотвѣтствующимъ рядомъ значеній C:

$$\ldots\ldots C_{-i-1}, C_{-i}, \ldots\ldots C_{-1}, C_0, C_1, \ldots\ldots C_i, C_{i+1}, \ldots\ldots \tag{11}$$

Ангармоническое отношеніе каждыхъ четырехъ значеній: y_k, y_l, y_m, y_n изъ ряда (10) равняется постоянному; легко показать, что это постоянное есть не что иное, какъ ангармоническое отношеніе соотвѣтствующихъ членовъ ряда (11): C_k, C_l, C_m, C_n. Имѣемъ:

$$y_m = \frac{1}{P}\cdot\frac{z_1' + C_m z_2'}{z_1 + C_m z_2}, \quad y_k = \frac{1}{P}\cdot\frac{z_1' + C_k z_2'}{z_1 + C_k z_2}$$

$$y_m - y_k = \frac{1}{P}\cdot\frac{(C_m - C_k)(z_2' z_1 - z_1' z_2)}{(z_1 + C_m z_2)(z_1 + C_k z_2)},$$

Аналогично найдемъ:

$$y_m - y_l = \frac{1}{P}\cdot\frac{(C_m - C_l)(z_2' z_1 - z_1' z_2)}{(z_1 + C_m z_2)(z_1 + C_l z_2)}$$

и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{y_m - y_k}{y_m - y_l} = \frac{C_m - C_k}{C_m - C_l}\cdot\frac{z_1 + C_l z_2}{z_1 + C_k z_2}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\frac{y_n - y_k}{y_n - y_l} = \frac{C_n - C_k}{C_n - C_l}\cdot\frac{z_1 + C_l z_2}{z_1 + C_k z_2},$$

такъ что найдемъ:

$$\frac{y_m - y_k}{y_m - y_l} : \frac{y_n - y_k}{y_n - y_l} = \frac{C_m - C_k}{C_m - C_l} : \frac{C_n - C_k}{C_n - C_l}, \tag{12}$$

что именно требовалось доказать.

Всѣ постоянныя C выражаются извѣстнымъ образомъ черезъ C_0, послѣднее же вполнѣ произвольно. Давая C_0 различныя значенія, будемъ получать различныя опредѣленія функціи Риккати. Изъ этихъ опредѣленій однѣ могутъ быть однозначны, другія—многозначны; однозначны будутъ тѣ опредѣленія, для которыхъ всѣ члены ряда (10) равны между собою; тогда, очевидно, равны между собою также всѣ члены ряда (11); обратно, при равенствѣ всѣхъ членовъ ряда (11) равны между собою всѣ члены ряда (10). Чтобы опредѣлить значенія C_0, соотвѣтствующія однозначнымъ опредѣленіямъ функціи Риккати, замѣтимъ, что всѣ члены ряда (11) будутъ равны между собою, если равны будутъ какіе-нибудь 2 смежныхъ члена этого ряда, потому что каждый членъ ряда (11) образуется изъ предыдущаго по одному и тому же закону, выражающемуся функціональною зависимостью φ. Выражая условіе $C_1 = C_0$, получимъ для вычисленія C_0 уравненіе:

$$C_0 = \frac{\alpha_{12} + C_0 \alpha_{22}}{\alpha_{11} + C_0 \alpha_{21}}$$

или:

$$\alpha_{21} C_0^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) C_0 - \alpha_{12} = 0. \tag{13}$$

Послѣднее уравненіе даетъ для C_0 вообще два различныхъ значенія, такъ что вообще *въ области каждой неподвижной особенной точки существуютъ два однозначныхъ опредѣленія функціи Риккати.* Для этихъ опредѣленій точка $x = 0$ есть обыкновенная точка или полюсъ.

Въ частномъ случаѣ, когда коэффиціенты обхода около точки $x = 0$ удовлетворяютъ условію:

$$(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21} = 0,$$

корни уравненія (13) совпадаютъ, тогда въ области точки $x = 0$ функція Риккати имѣетъ только одно однозначное опредѣленіе.

Займемся теперь многозначными опредѣленіями функціи Риккати, такъ что будемъ предполагать, что C_0 отлично отъ корней уравненія (13).

Принявъ для y какое-нибудь опредѣленіе y_0, соотвѣтствующее значенію C_0, заставимъ x обойти i разъ въ положительномъ направленіи около точки $x = 0$; получимъ тогда значеніе y_i, соотвѣтствующее значенію C_i, которое опредѣляется, какъ извѣстно, по формулѣ:

$$C_i = \varphi^i (C_0).$$

На основаніи формулы (9) можемъ послѣдовательно вычислить: C_1, $C_2, C_3, \ldots$. Вычисливъ 2—3 изъ этихъ чиселъ, усматриваемъ слѣдующую ихъ форму:

$$\varphi^i (C_0) = \frac{\alpha_{12} M_i + C_0 N_i}{K_i + C_0 \alpha_{21} L_i}, \tag{14}$$

гдѣ M_i, N_i, K_i, L_i—цѣлыя функціи отъ коэффиціентовъ обхода. Докажемъ справедливость этой формулы методомъ полной индукціи. Пусть формула (14) справедлива для $\varphi^{i-1} (C_0)$, такъ что имѣемъ:

$$\varphi^{i-1} (C_0) = \frac{\alpha_{12} M_{i-1} + C_0 N_{i-1}}{K_{i-1} + C_0 \alpha_{21} L_{i-1}};$$

отсюда и на основаніи формулы (9), найдемъ слѣдующее выраженіе для $\varphi^i (C_0)$:

$$\varphi^i (C_0) = \frac{\alpha_{12} + \varphi^{i-1} (C_0) \alpha_{22}}{\alpha_{11} + \varphi^{i-1} (C_0) \alpha_{21}} =$$

$$= \frac{\alpha_{12} (K_{i-1} + \alpha_{22} M_{i-1}) + C_0 (\alpha_{12} \alpha_{21} L_{i-1} + \alpha_{22} N_{i-1})}{\alpha_{11} K_{i-1} + \alpha_{12} \alpha_{21} M_{i-1} + C_0 \alpha_{21} (\alpha_{11} L_{i-1} + N_{i-1})}, \tag{15}$$

что подтверждаетъ формулу (14); такъ какъ эта формула справедлива для $i = 0, 1, 2$, то заключаемъ, что она справедлива для всѣхъ значеній i. Черезъ сравненіе формулъ (14) и (15) находимъ слѣдующія реккуррентныя формулы для вычисленія коэффиціентовъ M_i, N_i, K_i, L_i:

$$\left.\begin{aligned} M_i &= K_{i-1} + \alpha_{22} M_{i-1} \\ K_i &= \alpha_{11} K_{i-1} + \alpha_{12} \alpha_{21} M_{i-1} \\ N_i &= \alpha_{12} \alpha_{21} L_{i-1} + \alpha_{22} N_{i-1} \\ L_i &= \alpha_{11} L_{i-1} + N_{i-1} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Комбинируя первыя два изъ этихъ уравненій, получимъ слѣдующія тождественныя разностныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ коэффиціенты M и K:

$$M_{i+1} = (\alpha_{11} + \alpha_{22}) M_i - D M_{i-1}$$
$$K_{i+1} = (\alpha_{11} + \alpha_{22}) K_i - D K_{i-1},$$

гдѣ D есть опредѣлитель коэффиціентовъ обхода. Сопоставляя два послѣднихъ уравненія (16), найдемъ, что коэффиціенты N и L удовлетворяютъ тѣмъ же разностнымъ уравненіямъ:

$$N_{i+1} = (\alpha_{11} + \alpha_{22})\, N_i - D N_{i-1}$$
$$L_{i+1} = (\alpha_{11} + \alpha_{22})\, L_i - D L_{i-1}.$$

Полагая

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = A,$$

заключимъ, что всѣ 4 коэффиціента: M, N, K, L формулы (14) удовлетворяютъ одному и тому же разностному уравненію:

$$V_{i+1} = A V_i - D V_{i-1}. \tag{17}$$

Имѣемъ, очевидно:

$$\left\{\begin{array}{l} M_0 = 0,\ N_0 = 1,\ K_0 = 1,\ L_0 = 0 \\ M_1 = 1,\ N_1 = \alpha_{22},\ K_1 = \alpha_{21},\ L_1 = 1. \end{array}\right. \tag{18}$$

Такъ какъ:

$$M_0 = L_0,\ M_1 = L_1,$$

то на основаніи уравненія (17) заключаемъ, что для всякаго i имѣемъ равенство:

$$L_i = M_i.$$

Пользуясь этимъ результатомъ, мы можемъ выразить коэффиціенты K и N черезъ M; а именно: изъ послѣдняго изъ уравненій (16) находимъ:

$$N_i = M_{i+1} - \alpha_{11} M_i,$$

а изъ перваго изъ уравненій (16):

$$K_i = M_{i+1} - a_{22} M_i,$$

такъ что формулу (14) можемъ переписать въ видѣ:

$$\varphi^i(C_0) = \frac{\alpha_{12} M_i + C_0 (M_{i+1} - \alpha_{11} M_i)}{M_{i+1} - \alpha_{22} M_i + C_0 \alpha_{21} M_i}. \tag{19}$$

Остается вычислить коэффиціенты M. Составивъ по уравненію (17) на основаніи формулы (18) нѣсколько послѣдовательныхъ коэффиціентовъ M_2, M_3, M_4 ...., мы можемъ усмотрѣть законъ образованія этихъ коэффиціентовъ. Окажется, что коэффиціентами при различныхъ степеняхъ A и D будутъ служить опредѣленныя числа Паскалева треугольника. Обозначимъ номерами вертикальные столбцы и горизонтальныя строки Паскалева треугольника слѣдующимъ образомъ [1]):

[1]) Мы пропустили ненужный намъ первый вертикальный столбецъ, состоящій изъ единицъ.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	2	1					
3	3	3	1				
4	4	6	4	1			
5	5	10	10	5	1		
6	6	15	20	15	6	1	
7	7	21	35	35	21	7	1
	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Число, принадлежащее m-ому столбцу и n-ой строкѣ будемъ обозначать символомъ (m, n). По самому закону образованія чиселъ Паскалева треугольника имѣемъ слѣдующее соотношеніе:

$$(m, n)+(m+1, n)=(m+1, n+1). \tag{20}$$

При такихъ обозначеніяхъ можемъ коэффиціентъ M_{i+1} написать въ формѣ:

$$M_{i+1}=A^i-(1, i-1) D A^{i-2}+(2, i-2) D^2 A^{i-4}+\cdots\cdots+$$
$$+(-1)^{\frac{i-\varepsilon}{2}}\left(\frac{i-\varepsilon}{2}, \frac{i+\varepsilon}{2}\right) D^{\frac{i-\varepsilon}{2}} A^{\varepsilon}, \tag{21}$$

гдѣ черезъ ε обозначено число:

$$\varepsilon=\frac{1-(-1)^i}{2},$$

такъ что при i четномъ $\varepsilon=0$, а при i нечетномъ $\varepsilon=1$. [1]). Формулу (21) можно провѣрить методомъ полной индукціи на основаніи уравненія (17) при помощи соотношенія (20).

---

[1]) Другую форму выраженія того же коэффиціента можно найти въ цитированномъ сочиненіи пр. Анисимова (стр. 25, формула 64).

Пользуясь формулою (19), можемъ показать, что постоянное ангармоническое отношеніе четырехъ значеній функціи Риккати не зависитъ отъ C_0, т. е. что это отношеніе одинаково для всѣхъ опредѣленій функціи Риккати; въ самомъ дѣлѣ, вычисляя по формулѣ (19) правую часть уравненія (12), найдемъ, что сказанное ангармоническое отношеніе равно:

$$\frac{y_m - y_k}{y_m - y_l} \cdot \frac{y_n - y_k}{y_n - y_l} = \frac{M_m M_{k+1} - M_k M_{m+1}}{M_m M_{l+1} - M_l M_{m+1}} \cdot \frac{M_n M_{k+1} - M_k M_{n+1}}{M_n M_{l+1} - M_l M_{n+1}}.$$

Теперь приступимъ къ разсмотрѣнію многозначныхъ опредѣленій функціи Риккати. Считаемъ, какъ было сказано, C_0 отличнымъ отъ корней уравненія (13); тогда не всѣ члены ряда (10) равны между собою, также и члены ряда (11) не всѣ равны между собою. Если потребуемъ, чтобы было тождественно:

$$C_i = C_0 \tag{22}$$

съ условіемъ:

$$C_j \neq C_0 \text{ при } 0 < j < i,$$

то будетъ также:

$$C_{i+r} = C_r = C_{ki+r},$$

гдѣ k и r какія-нибудь цѣлыя числа; въ этомъ случаѣ въ ряду (11) будетъ періодически повторяться группа различныхъ между собою членовъ:

$$C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots C_{i-1},$$

и сообразно съ этимъ въ ряду (10) періодически будетъ повторяться группа различныхъ между собою членовъ:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_{i-1}.$$

При послѣдовательныхъ обходахъ около точки $x=0$ въ положительномъ направленіи значенія $y_0, y_1, \ldots\ldots y_{i-1}$ будутъ повторяться въ круговомъ порядкѣ. Значеніе y_{i-1} послѣ обхода въ положительномъ направленіи около точки $x=0$ перейдетъ въ y_0. Такимъ образомъ тѣ опредѣленія функціи Риккати, которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ C_0, удовлетворяющимъ уравненію (22), будутъ имѣть i вѣтвей, т. е. будутъ i—значны. Условіе (22) на основаніи уравненія (19) напишется въ видѣ:

$$\frac{\alpha_{12} M_i + C_0 (M_{i+1} - \alpha_{11} M_i)}{M_{i+1} - \alpha_{22} M_i + C_0 \alpha_{21} M_i} = C_0,$$

или, по упрощеніи:

$$[\alpha_{21} C_0^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) C_0 - \alpha_{12}] M_i = 0.$$

Но такъ какъ C_0 не удовлетворяетъ уравненію (13), то получаемъ слѣдующее уравненіе:

$$M_i = 0. \tag{23}$$

Въ послѣднемъ уравненіи M_i опредѣляется изъ уравненія (21), такъ что уравненіе (23) устанавливаетъ между коэффиціентами обхода нѣкоторое опредѣленное соотношеніе, не зависящее отъ C_0. Итакъ, если коэффиціенты обхода около точки $x=0$ удовлетворяютъ уравненію (23), то въ области этой точки *всѣ опредѣленія функціи Риккати i-значны,* за исключеніемъ двухъ однозначныхъ опредѣленій, отмѣченныхъ раньше. Для всѣхъ i—значныхъ опредѣленій функціи Риккати точка $x=0$ служитъ точкою развѣтвленія.

Понятно, что изъ всѣхъ положительныхъ значеній i, при которыхъ выполняется уравненіе (23), слѣдуетъ въ послѣднемъ разсужденіи подразумѣвать наименьшее. При условіи (23) будетъ также тождественно:

$$M_{ki} = 0,$$

гдѣ k—какое угодно цѣлое число, потому что условіе (22) влечетъ за собою условіе:

$$C_{ki} = C_0;$$

далѣе при условіи: $0 < j < i$ не можетъ существовать равенство:

$$M_{ki+j} = 0,$$

потому что отсюда мы получили бы:

$$C_{ki+j} = C_j = C_0$$

$$M_j = 0, \text{ при } 0 < j < i,$$

что противорѣчило бы нашему предположенію.

Если C_0 отлично отъ корней уравненія (13), и притомъ нѣтъ такого значенія i, при которомъ удовлетворялось бы уравненіе вида (23), то *всѣ опредѣленія функціи Риккати* (опять за исключеніемъ двухъ однозначныхъ) *многозначны и имѣютъ безконечно большое число вѣтвей.* Для этихъ опредѣленій точка $x=0$ есть существенно особенная точка.

§ 3. Связь между однозначными и многозначными опредѣленіями функціи Риккати.

До сихъ поръ мы не ограничивали никакимъ условіемъ пары различныхъ интеграловъ z_1 и z_2 уравненія (2). Выберемъ теперь эти интегралы такъ, чтобы было $\alpha_{21}=0$, такъ что послѣ обхода около особенной точки $x=0$ будемъ имѣть:

$$\overline{z}_1 = \alpha z_2 + \beta z_1$$

$$\overline{z}_2 = \gamma z_2 .$$

Такой выборъ интеграловъ z_1 и z_2 всегда возможенъ [1]). Коэффиціенты β и γ обязательно отличны отъ нуля, потому что имѣемъ.

$$D = \beta\gamma \neq 0.$$

Полагая въ формулѣ (9):

$$\alpha_{11}=\beta,\ \alpha_{12}=\alpha,\ \alpha_{21}=0,\ \alpha_{22}=\gamma,$$

получимъ:

$$C_1 = \frac{\alpha + C_0\gamma}{\beta}; \tag{24}$$

отсюда найдемъ:

$$C_i = \frac{\alpha + C_{i-1}\gamma}{\beta},$$

и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$C_1 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}C_{i-1} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}C_{i-2}\right) = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 C_{i-2} + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) = \cdots\cdots$$

или окончательно:

$$C_i = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i C_0 + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{1-\frac{\gamma}{\beta}}. \tag{25}$$

Имѣемъ, кромѣ того:

$$C_0 = \frac{\alpha + C_{-1}\gamma}{\beta},$$

откуда найдемъ:

$$C_{-1} = \frac{\beta C_0 - \alpha}{\gamma}. \tag{26}$$

---

[1]) См. *В. Анисимовъ* — Основанія теоріи лин. диф. уравненій, стр. 34—36. *Königsberger*—Lehrbuch etc. стр. 423—441.

Замѣтивъ, что формула (26) получается изъ формулы (24) замѣною α, β, γ соотвѣтственно на $-\alpha$, γ, β, находимъ изъ уравненія (25):

$$C_{-i}=\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^i C_0-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{1-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^i}{1-\frac{\beta}{\gamma}}. \tag{27}$$

Основное Фуксово уравненіе для точки $x=0$ имѣетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} \beta-\omega & \alpha \\ 0 & \gamma-\omega \end{vmatrix}=0$$

или:

$$\omega^2-(\beta+\gamma)\,\omega+\beta\gamma=0,$$

откуда:

$$\omega_1=\beta,\ \omega_2=\gamma.$$

Если $\beta\neq\gamma$, то корни ω_1 и ω_2 не равны между собою, интегралы z_1 и z_2 принадлежатъ различнымъ группамъ, и $\alpha=0$, такъ что послѣ обхода около точки $x=0$ будемъ имѣть:

$$\bar{z}_1=\beta z_1$$

$$\bar{z}_2=\gamma z_2.$$

Формулы (25) и (27) въ этомъ случаѣ примутъ видъ:

$$C_i=\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i C_0$$

$$C_{-i}=\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{-i} C_0.$$

Если $|\beta|\neq|\gamma|$, то будемъ имѣть:

$$\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|\neq 1,$$

и тогда $C_i\neq C_0$; всѣ опредѣленія функціи Риккати въ этомъ случаѣ безконечно многозначны (за исключеніемъ двухъ однозначныхъ); при неограниченномъ возрастаніи i одно изъ чиселъ: C_i, C_{-i} стремится къ нулю, а другое—къ безконечности, независимо отъ значенія C_0. Итакъ въ разсматриваемомъ случаѣ при неограниченномъ возрастаніи числа обходовъ перемѣннаго x около точки $x=0$ функція Риккати *ассимптотически* стремится къ одному изъ двухъ предѣльныхъ значеній:

$$Y_1 = \frac{1}{P} \cdot \frac{z_1'}{z_1}$$

$$Y_2 = \frac{1}{P} \cdot \frac{z_2'}{z_2},$$

смотря по тому, совершаются ли обходы въ томъ или другомъ направленіи. Замѣтимъ, что эти предѣльныя значенія Y_1 и Y_2 суть не что иное, какъ два однозначныхъ опредѣленія функціи Риккати въ области точки $x=0$.

Если при условіи $\beta \neq \gamma$ будетъ $|\beta| = |\gamma|$ и слѣдовательно:

$$\left|\frac{\gamma}{\beta}\right| = 1,$$

то никакихъ особыхъ заключеній объ интегралахъ z_1 и z_2 сдѣлать не можемъ.

Пусть теперь будетъ $\beta = \gamma$, такъ что основное Фуксово уравненіе для особенной точки $x=0$ имѣетъ одинъ двукратный корень: $\omega_1 = \omega_2 = \beta$, и интегралы z_1 и z_2 принадлежатъ одной группѣ; при этомъ можетъ быть $\alpha = 0$ или $\alpha \neq 0$. Будемъ тогда имѣть:

$$\overline{z}_1 = \alpha z_2 + \beta z_1$$

$$\overline{z}_1 = \beta z_2;$$

формулы (25) и (27) дадутъ:

$$C_i = i\frac{\alpha}{\beta} + C_0$$

$$C_{-i} = -i\frac{\alpha}{\beta} + C_0.$$

Если случится, что $\alpha = 0$, такъ что z_1 не содержитъ въ своемъ разложеніи lgx [1]), то будемъ имѣть:

$$C_i = C_0 = C_{-i},$$

такъ что въ этомъ случаѣ всѣ опредѣленія функціи Риккати въ области точки $x=0$ однозначны; уравненіе (13) въ этомъ случаѣ удовлетворяется тождественно при всѣхъ значеніяхъ C_0. Если же $\alpha \neq 0$, такъ что разложеніе z_1 содержитъ логариѳмъ, то заключаемъ, что при неограниченномъ возрастаніи i численная величина C_i или

[1]) См. *В. Анисимовъ.*—Основанія теоріи и т. д. стр. 45, 46 и слѣд.

C_{-i} также безпредѣльно возрастаетъ; въ этомъ случаѣ функція Риккати при неограниченномъ числѣ обходовъ около точки $x=0$ въ томъ или другомъ направленіи *ассимптотически* стремится къ одному и тому же значенію, доставляемому формулою (6) при $C_0=\pm\infty$, а именно:

$$Y=\frac{1}{P}\cdot\frac{z_2'}{z_2}.$$

Значеніе это совпадаетъ съ единственнымъ въ этомъ случаѣ однозначнымъ опредѣленіемъ функціи Риккати; въ самомъ дѣлѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ корни C_0 уравненія (13) совпадаютъ и становятся безконечно большими.

§ 4. Условія однозначности функціи Риккати на всей плоскости перемѣннаго x.

Въ области точки $x=0$, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, всѣ опредѣленія функціи Риккати однозначны, если оба интеграла z_1 и z_2 принадлежатъ къ одной группѣ и ни одинъ изъ нихъ не содержитъ lgx. Если это условіе выполняется въ области всѣхъ особенныхъ точекъ, то всѣ опредѣленія функціи Риккати однозначны на всей плоскости независимаго перемѣннаго.

Можетъ однако случиться, что не всѣ, а нѣкоторыя опредѣленія функціи Риккати однозначны на всей плоскости x, остальныя же — многозначны.

Продолжая аналитически интегралы z_1 и z_2 въ область какой-нибудь другой особенной точки $x=\xi$, получимъ соотвѣтственныя ихъ значенія: ζ_1 и ζ_2 съ коэффиціентами обхода около точки $x=\xi$: $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}$, такъ что будемъ имѣть:

$$\overline{\zeta_1}=\beta_{11}\zeta_1+\beta_{12}\zeta_2$$
$$\overline{\zeta_2}=\beta_{21}\zeta_1+\beta_{22}\zeta_2.$$

Если уравненіе (13) имѣетъ корень общій съ уравненіемъ:

$$\beta_{21}C_0^2+(\beta_{11}-\beta_{22})C_0-\beta_{12}=0, \tag{28}$$

то, полагая въ формулѣ (6) C_0 равнымъ этому общему корню, получимъ опредѣленіе функціи Риккати, однозначное въ области точки $x=0$ и точки $x=\xi$. Выражая условіе, что уравненія (13) и (28) имѣютъ общій корень, будемъ имѣть:

$$(\alpha_{12}\beta_{21}-\beta_{12}\alpha_{21})^2=(\alpha_{22}-\alpha_{11})^2\beta_{12}\beta_{21}+(\beta_{22}-\beta_{11})^2\alpha_{12}\alpha_{21}-$$
$$-(\alpha_{22}-\alpha_{11})(\beta_{22}-\beta_{11})(\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{12})$$

или:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

если положить:

$$A_0=(\alpha_{22}-\alpha_{11})\beta_{21}-(\beta_{22}-\beta_{11})\alpha_{21}$$
$$A_1=\alpha_{12}\beta_{21}-\beta_{12}\alpha_{21}$$
$$A_2=(\alpha_{22}-\alpha_{11})\beta_{12}-(\beta_{22}-\beta_{11})\alpha_{12}.$$

Если условіе (29) выполняется для всѣхъ особенныхъ точекъ, то функція Риккати имѣетъ одно опредѣленіе однозначное на всей плоскости перемѣннаго x. При условіи:

$$\frac{\alpha_{21}}{\beta_{21}}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{22}}{\beta_{11}-\beta_{22}}=\frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} \tag{30}$$

уравненія (28) и (13) имѣютъ оба корня общіе, и тогда оба опредѣленія функціи Риккати, однозначныя въ области точки $x=0$, однозначны въ области точки $x=\xi$. Если условія (30) выполняются въ области всѣхъ особенныхъ точекъ, то функція Риккати имѣетъ два опредѣленія, однозначныя на всей плоскости. Эти два опредѣленія совпадаютъ при условіи:

$$(\alpha_{11}-\alpha_{22})^2+4\alpha_{12}\alpha_{21}=0.$$

Понятно, что, если не всѣ опредѣленія функціи Риккати однозначны на всей плоскости x, то число такихъ однозначныхъ опредѣленій не можетъ быть больше двухъ, ибо это обстоятельство имѣетъ мѣсто въ области каждой особенной точки въ отдѣльности.

ЧАСТЬ III.

Приложенія.

ГЛАВА I.

Приложенія теоріи уравненій Риккати частнаго и общаго вида къ анализу.

§ 1. Условія интегрируемости въ конечномъ видѣ или въ квадратурахъ нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Изъ извѣстныхъ условій интегрируемости частнаго уравненія Риккати непосредственно выводятся условія интегрируемости всякаго уравненія, которое приводится къ Риккатіеву какими бы то ни было конечными подстановками. Такъ нпр. если бы намъ удалось какъ-нибудь получить необходимыя и достаточныя условія интегрируемости въ конечномъ видѣ уравненія:

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m, \tag{1}$$

представляющіяся въ видѣ:

$$m=\frac{-4i}{2i\pm 1}, \tag{2}$$

не пользуясь свойствами уравненія:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(A+\frac{B}{x^2}\right)y, \tag{3}$$

разсмотрѣннаго *Ліувилемъ*, то мы заключили бы, что послѣднее уравненіе интегрируется въ конечномъ видѣ при условіи:

(4) $$B = i\,(i+1),$$

гдѣ i — цѣлое положительное число, или нуль.

Линейное же уравненіе:

(5) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha\, x^m\, y,$$

получающееся изъ уравненія (1) подстановкою:

$$y = \frac{1}{a} \cdot \frac{dlgz}{dx}$$

и замѣною z на y и ab на α, интегрируется въ конечномъ видѣ при выполненіи условія (2).

Принимая:

$$x^{\frac{1}{2}m+1} = \left(\frac{1}{2}\,m+1\right)t,$$

приведемъ уравненіе (5) къ виду:

(6) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0,$$

гдѣ t замѣнено черезъ x, и обозначено:

(7) $$r = \frac{m}{m+2};$$

на основаніи формулы (7) заключаемъ, что для интегрируемости уравненія (6) въ конечномъ видѣ необходимо и достаточно условіе:

(8) $$r = \pm 2i.$$

Мальмстенъ [1]) обобщаетъ уравненія (5) и (6), сводя ихъ къ общему типу:

(9) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \alpha\, x^m y = 0,$$

который, въ свою очередь, легко приводится къ уравненію Риккати частнаго вида. Для этого примѣняемъ преобразованіе:

---

[1]) *Malmstèn.*—De l'équation differentielle: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + Ax^m y = 0$. Crel. J. XXXIX 1850 p. 108—115 (въ подлинникѣ въ заглавіи вмѣсто $\frac{r}{x}$ по ошибкѣ напечатано $\frac{1}{x}$).

$$y = e^{\int u\,dx},$$

послѣ чего уравненіе (9) приметъ видъ:

$$\frac{du}{dx} + u^2 + \frac{r}{x} u + \alpha x^m = 0;$$

полагая затѣмъ:

$$x = t^\beta,\ u = k t^\gamma z,$$

и выбирая:

$$k = \frac{1}{\beta},\ \gamma = 1 - \beta,$$

получимъ:

$$\frac{dz}{dt} + z^2 + (1 - \beta + \beta r)\frac{z}{t} + \alpha\beta^2 t^{(m+2)\beta - 2} = 0,$$

или, принимая: $\beta = \dfrac{1}{1-r}$:

$$\frac{dz}{dt} + z^2 + \frac{\alpha}{(1-r)^2} t^{\frac{m+2r}{1-r}} = 0,$$

что и представляетъ уравненіе вида (1); отсюда заключаемъ, что для интегрируемости уравненія (9) въ конечномъ видѣ необходимо и достаточно условіе:

$$\frac{m+2r}{1-r} = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

или:

$$m = \frac{-4\left(i \pm \frac{r}{2}\right)}{2i \pm 1}. \tag{10}$$

Въ частномъ случаѣ при $r = 0$, имѣемъ: $m = \dfrac{-4i}{2i \pm 1}$, что представляетъ условіе (2) интегрируемости уравненія (5); при $m = 0$, находимъ: $r = \pm 2i$, что представляетъ условіе (8) интегрируемости уравненія (6).

Подобнымъ же образомъ Мальмстенъ получаетъ условія интегрируемости еще болѣе общаго уравненія, нежели (9), а именно уравненія вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\alpha x^m + \frac{s}{x^2}\right) y. \tag{11}$$

Полагая:

$$x = z^q,\ y = z^{pq} u,$$

приведемъ это уравненіе къ виду:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2pq + qr - q + 1}{z} \cdot \frac{du}{dz} = q^2\left[\alpha z^{q(m+2)-2} - \frac{p(p+r-1) - s}{z^2}\right] u;$$

выберемъ затѣмъ q равнымъ:

$$q = \frac{2}{m+2},$$

а p опредѣлимъ изъ условія:

$$2pq + qr - q + 1 = 0,$$

откуда найдемъ:

$$p = -\frac{m+2r}{4};$$

тогда получимъ:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{4}{(m+2)^2}\left[a - \frac{(m+4-2r)(m+2r)-16s}{16z^2}\right]u.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (3), заключаемъ на основаніи уравненія (4), что для интегрируемости уравненія (11) въ конечномъ видѣ достаточно и необходимо, чтобы числа m, r, s были связаны условіемъ:

$$(m+4-2r)(m+2r)-16s = -4i(i+1)(m+2)^2,$$

гдѣ i — произвольное цѣлое положительное число или нуль; отсюда простымъ вычисленіемъ найдемъ:

$$m = -2 \pm \frac{2\sqrt{(1-r)^2+4s}}{2i+1}.$$

Что касается уравненія Риккати общаго вида, то оно стоитъ въ связи съ линейными уравненіями второго порядка, какъ было показано въ главѣ III ч. I.

Къ уравненію Риккати общаго вида сводится, какъ показалъ *Besgue* [1]), уравненіе вида:

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} + \varphi(x).\sin y + \psi(x).\cos y + \chi(x) = 0.$$

Дѣйствительно, достаточно положить:

$$tg\frac{y}{2} = z,$$

тогда будемъ имѣть:

---

[1]) *Besgue* loc. cit.

$$y = 2\, arc\,tg z,$$

$$dy = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$sin\, y = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$cos\, y = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

и слѣдовательно уравненіе (12) представится въ видѣ:

$$2\frac{dz}{dx} + 2z\varphi(x) + (1-z^2)\psi(x) + (1+z^2)\chi(x) = 0$$

или:

$$\frac{dz}{dx} + F_0(x).z^2 + F_1(x).z + F_2(x) = 0,$$

гдѣ обозначено:

$$F_1(x) = \frac{\chi(x)-\psi(x)}{2}$$

$$F_1(x) = \varphi(x)$$

$$F_2(x) = \frac{\chi(x)+\psi(x)}{2}.$$

§ 2. Интегрированіе системы двухъ уравненій съ частными производными типа Риккати.

Совмѣстное интегрированіе системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} + p_1 w^2 + q_1 w + r_1 = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial v} + p_2 w^2 + q_2 w + r_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

гдѣ $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$—данныя функціи двухъ перемѣнныхъ u и v, а w—искомая функція тѣхъ же перемѣнныхъ, приводится, какъ показалъ *Darboux*[1]), къ интегрированію одного обыкновеннаго Риккатіева уравненія общаго вида, если только уравненія (13) имѣютъ общее рѣшеніе.

---

[1]) *Darboux.* — Leçons sur la théorie genérale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris. T. I 1887 стр. 56 и слѣд.

Продифференцируемъ первое изъ уравненій (13) по v, а второе—по u и сравнимъ полученныя выраженія для $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}$; замѣняя потомъ частныя производныя $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$ ихъ выраженіями изъ тѣхъ же уравненій (13), получимъ:

$$\left[\frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial p_2}{\partial u} - (p_1 q_2 - p_2 q_1)\right] w^2 + \left[\frac{\partial q_1}{\partial v} - \frac{\partial q_2}{\partial u} - 2(p_1 r_2 - p_2 r_1)\right] w +$$

$$+ \left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial r_2}{\partial u} - (q_1 r_2 - q_2 r_1)\right] = 0.$$

Если это уравненіе не удовлетворяется тождественно, то изъ него получимъ два частныхъ рѣшенія уравненій (13): w_1 и w_2 (которыя при условіи:

$$\left[\frac{\partial q_1}{\partial v} - \frac{\partial q_2}{\partial u} - 2(p_1 r_2 - p_2 r_1)\right]^2 =$$

$$= 4\left[\frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial p_2}{\partial u} - (p_1 q_2 - p_2 q_1)\right]\left[\frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial r_2}{\partial u} - (q_1 r_2 - q_2 r_1)\right]$$

оказываются равными), общихъ же рѣшеній мы въ этомъ случаѣ не получимъ; для существованія общихъ рѣшеній уравненій (13) необходимо, чтобы предыдущая зависимость удовлетворялась тождественно, т. е. чтобы имѣли мѣсто слѣдующія зависимости между функціями: $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial v} - \dfrac{\partial p_2}{\partial u} = p_1 q_2 - p_2 q_1 \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial v} - \dfrac{\partial q_2}{\partial u} = 2p_1 r_2 - 2p_2 r_1 \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial v} - \dfrac{\partial r_2}{\partial u} = q_1 r_2 - q_2 r_1 \end{cases}$$

Докажемъ, что эти необходимыя условія вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны для существованія общихъ рѣшеній уравненій (13), и одновременно покажемъ, какъ при выполненіи условій (14) найти общее рѣшеніе системы (13). Для этого обозначимъ черезъ W какое-нибудь рѣшеніе 1-го уравненія (13), такъ что W есть функція отъ u и v, удовлетворяющая уравненію:

$$\frac{\partial W}{\partial u}+p_1 W^2+q_1 W+r_1=0,$$

но вообще не удовлетворяющая второму изъ уравненій (13). Обозначимъ результатъ подстановки функціи W въ лѣвую часть второго уравненія (13) черезъ J, такъ что будемъ имѣть:

$$\frac{\partial W}{\partial v}+p_2 W^2+q_2 W+r_2=J.$$

Продифференцируемъ послѣднее уравненіе по u, предпослѣднее—по v и вычтемъ почленно одно изъ другого. Если въ результатѣ замѣнимъ частныя производныя $\frac{\partial W}{\partial u}$ и $\frac{\partial W}{\partial v}$ ихъ выраженіями изъ послѣднихъ двухъ уравненій и примемъ во вниманіе зависимости (14), то получимъ:

$$\frac{\partial J}{\partial u}=-(2p_1 W+q_1) J,$$

откуда:

$$J=J_0 e^{-\int\limits_{u_0}^{u}(2p_1 W+q_1)\,du},$$

гдѣ u_0 есть нѣкоторое произвольное постоянное значеніе перемѣннаго u, а J_0 есть значеніе J при $u=u_0$, такъ что J_0 есть функція одного перемѣннаго v. Изъ послѣдняго уравненія видимъ между прочимъ, что если J при одномъ значеніи $u=u_0$ есть нуль, то оно равно нулю при всякомъ значеніи u, т. е. если интегралъ W перваго уравненія (13) удовлетворяетъ второму уравненію (13) при одномъ частномъ значеніи $u=u_0$, то и общее выраженіе W будетъ интеграломъ этого уравненія. Положимъ теперь во второмъ уравненіи (13) $u=u_0$, такъ что оно сдѣлается обыкновеннымъ уравненіемъ Риккати (съ независимымъ перемѣннымъ v); его общій интегралъ w_1 (функція одного v) при нѣкоторомъ значеніи $v=v_0$ получаетъ произвольное напередъ заданное значеніе w_0. Затѣмъ будемъ временно считать въ первомъ уравненіи (13) v простымъ параметромъ и разсматривать это уравненіе, какъ обыкновенное Риккатіево уравненіе съ независимымъ перемѣннымъ u; его общій интегралъ w (функцію u и v) выберемъ такъ, чтобы при $u=u_0$ было $w=w_1$; если интегралъ w будетъ такимъ образомъ опредѣленъ, то на основаніи сдѣланнаго раньше замѣчанія заключимъ, что онъ будетъ удовлетворять второму уравненію (13) при всякомъ u, т. е. w будетъ общимъ рѣшеніемъ уравненій (13); если въ интегралѣ w положимъ $u=u_0$ и $v=v_0$, то w получитъ произвольное напередъ заданное значеніе w_0, такъ что w непремѣнно содержитъ одно произвольное постоянное. Такимъ образомъ мы сумѣемъ по указанному методу обынтегрировать совмѣстно систему уравненій (13), если намъ удастся обынтегрировать каждое изъ нихъ отдѣльно, какъ обыкновенное Риккатіево уравненіе общаго вида.

Зная одно частное рѣшеніе совмѣстныхъ уравненій (13), мы тотчасъ же найдемъ ихъ общее рѣшеніе безъ квадратуръ. Дѣйствительно, пусть φ будетъ какое-нибудь рѣшеніе уравненій (13); полагаемъ тогда:

$$w=\varphi+\frac{1}{\psi} \tag{15}$$

и дифференцируемъ w по u и по v. Замѣтивъ, что имѣемъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+p_1\varphi^2+q_1\varphi+r_1=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}+p_2\varphi^2+q_2\varphi+r_2=0,$$

получимъ:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u}&=s_1\psi+p_1\\ \frac{\partial\psi}{\partial v}&=s_2\psi+p_2\end{aligned}\right. \tag{16}$$

гдѣ обозначено:

$$s_1=2p_1\varphi+q_1,\quad s_2=2p_2\varphi+q_2.$$

Интегрируя систему линейныхъ уравненій съ частными производными (16), найдемъ:

$$\psi=e^{\int(s_1\,du+s_2\,dv)}\int e^{-\int(s_1\,du+s_2\,dv)}(p_1du+p_2dv),$$

Легко убѣдиться, что подъ знаками неопредѣленныхъ интеграловъ находятся полные дифференціалы, такъ что при вычисленіи функція ψ получается безъ квадратуръ, и, слѣдовательно, безъ квадратуръ найдемъ по формулѣ (15) общее рѣшеніе системы (13).

Если будемъ знать частное рѣшеніе одного только изъ уравненiй (13) (не удовлетворяющее другому), то безъ квадратуръ найдемъ общее рѣшенiе этого уравненiя. Въ самомъ дѣлѣ пусть φ будетъ частное рѣшенiе перваго уравненiя (13), такъ что имѣемъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+p_1\varphi^2+q_1\varphi+r_1=0;$$

полагаемъ тогда опять:

$$w=\varphi+\frac{1}{\psi}; \tag{15}$$

обозначая:

$$J=\frac{\partial\varphi}{\partial v}+p_2\varphi^2+q_2\varphi+r_2,$$

получимъ, какъ раньше:

$$\frac{\partial J}{\partial u}=-(2p_1\varphi+q_1)J,$$

откуда:

$$2p_1\varphi+q_1=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial J}{\partial u}. \tag{17}$$

Вставляя же выраженiе w по формулѣ (15) въ первое уравненiе (13), получимъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=(2p_1\varphi+q_1)\psi+p_1,$$

или на основанiи уравненiя (17):

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\psi}{J}\cdot\frac{\partial J}{\partial u}=p_1,$$

т. е.

$$\frac{\partial(\psi J)}{\partial u}=p_1 J. \tag{18}$$

Преобразуемъ выраженiе $p_1 J$ слѣдующимъ образомъ; имѣемъ:

$$p_1 J=p_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+p_1p_2\varphi^2+p_1q_2\varphi+p_1r_2,$$

но:

$$p_1\varphi^2=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+q_1\varphi+r_1\right),$$

слѣдовательно имѣемъ:

$$p_1J=p_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}-p_2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(p_1q_2-p_2q_1)\varphi+p_1r_2-p_2r_1,$$

или на основанiи формулъ (14):

$$p_1 J = p_1 \frac{\partial\varphi}{\partial v} - p_2 \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \left(\frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial p_2}{\partial u}\right)\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial v} - \frac{\partial q_2}{\partial u}\right) =$$

$$= p_1 \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial p_1}{\partial v}\varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial v} - \left(p_2 \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial p_2}{\partial u}\varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}(p_1\varphi + \tfrac{1}{2}q_1) - \frac{\partial}{\partial u}(p_2\varphi + \tfrac{1}{2}q_2);$$

изъ формулы же (17) находимъ:

$$p_1\varphi + \tfrac{1}{2}q_1 = -\frac{1}{2J}\cdot\frac{\partial J}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial lg J}{\partial u},$$

и слѣдовательно:

$$p_1 J = -\frac{\partial}{\partial u}\left[\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial lg J}{\partial v} + p_2\varphi + \tfrac{1}{2}q_2\right].$$

Вставляя это выраженіе $p_1 J$ въ уравненіе (18), найдемъ:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\psi J + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial lg J}{\partial v} + p_2\varphi + \tfrac{1}{2}q_2\right] = 0,$$

откуда будемъ имѣть:

$$\psi J + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial lg J}{\partial v} + p_2\varphi + \tfrac{1}{2}q_2 = \omega,$$

гдѣ ω — произвольная функція v, не зависящая отъ u. Отсюда на основаніи формулы (15) получимъ:

$$w = \varphi - \frac{J}{\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial lg J}{\partial v} + p_2\varphi + \tfrac{1}{2}q_2 - \omega},$$

что и представляетъ искомый общій интегралъ перваго уравненія (13), не содержащій квадратуры.

Если для каждаго изъ уравненій (13) будемъ знать по одному частному рѣшенію, то по изложенному методу найдемъ общее рѣшеніе каждаго уравненія отдѣльно, а затѣмъ, по указанному въ началѣ этого параграфа методу, легко получимъ общее рѣшеніе совмѣстныхъ уравненій (13).

Итакъ для полнаго обынтегрированія системы уравненій (13) достаточно знать либо одно частное рѣшеніе совмѣстныхъ уравненій (13), либо по одному частному рѣшенію каждаго изъ нихъ отдѣльно (разсматриваемаго, какъ обыкновенное уравненіе, содержащее перемѣнный параметръ).

Покажемъ теперь, что интегрированіе системы (13) можетъ быть приведено формально къ интегрированію одного обыкновеннаго уравненія Риккати общаго вида.

Потребуемъ, чтобы при $u = u_0$ и $v = v_0$ искомый общій интегралъ w обращался въ w_0; положимъ затѣмъ:

$$u = u_0 + m_1 t, \quad v = v_0 + m_2 t,$$

гдѣ m_1 и m_2 нѣкоторыя постоянныя; w, какъ функція u и v, будетъ сложною функціею одного перемѣннаго t, и будемъ имѣть:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = m_1 \frac{\partial w}{\partial u} + m_2 \frac{\partial w}{\partial v};$$

вставляя сюда выраженія $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$ изъ уравненій (13), получимъ:

$$\frac{dw}{dt} + (m_1 p_1 + m_2 p_2)\, w^2 + (m_1 q_1 + m_2 q_2)\, w + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0;$$

это и есть обыкновенное общее уравненіе Риккати; коэффиціенты его суть функціи перемѣннаго t. Если удастся найти его общій интегралъ въ видѣ:

$$w = f\,(t, u_0, v_0, m_1, m_2, w_0),$$

то, полагая въ немъ $t = 1$ и замѣняя m_1 и m_2 соотвѣтственно черезъ $u - u_0$ и $v - v_0$, получимъ общее рѣшеніе совмѣстной системы уравненій (13).

§ 3. Интегрированіе системы двухъ совмѣстныхъ обыкновенныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка по методу Даламбера.

Пусть даны уравненія:

$$\frac{dx}{dt} + X_1 x + X_2 y = X$$

$$\frac{dy}{dt} + Y_1 x + Y_2 y = Y,$$

въ которыхъ X_1, X_2, X, Y_1, Y_2, Y — функціи перемѣннаго t, или нѣкоторыя постоянныя. Умножимъ всѣ члены второго изъ нихъ на неопредѣленную функцію t:

$$z = \varphi\,(t)$$

и сложимъ почленно съ первымъ; получимъ:

$$\frac{dx}{dt}+z\frac{dy}{dt}+(X_1+zY_1)x+(X_2+zY_2)y=X+zY.$$

Положимъ затѣмъ:

$$x+zy=\xi,$$

такъ что будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{dt}+z\frac{dy}{dt}=\frac{d\xi}{dt}-y\frac{dz}{dt},$$

тогда получимъ:

$$\frac{d\xi}{dt}-y\frac{dz}{dt}+(X_1+zY_1)(\xi-zy)+(X_2+zY_2)y=X+zY,$$

или:

$$\frac{d\xi}{dt}-\left[\frac{dz}{dt}+Y_1z^2+(X_1-Y_2)z-X_2\right]y+(X_1+zY_1)\xi=X+zY.$$

Неопредѣленную функцію z опредѣлимъ изъ дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{dz}{dt}+Y_1z^2+(X_1-Y_2)z-X_2=0,$$

тогда для опредѣленія ξ будемъ имѣть уравненіе:

$$\frac{d\xi}{dt}+(X_1+zY_1)\xi=X+zY.$$

Это уравненіе—линейное перваго порядка и интегрируется непосредственно, но для опредѣленія z приходится интегрировать уравненіе Риккати общаго вида. Если два его частныхъ интеграла будутъ z_1 и z_2, то соотвѣтственно имъ найдемъ частные интегралы ξ_1 и ξ_2 послѣдняго уравненія, и тогда изъ уравненій:

$$x+z_1y=\xi_1,$$

$$x+z_2y=\xi_2,$$

найдемъ x и y въ функціи t.

Замѣтимъ, что, такъ какъ линейное однородное диффер. уравненіе 2-го порядка можетъ быть замѣнено эквивалентною системою двухъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій 1-го порядка, то къ интегрированію уравненія Риккати можетъ быть сведена задача интегрированія однороднаго (а слѣд. и неоднороднаго) линейнаго диффер. уравненія 2-го порядка.

§ 4. Интегрированіе системы трехъ совмѣстныхъ обыкновенныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, имѣющей частный интегралъ въ видѣ цѣлой однородной функціи второй степени [1]).

Пусть предложена система уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax+By+Cz \\ \frac{dy}{dt} &= A'x+B'y+C'z \\ \frac{dz}{dt} &= A''x+B''y+C''z \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

гдѣ A, B, ... C'' — постоянныя или функціи перемѣннаго t, и положимъ, что извѣстенъ намъ частный интегралъ системы (19) вида:

$$\varphi(x,y,z) = constans, \qquad (20)$$

гдѣ φ — однородная цѣлая функція второй степени отъ x, y и z; ограничимъ произволъ функціи φ условіемъ, что она не есть ни полный квадратъ, ни сумма двухъ квадратовъ. Прежде всего покажемъ, какимъ образомъ система (19) и интегралъ (20) могутъ быть приведены къ простѣйшему виду. Посредствомъ простого линейнаго преобразованія можемъ привести уравненіе (20) къ виду:

$$x^2+y^2+z^2 = const., \qquad (21)$$

выбравъ надлежащимъ образомъ коэффиціенты преобразованія; видъ уравненій (19) при такомъ преобразованіи упростится, а именно: если мы выразимъ аналитически, что выраженіе (21) есть интегралъ уравненій (19), то получимъ тождества:

$$A = B' = C'' = B''+C' = C+A'' = A'+B = 0,$$

такъ что послѣ преобразованія уравненія (19) будутъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= bz-cy \\ \frac{dy}{dt} &= cx-az \\ \frac{dz}{dt} &= ay-bx \end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

---

[1]) См. *Darboux*. Leçons etc. I, стр. 3 и слѣд.

Всякая система рѣшеній этихъ уравненій связана зависимостью вида (21), въ чемъ легко убѣдиться, умножая обѣ части 1-го уравненія на $2x$, второго—на $2y$, третьяго—на $2z$ и складывая почленно; получимъ:

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)=0,$$

откуда интегрированіемъ найдемъ формулу (21). Если x_1, y_1, z_1 будетъ другая система рѣшеній, то кромѣ интеграла (21) и интеграла:

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=const.,$$

будемъ еще имѣть интегралъ:

$$xx_1+yy_1+zz_1=const.,$$

въ чемъ легко убѣдиться слѣдующимъ образомъ: составимъ систему уравненій:

$$(22\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=bz_1-cy_1\\ \frac{dy_1}{dt}&=cx_1-az_1\\ \frac{dz_1}{dt}&=ay_1-bx_1 \end{aligned}\right.$$

умножимъ 6 уравненій: (22) и (22 bis) соотвѣтственно на x_1, y_1, z_1, x, y, z и сложимъ ихъ почленно; тогда получимъ:

$$\frac{d}{dt}(xx_1+yy_1+zz_1)=0,$$

или, послѣ интегрированія:

$$(23)\qquad xx_1+yy_1+zz_1=const.$$

Интегралъ (21) всегда намъ заранѣе извѣстенъ. Если будемъ знать какое-нибудь частное рѣшеніе системы (22): x_0, y_0, z_0, то легко получимъ еще одинъ интегралъ этой системы; дѣйствительно, замѣтивъ тогда, что частными рѣшеніями системы (22) будутъ также функціи:

$$x+kx_0,\ y+ky_0,\ z+kz_0,$$

гдѣ k—произвольное постоянное, находимъ:

$$(x+kx_0)^2+(y+ky_0)^2+(z+kz_0)^2=const.,$$

или:

$$(x^2+y^2+z^2)+2k(xx_0+yy_0+zz_0)+k^2(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)=const.$$

и слѣдовательно:

$$xx_0+yy_0+zz_0=const.,$$

что и представляетъ другой интегралъ, линейный относительно x, y, z.

Отсюда заключаемъ, что, зная двѣ системы частныхъ рѣшеній: x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1 уравненій (22), можно получить систему общихъ рѣшеній этихъ уравненій, а именно: изъ уравненій, представляющихъ въ этомъ случаѣ интегралы уравненій (22):

$$x^2+y^2+z^2=const.$$

$$xx_0+yy_0+zz_0=const.$$

$$xx_1+yy_1+zz_1=const.$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} x&=c_0x_0+c_1x_1+c_2(y_0z_1-y_1z_0)\\ y&=c_0y_0+c_1y_1+c_2(z_0x_1-z_1x_0)\\ z&=c_0z_0+c_1z_1+c_2(x_0y_1-x_1y_0)\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

гдѣ c_0, c_1, c_2 — произвольныя постоянныя.

Покажемъ теперь, какимъ образомъ, зная одну систему частныхъ рѣшеній уравненій (22), найти общее рѣшеніе этой системы посредствомъ одной квадратуры, приведя вопросъ къ интегрированію общаго уравненія Риккати.

Для нашей цѣли преобразовываемъ перемѣнныя x, y, z такимъ образомъ, чтобы интегралъ (21) принялъ видъ:

$$x^2+y^2+z^2=1; \qquad (25)$$

такъ какъ на основаніи этого интеграла только два изъ перемѣнныхъ: x, y, z независимы, то мы вмѣсто нихъ выберемъ другія два независимыхъ перемѣнныхъ такъ, чтобы при этомъ выборѣ зависимость (25) удовлетворялась тождественно. Если считать x, y, z координатами нѣкоторой точки пространства, отнесенными къ прямоугольной Декартовой системѣ осей координатъ, то уравненіе (25) геометрически представитъ сферу радіуса 1 съ центромъ въ началѣ координатъ. Представивъ уравненіе сферы (25) въ видѣ:

$$\frac{(x+iy)(x-iy)}{(1-z)(1+z)}=1,$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, заключимъ, что можемъ разсматривать сферу, какъ линейчатую поверхность съ двумя системами мнимыхъ прямолинейныхъ образующихъ; образующія первой системы представляются уравненіями:

$$\frac{x+iy}{1-z}=\lambda,\ \frac{x-iy}{1+z}=\frac{1}{\lambda},$$

а образующія второй системы представляются уравненіями:

$$\frac{x+iy}{1+z}=\mu,\ \frac{x-iy}{1-z}=\frac{1}{\mu},$$

гдѣ λ и μ—произвольныя постоянныя. За независимыя перемѣнныя мы примемъ:

$$\xi=\lambda,\ \eta=-\mu,$$

тогда x, y, z черезъ ξ и η выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x=\frac{1-\xi\eta}{\xi-\eta},\ y=i\cdot\frac{1+\xi\eta}{\xi-\eta},\ z=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \tag{26}$$

и легко провѣрить, что дѣйствительно зависимость (25) тождественно удовлетворяется. Вставляя выраженія (26) въ дифференціальныя уравненія (22), представимъ ихъ въ видѣ двухъ слѣдующихъ:

$$\frac{d\xi}{dt}-\frac{b+ia}{2}\xi^2+ic\xi-\frac{b-ia}{2}=0$$

$$\frac{d\eta}{dt}-\frac{b+ia}{2}\eta^2+ic\eta-\frac{b-ia}{2}=0,$$

такъ что ξ и η суть рѣшенія уравненія Риккати:

$$\frac{du}{dt}-\frac{b+ia}{2}u^2+icu-\frac{b-ia}{2}=0. \tag{27}$$

Такимъ образомъ, если будемъ знать частный интегралъ системы (22),

$$x^2+y^2+z^2=constans\neq 0,$$

то, приведя его къ виду (25), мы по формуламъ:

$$\xi=\frac{x-iy}{1-z},\ \eta=-\frac{x+iy}{1-z}$$

вычислимъ два частныхъ интеграла ξ и η уравненія (27) и затѣмъ посредствомъ одной квадратуры найдемъ его общій интегралъ:

Если данный частный интегралъ системы (22) будетъ вида:

$$x^2+y^2+z^2=0, \tag{28}$$

то всѣ 3 числа: x, y, z не могутъ быть дѣйствительными; пусть тогда будетъ:

$$x=x_1+ix_2,\ y=y_1+iy_2,\ z=z_1+iz_2.$$

Если притомъ a, b, c суть дѣйствительныя функціи отъ t, то, очевидно, въ отдѣльности x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 суть двѣ системы дѣйствительныхъ рѣшеній уравненій (22), и тогда по формуламъ (24) непосредственно, безъ интегрированія, находимъ общее рѣшеніе уравненій (22). Если же функціи a, b, c мнимы, то можемъ представить уравненіе (28) въ видѣ:

$$\frac{(x+iy)(x-iy)}{z^2}=-1,$$

и положить:

$$\xi=\frac{z}{x-iy}=-\frac{x+iy}{z},$$

такъ что будемъ имѣть:

$$z=x\xi-iy\xi$$

$$-z\xi=x+iy;$$

исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій z, получимъ:

$$\frac{ix}{y}=\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2},$$

такъ что, введя коэффиціентъ пропорціональности α, будемъ имѣть:

$$x=\alpha(1-\xi^2),\ y=i\alpha(1+\xi^2),\ z=2\alpha\xi,$$

и система (22) приметъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\xi}{dt}-\frac{b+ia}{2}\xi^2+ic\xi-\frac{b-ia}{2}=0\\&\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}=ic-(b+ia)\xi\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

такъ что въ этомъ случаѣ ξ есть нѣкоторый интегралъ того же Риккатіева уравненія (27). Полагая:

$$u=\xi+\frac{1}{v}, \tag{30}$$

получимъ изъ уравненія (27):

$$\frac{dv}{dt}+\frac{b+ia}{2}=[ic-(b+ia)\,\xi]\,v,$$

или, на основаніи второго уравненія (29):

$$\frac{dv}{dt}+\frac{b+ia}{2}=\frac{v}{\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\alpha}\right)+\frac{b+ia}{2\alpha}=0.$$

Изъ послѣдняго уравненія посредствомъ одной квадратуры найдемъ v, а затѣмъ по уравненію (30) получимъ общій интегралъ u уравненія (27). Итакъ, во всѣхъ случаяхъ, если извѣстна одна система рѣшеній уравненій (19) или (22), то можемъ обынтегрировать эти уравненія посредствомъ одной квадратуры (въ одномъ случаѣ, какъ мы видѣли, даже безъ квадратуръ).

§ 5. Интегрированіе двухъ совмѣстныхъ системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ 3-мя неизвѣстными функціями двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, при существованіи частнаго интеграла въ видѣ цѣлой однородной функціи 2-ой степени [1]).

Пусть даны двѣ системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=Ax+By+Cz\\ \frac{\partial y}{\partial u}&=A'x+B'y+C'z\\ \frac{\partial z}{\partial u}&=A''x+B''y+C''z\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v}&=A_1x+B_1y+C_1z\\ \frac{\partial y}{\partial v}&=A_1'x+B_1'y+C_1'z\\ \frac{\partial z}{\partial v}&=A_1''x+B_1''y+C_1''z\end{aligned}\right\}$$

---

[1]) *Darboux.*—Leçons etc. I, стр. 47 и слѣд.

имѣющія интегралъ вида:

$$\varphi(x, y, z) = const.,$$

гдѣ φ есть однородная функція второй степени (не квадратъ линейной функціи и не сумма двухъ квадратовъ); x, y, z — искомыя функціи перемѣнныхъ u и v, а коэффиціенты $A, B, \ldots C_1''$ — постоянныя числа или функціи u и v. При сдѣланномъ ограниченіи функціи φ можно такъ же, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, посредствомъ линейнаго преобразованія привести данныя системы уравненій къ виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= bz - cy \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= cx - az \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= ay - bx \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= b_1 z - c_1 y \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= c_1 x - a_1 z \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= a_1 y - b_1 x \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

гдѣ опять коэффиціенты a, b, c, a_1, b_1, c_1, суть постоянныя, или функціи u, v; интегралъ $\varphi = const.$ послѣ этого преобразованія приметъ видъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = const. \tag{33}$$

Прежде всего посмотримъ, каковы должны быть зависимости между коэффиціентами уравненій (31) и (32) для того, чтобы эти системы имѣли совмѣстныя общія рѣшенія. Продифференцируемъ первое уравненіе (31) по v, первое — (32) по u и замѣнимъ послѣ дифференцированія первыя частныя производныя z и y ихъ выраженіями изъ другихъ уравненій (31) и (32); сравнивая тогда выраженія $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ и $\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$, получимъ:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c_1}{\partial u} - a_1 b + a b_1\right) y = \left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b_1}{\partial u} - c_1 a + c a_1\right) z;$$

такъ какъ эта зависимость должна быть тождественною, то заключаемъ, что въ отдѣльности коэффиціенты при y и z должны быть тождественными нулями. Сравнивая подобнымъ же образомъ производныя $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$, получимъ одно новое условіе, изъ сравненія же $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ новаго условія не получимъ. Такимъ образомъ для существованія функцій x, y, z перемѣнныхъ u и v, которыя удовлетворяли бы совмѣстнымъ уравненіямъ (31) и (32), необходимы слѣдующія условія:

$$(34)\qquad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial a_1}{\partial u} = cb_1 - c_1 b \\ \frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b_1}{\partial u} = ac_1 - a_1 c \\ \frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c_1}{\partial u} = ba_1 - b_1 a \end{cases}$$

Докажемъ, что эти условія и достаточны для существованія общихъ рѣшеній совмѣстныхъ уравненій (31) и (32). Пусть, въ самомъ дѣлѣ, будетъ x_1, y_1, z_1 нѣкоторая система частныхъ рѣшеній уравненій (31), не удовлетворяющая системѣ (32). Результаты подстановки x_1, y_1, z_1 въ уравненія системы (32) пусть будутъ соотвѣтственно: J, K, L, такъ что будемъ имѣть:

$$(35)\qquad \begin{cases} J = \frac{\partial x_1}{\partial v} - b_1 z_1 + c_1 y_1 \\ K = \frac{\partial y_1}{\partial v} - c_1 x_1 + a_1 z_1 \\ L = \frac{\partial z_1}{\partial v} - a_1 y_1 + b_1 x_1 \end{cases}.$$

Функціи J, K, L вообще отъ нуля отличны. Легко видѣть, что онѣ представляютъ также систему рѣшеній уравненій (31). Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial v \partial u} - b_1 \frac{\partial z_1}{\partial u} - z_1 \frac{\partial b_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial y_1}{\partial u} + y_1 \frac{\partial c_1}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}(bz_1 - cy_1) - b_1(ay_1 - bx_1) - z_1 \frac{\partial b_1}{\partial u} + c_1(cx_1 - az_1) + y_1 \frac{\partial c_1}{\partial u} =$$

$$= b\left(\frac{\partial z_1}{\partial v} - a_1 y_1 + b_1 x_1\right) - c\left(\frac{\partial y_1}{\partial v} - c_1 x_1 + a_1 z_1\right) + z_1\left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b_1}{\partial u} - ac_1 + a_1 c\right) -$$

$$-y_1\left(\frac{\partial c}{\partial v}-\frac{\partial c_1}{\partial u}-ba_1+b_1a\right),$$

или, на основаніи формулъ (34) и (35):

$$\frac{\partial J}{\partial u}=bL-cK;$$

по аналогіи будемъ имѣть:

$$\frac{\partial K}{\partial u}=cJ-aL,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u}=aK-bJ,$$

откуда видимъ, что дѣйствительно J, K, L удовлетворяютъ уравненіямъ (31). Изъ формы послѣднихъ трехъ уравненій заключаемъ, что, если задать начальныя значенія J_0, K_0, L_0 функцій J, K, L, соотвѣтствующія какому-нибудь значенію $u=u_0$, то система этихъ интегральныхъ функцій будетъ вполнѣ опредѣлена. Если эти начальныя значенія принять равными нулю, то, какъ не трудно видѣть, значенія функцій J, K, L будутъ равны нулю при всякомъ значеніи u; другими словами, если какая-нибудь система рѣшеній системы уравненій (31) удовлетворитъ системѣ (32) при одномъ какомъ-либо значеніи $u=u_0$, то она ей удовлетворитъ и при всякомъ другомъ значеніи u. Зная это, легко обнаружить, что системы (31) и (32) имѣютъ безчисленное множество общихъ системъ рѣшеній, и вмѣстѣ съ тѣмъ показать, какъ эти рѣшенія найти.

Давъ въ уравненіяхъ (32) перемѣнному u какое-нибудь частное значеніе u_0, мы всегда сумѣемъ опредѣлить, и притомъ единственнымъ образомъ, систему функцій X, Y, Z одного перемѣннаго v, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (32) (при $u=u_0$) и которыя при $v=v_0$ принимаютъ напередъ заданныя значенія x_0, y_0, z_0. Имѣя функціи X, Y, Z и считая временно въ уравненіяхъ (31) v произвольнымъ параметромъ, найдемъ—также единственнымъ, вполнѣ опредѣленнымъ образомъ — функціи x, y, z двухъ перемѣнныхъ u и v, удовлетворяющія системѣ (31) и при $u=u_0$ обращающіяся въ X, Y, Z. Такимъ образомъ найденныя функціи x, y, z при $u=u_0$ будутъ удовлетворять и системѣ (32), слѣдовательно онѣ будутъ удовлетворять послѣдней системѣ при всѣхъ значеніяхъ u. Кромѣ того, легко видѣть, что при $u=u_0$ и $v=v_0$ функціи x, y, z, опредѣленныя, какъ сказано, принимаютъ напередъ заданныя значенія x_0, y_0, z_0, такъ что x, y, z и будутъ общими рѣшеніями совмѣстныхъ уравненій (31) и (32).

Доказавъ существованіе общихъ рѣшеній совмѣстныхъ системъ (31) и (32) при условіяхъ (34), укажемъ, какъ на самомъ дѣлѣ найти эти рѣшенія. Приведя простымъ преобразованіемъ перемѣнныхъ постоянное въ правой части интеграла (33) къ единицѣ, мы опять введемъ вмѣсто x, y, z перемѣнныя ξ и η по формуламъ (26), и тогда, слѣдуя тому же методу, который былъ примѣненъ въ § 4, придемъ къ заключенію, что ξ и η суть общія рѣшенія совмѣстныхъ уравненій съ частными производными:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u}-\frac{b+ia}{2}\zeta^2+ic\zeta+\frac{b-ia}{2}=0$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{b_1+ia_1}{2}\zeta^2+ic_1\zeta-\frac{b_1-ia_1}{2}=0,$$

интегрированіе же подобной системы уравненій приводится, какъ было показано въ § 2, къ интегрированію одного обыкновеннаго уравненія Риккати общаго вида. Можемъ такимъ образомъ считать доказаннымъ, что къ интегрированію одного обыкновеннаго общаго уравненія Риккати приводится интегрированіе системъ уравненій (31) и (32) при выполненіи условій (34), каковы условія необходимы для существованія общихъ рѣшеній уравненій (31) и (32).

§ 6. Суммированіе непрерывныхъ дробей, которыхъ числители равны единицѣ, а знаменатели образуютъ ариѳметическую прогрессію.

Къ вопросу объ интегрированіи частнаго уравненія Риккати можетъ быть сведенъ, какъ показалъ *Эйлеръ* [1]), вопросъ о суммированіи непрерывныхъ дробей вида:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+n+\cfrac{1}{a+2n+\cfrac{1}{a+3n+\cdots}}}}$$

---

[1]) *Euler.*—Opuscula analytica, loc. cit.

Разсмотримъ сначала непрерывную дробь болѣе общаго вида:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cdots}}}$$

Обозначимъ послѣдовательныя подходящія дроби черезъ:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}},\ \frac{B}{\mathfrak{B}},\ \frac{C}{\mathfrak{C}},\ \frac{D}{\mathfrak{D}},\ldots\ldots$$

такъ что имѣемъ:

$$A=a,\ B=Ab+1,\ C=Bc+A,\ D=Cd+B,\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{A}=1,\ \mathfrak{B}=\mathfrak{A}b,\ \mathfrak{C}=\mathfrak{B}c+\mathfrak{A},\ \mathfrak{D}=\mathfrak{C}d+\mathfrak{B},\ldots\ldots$$

Не измѣняя величины подходящихъ дробей, мы можемъ замѣнить ихъ слѣдующими:

$$\frac{A_1}{\mathfrak{A}_1},\ \frac{B_1}{\mathfrak{B}_1},\ \frac{C_1}{\mathfrak{C}_1},\ \frac{D_1}{\mathfrak{D}_1},\ldots\ldots \tag{36}$$

гдѣ обозначено:

$$A_1=\frac{A}{a},\ B_1=\frac{B}{ab},\ C_1=\frac{C}{abc},\ D_1=\frac{D}{abcd},\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{A}_1=\frac{\mathfrak{A}}{a},\ \mathfrak{B}_1=\frac{\mathfrak{B}}{ab},\ \mathfrak{C}_1=\frac{\mathfrak{C}}{abc},\ \mathfrak{D}_1=\frac{\mathfrak{D}}{abcd},\ldots\ldots$$

Вычисляя новые числители и знаменатели подходящихъ дробей, получимъ:

$$A_1=1$$

$$B_1=1+\frac{1}{ab}$$

$$C_1=1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}$$

$$D_1=1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{abcd}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{A}_1=\frac{1}{a}$$

$$\mathfrak{B}_1=\frac{1}{a}$$

$$\mathfrak{C}_1=\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}$$

$$\mathfrak{D}_1=\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{acd}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вычисливъ непосредственно достаточное число числителей $A_1, B_1, \ldots\ldots$ и знаменителей $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1, \ldots\ldots$, можемъ усмотрѣть слѣдующій законъ образованія знаменателей изъ числителей: знаменатель какой-нибудь подходящей дроби ряда (36) образуется изъ числителя предшествующей подходящей дроби, если въ послѣднемъ буквы a, b, c, $d, \ldots\ldots$ замѣнить соотвѣтственно буквами: b, c, d, $e, \ldots\ldots$ и умножить его затѣмъ на $\frac{1}{a}$.

Положимъ теперь:

$$b = a+n,\; c = a+2n,\; d = a+3n, \ldots\ldots,$$

тогда легко представимъ числителей дробей (36) въ видѣ:

$$A_1 = 1$$

$$B_1 = 1 + \frac{1}{ab}$$

$$C_1 = 1 + \frac{2}{ac}$$

$$D_1 = 1 + \frac{3}{ad} + \frac{1}{abcd}$$

$$E_1 = 1 + \frac{4}{ae} + \frac{1}{abde}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если обозначимъ $(i-1)$-ое, $i-$ое, $(i+1)$-ое числа въ ряду $a, b, c, \ldots.$ соотвѣтственно черезъ: x, y, z, т. е. положимъ:

$$x = a+(i-2)n,\; y = a+(i-1)n,\; z = a+in,$$

то для числителя Z_1 $(i+1)$-ой дроби въ ряду (36) получимъ выраженіе:

$$Z_1 = 1 + \frac{i}{1.az} + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2.ab.yz} + \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.abc.xyz} +$$
$$+ \frac{(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)}{1.2.3.4.abcd.vxyz} + \ldots\ldots$$

На основаніи сдѣланнаго замѣчанія о законѣ образованія знаменателей дробей (36) изъ ихъ числителей заключаемъ, что знаменатель $\mathfrak{Z}_1$ $(i+1)$-ой подходящей дроби будетъ:

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{1}{a} + \frac{i-1}{1.abz} + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2.abc.yz} + \frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1.2.3.abcd.xyz} +$$
$$+ \frac{(i-4)(i-5)(i-6)(i-7)}{1.2.3.4.abcde.vxyz} + \ldots\ldots$$

Обозначая черезъ S сумму непрерывной дроби:

$$S = a + \frac{1}{a+n+}\,\frac{1}{a+2n+}\,\frac{1}{a+3n+\cdots}\cdots$$

будемъ, очевидно, имѣть:

$$S = \lim_{i=\infty} \frac{Z_1}{З_1} = \frac{\lim Z_1}{\lim З_1},$$

или, полагая:

$$\lim_{i=\infty} Z_1 = (Z), \quad \lim_{i=\infty} З_1 = (З):$$

$$S = \frac{(Z)}{(З)},$$

Замѣтивъ дальше, что.

$$\lim \frac{i}{z} = \lim \frac{i}{a+in} = \frac{1}{n}$$

$$\lim \frac{(i-1)(i-2)}{yz} = \lim \frac{(i-1)\,(i-2)}{[a+(i-1)n]\,[a+in]} = \frac{1}{n^2}$$

. . . .

$$\lim \frac{i-1}{z} = \frac{1}{n}$$

$$\lim \frac{(i-2)(i-3)}{yz} = \frac{1}{n^2}$$

. . . .

будемъ имѣть:

$$(Z) = 1 + \frac{1}{1\,.\,an} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,abn^2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,abcn^3} + \cdots\cdots$$

$$(З) = \frac{1}{a} + \frac{1}{1\,.\,abn} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,abcn^2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,abcdn^3} + \cdots\cdots$$

Для вычисленія этихъ рядовъ, разсмотримъ слѣдующіе степенные ряды:

$$p = 1 + \frac{x^n}{1\,.\,an} + \frac{x^{2n}}{1\,.\,2\,.\,abn^2} + \frac{x^{3n}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,abcn^3} + \cdots\cdots$$

$$q = \frac{1}{a} + \frac{x^n}{1\,.\,abn} + \frac{x^{2n}}{1\,.\,2\,.\,abcn^2} + \frac{x^{3n}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,abcdn^3} + \cdots\cdots,$$

причемъ будемъ имѣть:

$$(Z)=\int\limits^{x=1} p,\quad (З)=\int\limits^{x=1} q,\quad S=\int\limits^{x=1}\frac{p}{q}.$$

Между функціями p и q существуютъ нѣкоторыя аналитическія зависимости. Во первыхъ, непосредственно находимъ:

$$\text{(37)}\qquad \frac{dp}{dx}=x^{n-1}q.$$

Во вторыхъ имѣемъ:

$$x\frac{dq}{dx}=\frac{x^n}{ab}+\frac{x^{2n}}{1.abc.n}+\frac{x^{3n}}{1.2.abcd.n^2}+\cdots\cdots$$

$$p-aq=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{x^n}{1.n}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\frac{x^{2n}}{1.2bn^2}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)\frac{x^{3n}}{1.2.3bcn^3}+\cdots\cdots=$$

$$=\frac{x^n}{ab}+\frac{x^{2n}}{1.abc.n}+\frac{x^{3n}}{1.2.abcd.n^2}+\cdots\cdots$$

и слѣдовательно:

$$\text{(38)}\qquad x\frac{dq}{dx}=p-aq.$$

Положимъ:

$$\frac{p}{q}=z,$$

такъ что при $x=0$ имѣемъ $z=a$, а при $x=1-z=S$; будемъ имѣть:

$$dp=zdq+qdz,$$

и на основаніи уравненія (37):

$$\text{(39)}\qquad x^{n-1}q\,dx=z\,dq+q\,dz.$$

Далѣе, изъ уравненія (38) находимъ:

$$\frac{x}{q}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{p}{q}-a=z-a,$$

слѣдовательно, умножая обѣ части уравненія (39) на $\frac{x}{q}$, получимъ:

$$x^n\,dx=z\,(z-a)\,dx+x\,dz,$$

или:

$$\frac{dz}{dx}+\frac{z^2}{x}-\frac{az}{x}-x^{n-1}=0.$$

Это уравненіе приводится къ частному уравненію Риккати подстановкою:

$$z = x^a y,$$

такъ что $y = \infty$ при $x = 0$ и $y = S$ при $x = 1$; получимъ тогда:

$$\frac{dy}{dx} + x^{a-1} y^2 = x^{n-a-1},$$

или, полагая:

$$x = t^{\frac{1}{a}},$$

такъ что $y = \infty$ при $t = 0$ и $y = S$ при $t = 1$:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{a} \cdot y^2 = \frac{1}{a} t^{\frac{n-2a}{a}}, \tag{40}$$

что и представляетъ частное уравненіе Риккати.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что для суммированія непрерывной дроби:

$$S = a + \cfrac{1}{a+n+\cfrac{1}{a+2n+\cfrac{1}{a+3n+\cdots}}} \tag{41}$$

нужно обынтегрировать Риккатіево уравненіе (40); найдя его общій интегралъ въ видѣ:

$$y = f(t, C),$$

гдѣ C—произвольное постоянное, выбираемъ это C такъ, чтобы было:

$$f(0, C) = \infty;$$

назвавъ это значеніе C черезъ C_0, будемъ имѣть:

$$S = f(1, C_0).$$

На основаніи формы уравненія (40) можемъ видѣть, въ какихъ случаяхъ дробь (41) можетъ быть суммирована; а именно: для возможности суммированія дроби (41) необходимо (и достаточно) условіе:

$$\frac{n-2a}{a} = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

или:

$$n = \frac{\pm 2a}{2i \pm 1},$$

гдѣ i—произвольное цѣлое положительное число, или нуль.

ГЛАВА II.

Геометрическія приложенія теоріи общаго уравненія Риккати.

§ 1. Изысканіе ортогональныхъ траекторій семейства окружностей:

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

гдѣ a, b, r **— функціи параметра** u [1]).

На основаніи теоріи ортогональныхъ траекторій заключаемъ, что искомыя кривыя удовлетворяютъ дифференціальному уравненію:

(2) $$\frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}.$$

Чтобы получить дифференціальное уравненіе искомыхъ траекторій, слѣдовало бы изъ послѣдняго уравненія и изъ уравненія окружностей исключить параметръ u; но въ общемъ видѣ это исключеніе не возможно. Поэтому постараемся получить уравненіе искомыхъ траекторій въ конечномъ видѣ слѣдующимъ образомъ. Положимъ:

(3) $$x=a+r\cos\theta,\quad y=b+r\sin\theta$$

считая θ также функціею u, а x, y — текущими координатами искомыхъ ортогональныхъ траекторій. Если опредѣлимъ θ въ функціи u такъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (2), то уравненія (3) и будутъ представлять искомыя кривыя. Очевидно, что θ есть уголъ,

---

[1]) *Darboux.*—Leçons etc. I стр. 113 и слѣд.

образуемый съ осью x прямою, соединяющею точку (x, y) траекторіи (3) съ центромъ окружности (1), пересѣкающей эту траекторію въ точкѣ (x, y). Изъ уравненій (3) находимъ:

$$dx = da - r \sin\theta \,.\, d\theta + \cos\theta \,.\, dr$$

$$dy = db + r \cos\theta \,.\, d\theta + \sin\theta \,.\, dr.$$

Вставляя эти выраженія въ уравненіе (2) и замѣняя $x-a$ и $y-b$ соотвѣтственно черезъ $r\cos\theta$ и $r\sin\theta$, получимъ:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{r} \cdot \frac{da}{du} \sin\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{db}{du} \cos\theta,$$

или, полагая:

$$tg\frac{\theta}{2} = t:$$

$$2\frac{dt}{du} = \frac{2}{r} \cdot \frac{da}{du} t - \frac{1}{r} \cdot \frac{db}{du}(1 - t^2). \tag{4}$$

Имѣемъ такимъ образомъ для опредѣленія t въ функціи u общее уравненіе Риккати. Если удастся изъ него опредѣлить t въ функціи u, то найдемъ и θ въ функціи u, и тогда уравненія (3) будутъ представлять искомыя ортогональныя траекторіи окружностей семейства (1).

Изъ свойствъ общаго уравненія Риккати выводимъ рядъ слѣдствій, относящихся къ разбираемой задачѣ. Итакъ, зная одну какую-нибудь ортогональную траекторію окружностей (1), мы найдемъ всю систему траекторій посредствомъ двухъ квадратуръ; зная двѣ траекторіи, мы посредствомъ одной квадратуры найдемъ всѣ остальныя; наконецъ, зная 3 траекторіи, мы найдемъ всѣ остальныя безъ интегрированія.

Если t_1, t_2, t_3, t_4 суть какія-нибудь 4 рѣшенія уравненія (4), то, полагая:

$$t_i = tg\frac{\theta_i}{2}, \; (i = 1, 2, 3, 4)$$

будемъ имѣть:

$$\frac{tg\frac{\theta_1}{2} - tg\frac{\theta_2}{2}}{tg\frac{\theta_3}{2} - tg\frac{\theta_2}{2}} : \frac{tg\frac{\theta_1}{2} - tg\frac{\theta_4}{2}}{tg\frac{\theta_3}{2} - tg\frac{\theta_4}{2}} = const.$$

или:

$$\frac{\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}} : \frac{\sin\frac{\theta_1-\theta_4}{2}}{\sin\frac{\theta_3-\theta_4}{2}} = const.$$

Послѣднее уравненіе выражаетъ слѣдующую теорему: *ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, въ которыхъ какая-нибудь окружность семейства* (1) *пересѣкается четырьмя ортогональными траекторіями, имѣетъ постоянную величину* [1]).

Покажемъ, какъ можно въ самомъ общемъ видѣ построить двѣ взаимно ортогональныя системы кривыхъ (т. е. двѣ такихъ системы кривыхъ, чтобы всякая кривая одной системы, не пересѣкая ни одной кривой той же системы, пересѣкала всѣ кривыя другой системы подъ прямымъ угломъ), причемъ одна система кривыхъ состояла бы изъ окружностей. Выберемъ какъ угодно двѣ кривыя C_1 и C_2 (задавая ихъ аналитическія уравненія); тогда существуетъ и легко можетъ быть опредѣлено аналитически семейство окружностей, пересѣкающихъ ортогонально кривыя C_1 и C_2; эти окружности будутъ представлять одну изъ искомыхъ системъ кривыхъ; кривыя второй системы, къ которымъ принадлежатъ кривыя C_1 и C_2, найдутся на основаніи вышесказаннаго посредствомъ одной квадратуры.

Въ одномъ случаѣ (встрѣчающемся, впрочемъ, довольно часто) послѣдняя задача рѣшается безъ всякой квадратуры; это бываетъ тогда, когда заранѣе извѣстно, что среди кривыхъ второй системы должна быть нѣкоторая (заданная) прямая линія или окружность. Такъ какъ прямая линія и окружность, пересѣкая разъ какую-либо окружность подъ прямымъ угломъ, пересѣкаетъ ее второй разъ тоже подъ прямымъ угломъ, то такая заданная прямая или окружность равносильна двумъ заданнымъ траекторіямъ. Присоединивъ тогда произвольную кривую C, мы составимъ уравненіе семейства окружностей, ортогонально пересѣкающихъ данную прямую или окруж-

---

[1]) Ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ на коническомъ сѣченіи (слѣдов. въ частности—на окружности) называется ангармоническое отношеніе 4-хъ прямыхъ, соединяющихъ эти 4 точки съ произвольною 5-ою точкою коническаго сѣченія; это отношеніе не зависитъ отъ положенія 5-ой точки на конич. сѣченіи.

ность и кривую C; составимъ затѣмъ Риккатіево уравненіе (4); для послѣдняго будемъ имѣть 3 частныхъ рѣшенія, слѣдовательно его общій интегралъ найдется безъ квадратуры.

Изъ предыдущаго вытекаетъ также, что для опредѣленія системы ортогональныхъ траекторій семейства окружностей, пересѣкающихъ одну какую-нибудь окружность подъ прямымъ угломъ, или имѣющихъ центры на одной прямой линіи, необходимо и достаточно одной квадратуры.

§ 2. Изысканіе кривыхъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что точки касанія касательныхъ, проведенныхъ къ нимъ изъ какой-нибудь точки данной кривой, лежатъ на прямой линіи [1]).

Пусть данная кривая будетъ:

$$\xi = \varphi(u),\ \eta = \psi(u),$$

гдѣ u — перемѣнный параметръ. Пусть A (см. чертежъ) будетъ одна изъ искомыхъ кривыхъ; текущія координаты этой кривой обозначимъ черезъ x и y. Касательная, проведенная къ ней изъ какой-нибудь точки U данной кривой, представляется уравненіемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-\psi(u)}{x-\varphi(u)}. \tag{5}$$

Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія различныхъ кривыхъ искомой системы съ касательными, проведенными изъ одной и той же точки U, есть по условію нѣкоторая прямая K; пусть уравненіе этой прямой будетъ:

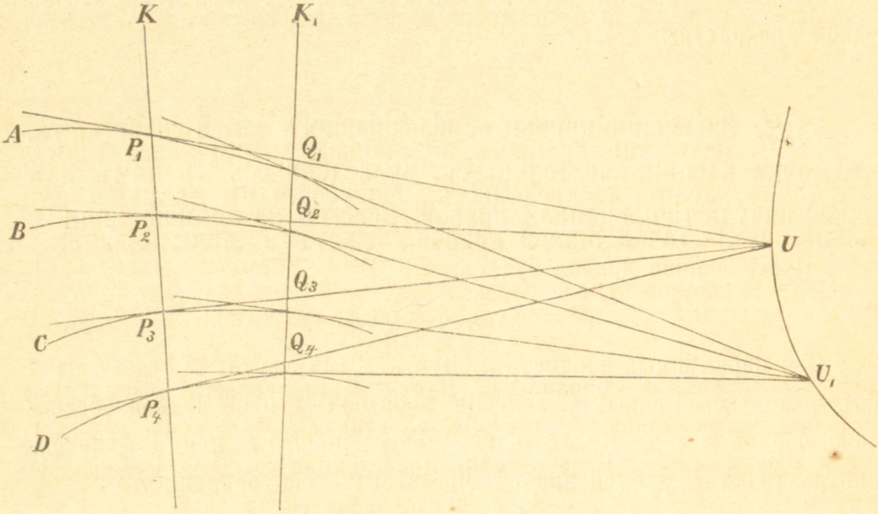
$$px+qy+r=0, \tag{6}$$

гдѣ p, q, r — функціи отъ ξ, η, слѣдовательно — функціи параметра u. Координаты (x, y) точки пересѣченія прямой K съ кривою A удовлетворяютъ послѣднимъ двумъ уравненіямъ. Мѣняя u непрерывно, мы по уравненію (5) будемъ получать непрерывный рядъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точки U къ кривой искомой системы, а по уравненію (6) — соотвѣтствующія прямыя K; точка пересѣченія каж-

---

[1]) Сравн. *Weyr*, loc. cit.

дой касательной съ соотвѣтствующею прямою K, лежитъ на кривой искомой системы, слѣдовательно, если мѣнять u непрерывно, то совокупность уравненій (5) и (6) представитъ всѣ точки искомыхъ кривыхъ. Исключая u изъ уравненій (5) и (6), получимъ общее дифференціальное уравненіе искомыхъ кривыхъ; увидимъ, что полученное такимъ образомъ уравненіе есть уравненіе Риккати.



Чтобы обнаружить это, возьмемъ на прямой K произвольныя 4 точки: P_1, P_2, P_3, P_4; черезъ эти точки проходятъ соотвѣтствующія кривыя искомой системы: A, B, C, D; касательныя къ этимъ четыремъ кривымъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ P проходятъ черезъ точку U. Дадимъ параметру u безконечно малое приращеніе du; тогда на данной кривой получимъ смежную съ U точку U_1; ей будетъ соотвѣтствовать прямая K_1, представляемая уравненіемъ:

$$p\,(u+du)\,x+q\,(u+du)\,y+r\,(u+du)=0.$$

Пусть прямыя UP_1, UP_2, UP_3, UP_4 пересѣкаютъ прямую K_1 соотвѣтственно въ точкахъ: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. На основаніи извѣстной теоремы проективной геометріи заключаемъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ: P_1, P_2, P_3, P_4 равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Построивъ ординаты этихъ восьми точекъ въ какой-нибудь системѣ Декартовыхъ координатныхъ осей, заключаемъ, что ангармоническое отношеніе ординатъ первыхъ четырехъ точекъ равно ангармоническому отношенію ординатъ вторыхъ четырехъ точекъ; но такъ какъ мы дали параметру u безконечно малое приращеніе du, то точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 лишь безконечно мало удалены отъ точекъ пересѣченія кривыхъ A, B, C, D съ прямою K_1: поэтому составляя ангармоническое отношеніе ординатъ точекъ Q_1, Q_2 Q_3 Q_4 — величинъ конечныхъ — мы можемъ считать эти точки лежащими на соотвѣтствующихъ кривыхъ: A, B, C, D. Называя ординаты точекъ P соотвѣтственно черезъ y_1, y_2, y_3, y_4, мы можемъ сказать, что отношеніе:

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} : \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}$$

не измѣняется, когда точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) перемѣщаются по соотвѣтственнымъ кривымъ искомой системы, лишь бы онѣ одновременно (т. е. при одномъ и томъ же значеніи параметра u) лежали на одной прямой линіи. Отсюда заключаемъ, что y есть функція Риккати отъ x, такъ что результатъ исключенія u изъ уравненій (5) и (6) долженъ представиться въ формѣ уравненія Риккати. Зная одинъ интегралъ этого уравненія (т. е. одну кривую линію искомой системы), мы найдемъ его общій интегралъ (т. е. всѣ остальныя кривыя линіи) посредствомъ двухъ квадратуръ. Въ одномъ частномъ случаѣ дѣйствительно знаемъ à priori одно рѣшеніе нашей задачи, а именно: когда заданная линія есть прямая; тогда эта прямая, очевидно, сама представляетъ частное рѣшеніе задачи.

§ 3. Установленіе проективнаго соотвѣтствія между точками системы коническихъ сѣченій [1]).

Пусть уравненіе:

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

будетъ второй степени относительно x и y и пусть оно содержитъ независимый перемѣнный параметръ λ; тогда это уравненіе будетъ представлять въ какой-нибудь (для простоты — прямоугольной) Декартовой системѣ осей координатъ систему коническихъ сѣченій:

---

[1]) Сравн. *Weyr*, loc. cit.

каждому значенію λ будетъ соотвѣтствовать одно коническое сѣченіе системы. Точки на коническомъ сѣченіи будемъ опредѣлять, считая x и y функціями нѣкотораго параметра μ, который вообще будетъ зависѣть отъ λ; задавъ λ какое-нибудь опредѣленное значеніе и мѣняя непрерывно μ, мы заставимъ точку (x, y) перемѣщаться по соотвѣтствующему коническому сѣченію. Функціональную зависимость между x, y и μ установимъ такимъ образомъ, чтобы выраженіе:

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2} : \frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2}$$

было *ангармонической функціею* четырехъ точекъ коническаго сѣченія, соотвѣтствующихъ значеніямъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ параметра μ (т. е. чтобы ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ равнялось написанному выраженію). Установивъ функціональную зависимость между μ и x, y [1]), постараемся опредѣлить функціональную зависимость μ отъ λ такимъ образомъ, чтобы при непрерывномъ измѣненіи параметра λ написанная ангармоническая функція не измѣнялась.

Пусть кривая A представляетъ коническое сѣченіе, соотвѣтствующее какому-нибудь значенію параметра λ; на этомъ сѣченіи возьмемъ произвольныя 4 точки: P_1, P_2, P_3, P_4, соотвѣтствующія значеніямъ μ: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Вообразимъ систему прямыхъ линій:

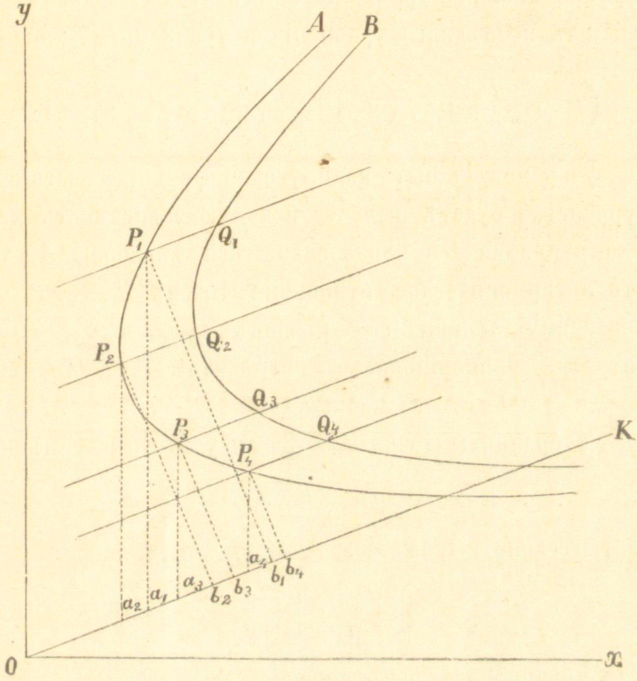
$$y = \lambda x + \beta,$$

гдѣ λ имѣетъ то же значеніе, а β — произвольное постоянное; дадимъ β такія 4 значенія, чтобы прямыя, представляемыя послѣднимъ уравненіемъ, проходили соотвѣтственно черезъ точки P_1, P_2, P_3, P_4; эти прямыя будутъ очевидно параллельны одному направленію, образующему съ положительнымъ направленіемъ оси x уголъ $\operatorname{arctg} \lambda$. Пусть значенію параметра: $\lambda + d\lambda$ соотвѣтствуетъ коническое сѣченіе B; положимъ, что вышесказанныя 4 прямыя пересѣкаютъ кривую B соотвѣтственно въ точкахъ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; этимъ точкамъ кривой B пусть соотвѣтствуютъ значенія μ: μ'_1, μ'_2, μ'_3, μ'_4. Потребуемъ, чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2} : \frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2} = \frac{\mu'_3-\mu'_1}{\mu'_3-\mu'_2} : \frac{\mu'_4-\mu'_1}{\mu'_4-\mu'_2},$$

[1]) Какъ установить такую зависимость, будетъ ниже выяснено.

т. е. чтобы ангармоническое отношеніе точекъ P кривой A равнялось ангармоническому отношенію точекъ Q кривой B. Тогда ряды



точекъ P и Q будутъ проективны; для этого же необходимо, чтобы центръ проекціи лежалъ на обоихъ коническихъ сѣченіяхъ; но въ данномъ случаѣ центромъ проекціи служитъ безконечно удаленная точка направленія:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \tag{7}$$

слѣдовательно эта точка должна принадлежать обоимъ коническимъ сѣченіямъ. Изъ этого выводимъ слѣдствіе, что любыя двѣ смежныя кривыя системы $f=0$ пересѣкаются на безконечно удаленной прямой въ точкѣ, характеризуемой направленіемъ (7). Безконечно удаленная прямая оказывается такимъ образомъ оберткою всѣхъ коническихъ сѣченій данной системы; отсюда вытекаетъ необходимое условіе, что данныя коническія сѣченія могутъ быть только *параболы*, съ осями, параллельными прямой OK:

$$y - \lambda x = 0.$$

Предложенное уравненіе должно поэтому имѣть видъ:

$$f(x, y, \lambda) = (y - \lambda x)^2 + x\varphi(\lambda) + y\psi(\lambda) + \chi(\lambda) = 0.$$

Общее дифференціальное уравненіе всѣхъ этихъ параболъ получимъ, исключая λ изъ послѣдняго уравненія и уравненія (7); найдемъ:

$$(8) \qquad \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\psi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \chi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

причемъ φ, ψ и χ могутъ быть какія-угодно функціи своего аргумента.

Теперь легко будетъ вывести искомую зависимость между μ и λ. Такъ какъ прямая OK параллельна оси параболы A, то заключаемъ, что ангармоническое отношеніе точекъ P_1, P_2, P_3, P_4 равно ангармоническому отношенію отрѣзковъ P_1b_1, P_2b_2, P_3b_3, P_4b_4; но эти отрѣзки пропорціональны отрѣзкамъ P_1a_1, P_2a_2, P_3a_3, P_4a_4, которые равны соотвѣтственно: $y_1 - \lambda x_1$, $y_2 - \lambda x_2$, $y_3 - \lambda x_3$, $y_4 - \lambda x_4$, гдѣ x_i и y_i — координаты точки P_i. Въ виду этого можемъ положить:

$$(9) \qquad \mu = y - \lambda x,$$

тогда дѣйствительно выраженіе:

$$\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_2} : \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_2}$$

представитъ ангармоническое отношеніе точекъ P_1, P_2, P_3, P_4. Остается теперь изъ уравненій (7), (8), (9) исключить x и y, тогда получимъ искомую зависимость между μ и λ. Замѣняя въ уравненіи (8) $\frac{dy}{dx}$ черезъ λ на основаніи уравненія (7) и y черезъ $\lambda x + \mu$ на основаніи уравненія (9), мы изъ него получимъ слѣдующее выраженіе для x:

$$x = -\frac{\mu^2 + \mu\psi(\lambda) + \chi(\lambda)}{\varphi(\lambda) + \lambda\psi(\lambda)}.$$

Дифференцируя же уравненіе (9), получимъ:

$$d\mu = dy - \lambda dx - x d\lambda,$$

или, на основаніи уравненія (7):

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = -x,$$

и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{d\mu}{d\lambda}+L\mu^2+M\mu+N=0,$$

гдѣ для краткости обозначено:

$$L=-\frac{1}{\varphi(\lambda)+\lambda\psi(\lambda)},\ M=L\psi(\lambda),\ N=L\chi(\lambda).$$

Такимъ образомъ для опредѣленія μ въ функціи λ приходится интегрировать уравненіе Риккати.

§ 4. Опредѣленіе развертки кривой двойной кривизны [1]).

Разверткою (développée) кривой въ пространствѣ называется кривая, огибаемая нормалями данной кривой. Развертка не можетъ быть образована главными нормалями данной кривой, такъ какъ главныя нормали въ двухъ смежныхъ точкахъ не пересѣкаются; каждая кривая имѣетъ безчисленное множество развертокъ; главная нормаль развертки въ какой-нибудь ея точкѣ параллельна касательной къ данной кривой въ соотвѣтствующей точкѣ [2]).

Пусть кривая въ пространствѣ опредѣляется уравненіями:

$$\xi=\varphi(u),\ \eta=\psi(u),\ \zeta=\chi(u).$$

Составивъ уравненія касательной къ этой кривой въ какой-нибудь точкѣ (ξ, η, ζ), мы можемъ въ нихъ замѣнить ξ, η, ζ ихъ выраженіями черезъ u; тогда уравненія касательной напишутся въ видѣ:

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta, \tag{10}$$

гдѣ x, y, z — текущія координаты касательной, а a b, α, β — функціи параметра u. Всякая плоскость, проведенная черезъ прямую (10), будетъ касаться данной кривой въ точкѣ (ξ, η, ζ). Уравненіе такой плоскости можетъ быть написано въ видѣ:

$$x-az-\alpha+\lambda(y-bz-\beta)=0; \tag{11}$$

гдѣ λ — произвольный параметръ. Давая λ различныя значенія при

---

1) По *Laurent*.—Traité d'analyse. Paris 1890. t. V p. 63—65.

2) Доказательство этихъ и другихъ свойствъ развертокъ кривыхъ въ пространствѣ можно найти у *Laurent* во II-омъ томѣ цитированнаго его сочиненія, стр. 381—386.

одномъ и томъ же u, мы будемъ получать различныя плоскости, содержащія прямую (10) и касательныя къ кривой въ одной и той же точкѣ. Если будемъ мѣнять параметръ u и одновременно варіировать параметръ λ, какъ нѣкоторую (произвольную) функцію u, то плоскость (11), перемѣщаясь непрерывно и оставаясь касательною къ данной кривой, будетъ огибать нѣкоторую развертывающуюся поверхность. Прямолинейныя образующія этой поверхности представятся слѣдующими уравненіями:

$$x-az-\alpha+\lambda(y-bz-\beta)=0$$

$$-zda-d\alpha+(y-bz-\beta)d\lambda-\lambda(zdb+d\beta)=0.$$

Представимъ эти уравненія въ нѣсколько иномъ видѣ. Умножимъ первое изъ нихъ на $d\lambda$, второе на λ и вычтемъ почленно одно изъ другого; замѣняя потомъ дифференціалы производными по u, получимъ:

$$\text{(12)} \qquad \frac{x}{a\frac{d\lambda}{du}-\lambda\frac{da}{du}-\lambda^2\frac{db}{du}}=\frac{z}{\frac{d\lambda}{du}}+\frac{\frac{d\alpha}{du}-\lambda\frac{d\alpha}{du}-\lambda^2\frac{d\beta}{du}}{\frac{d\lambda}{du}\left(a\frac{d\lambda}{du}-\lambda\frac{da}{du}-\lambda^2\frac{db}{du}\right)}.$$

Второе же изъ предыдущихъ уравненій напишется въ видѣ:

$$\text{(13)} \qquad \frac{y}{\frac{da}{du}+b\frac{d\lambda}{du}+\lambda\frac{db}{du}}=\frac{z}{\frac{d\lambda}{du}}+\frac{\frac{d\alpha}{du}+\beta\frac{d\lambda}{du}+\lambda\frac{d\beta}{du}}{\frac{d\lambda}{du}\left(a\frac{d\lambda}{du}-\lambda\frac{da}{du}-\lambda^2\frac{db}{du}\right)}.$$

Уравненіе прямой, параллельной этой прямолинейной образующей и проходящей черезъ начало координатъ, можно написать въ видѣ:

$$\text{(14)} \qquad \frac{x}{a\frac{d\lambda}{du}-\lambda\frac{da}{du}-\lambda^2\frac{db}{du}}=\frac{y}{\frac{da}{du}+b\frac{d\lambda}{du}+\lambda\frac{db}{du}}=\frac{z}{\frac{d\lambda}{du}}.$$

Потребуемъ, чтобы прямолинейная образующая (12, 13) была перпендикулярна къ касательной (10), тогда прямая (14) также будетъ перпендикулярна къ этой касательной; но тогда прямолинейная образующая (12, 13), проходящая черезъ точку (ξ, η, ζ), будетъ совпадать съ нормалью къ данной кривой; замѣтивъ же, что прямолинейныя образующія развертывающейся поверхности огибаютъ ребро возврата этой поверхности, мы заключимъ, что при перпендикулярности прямыхъ (10) и (14) ребро возврата сказанной линейчатой поверхности будетъ искомою разверткою данной кривой. Выражая условіе перпендикулярности прямыхъ (10) и (14), будемъ имѣть:

$$a\left(a\frac{d\lambda}{du}-\lambda\frac{da}{du}-\lambda^2\frac{db}{du}\right)+b\left(\frac{da}{du}+b\frac{d\lambda}{du}+\lambda\frac{db}{du}\right)+\frac{d\lambda}{du}=0,$$

или:

$$(a^2+b^2+1)\frac{d\lambda}{du}-a\frac{db}{du}\lambda^2+\left(b\frac{db}{du}-a\frac{da}{du}\right)\lambda+b\frac{da}{du}=0,$$

что представляетъ уравненіе Риккати. Если изъ него удастся опредѣлить λ въ функціи u, то будемъ знать, по какому закону должно мѣнять λ при перемѣщеніи касательной плоскости (11) отъ одной точки данной кривой къ другой для того, чтобы эта касательная плоскость огибала развертывающуюся поверхность, которой ребро возврата было бы разверткою данной кривой. Общій интегралъ полученнаго нами уравненія Риккати дастъ, понятно, всѣ развертки данной кривой.

§ 5. Изысканіе ассимптотическихъ линій линейчатыхъ поверхностей [1]).

Ассимптотическою линіею поверхности называется кривая, начерченная на поверхности и обладающая тѣмъ свойствомъ, что въ каждой ея точкѣ оскулирующая съ нею плоскость совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности въ этой точкѣ.

Прежде чѣмъ приступить къ аналитическому изысканію ассимптотическихъ линій поверхности, сдѣлаемъ предварительно нѣкоторыя необходимыя замѣчанія относительно общихъ свойствъ ассимптотическихъ линій.

Уравненіе плоскости, касательной къ поверхности въ точкѣ (x, y, z) кривой на этой поверхности, можетъ быть написано въ видѣ:

$$Z-z=p\,(X-x)+q\,(Y-y),$$

гдѣ X, Y, Z — текущія координаты касательной плоскости, а p и q обозначаютъ соотвѣтственно производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Для того, чтобы

---

[1]) *Picard.*—Traité d'analyse. Paris 1891 t. I, p. 410—411.

эта плоскость оскулировала съ кривою въ точкѣ (x, y, z), должны выполняться условія:

$$pdx + qdy - dz = 0$$

$$pd^2x + qd^2y - d^2z = 0.$$

Первое изъ этихъ условій выполняется тождественно на основаніи самаго уравненія касательной плоскости, второе же на основаніи перваго можетъ быть представлено въ формѣ:

(15) $$dpdx + dqdy = 0;$$

введя обозначенія:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

и замѣтивъ соотношенія:

$$dp = rdx + sdy$$

$$dq = sdx + tdy,$$

напишемъ условіе (15) въ видѣ:

$$rdx^2 + 2s\,dxdy + tdy^2 = 0.$$

Это уравненіе даетъ въ общемъ случаѣ два значенія для $\frac{dy}{dx}$:

(16) $$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \ \frac{dy}{dx} = f_2(x, y),$$

такъ что вообще черезъ каждую точку M поверхности проходятъ двѣ ассимптотическія линіи (дѣйствительныя или мнимыя). Если будемъ перемѣщать точку M на поверхности какимъ-нибудь образомъ, то первое уравненіе (16) будетъ опредѣлять одну систему ассимптотическихъ линій, а второе уравненіе—другую систему.

Пусть R_1 и R_2 будутъ радіусы кривизны *главныхъ* нормальныхъ сѣченій поверхности въ точкѣ M, а R—радіусъ кривизны какого-нибудь нормальнаго сѣченія поверхности въ той же точкѣ M; обозначая черезъ ω уголъ между плоскостью послѣдняго нормальнаго сѣченія и плоскостью одного изъ нормальныхъ сѣченій (нпр. того, котораго радіусъ кривизны въ точкѣ M равенъ R_1), будемъ имѣть по извѣстной теоремѣ:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \omega}{R_1} + \frac{\cos^2 \omega}{R_2}.$$

Если R_1 и R_2 имѣютъ одинаковые знаки, то съ измѣненіемъ ω знакъ R не мѣняется, и вблизи точки M поверхность расположена по одну сторону касательной плоскости. Если же R_1 и R_2 имѣютъ разные знаки, то R мѣняетъ свой знакъ при измѣненіи ω; нормальныя сѣченія, соотвѣтствующія значеніямъ ω, опредѣляемымъ изъ уравненія:

$$tg\,\omega = \pm\sqrt{-\frac{R_1}{R_2}}, \tag{17}$$

имѣютъ радіусъ кривизны безконечно большой, и точка M служитъ для нихъ *точкою перегиба;* касательная плоскость въ точкѣ M къ поверхности пересѣкаетъ послѣднюю по линіи, проходящей черезъ точку M; въ такомъ случаѣ говорятъ, что поверхность имѣетъ въ точкѣ M *противоположныя кривизны* (des courbures opposées). Касательныя въ точкѣ M къ двумъ нормальнымъ сѣченіямъ съ безконечно большимъ радіусомъ кривизны въ этой точкѣ называются *главными касательными* поверхности въ точкѣ M.

Вообразимъ какую-нибудь кривую на поверхности, проходящую черезъ точку M. Выберемъ систему осей координатъ такъ, чтобы ось z была направлена по нормали къ поверхности въ точкѣ M, а за оси x и y примемъ произвольныя двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя въ касательной плоскости къ поверхности въ точкѣ M. Обозначая косинусы угловъ, образуемыхъ касательною къ кривой въ точкѣ M съ осями x и y черезъ α и β, будемъ имѣть:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Если выбранная кривая есть ассимптотическая линія, то для нея выполняется условіе:

$$r dx^2 + 2s\,dx\,dy + t dy^2 = 0,$$

или на основаніи соотношеній:

$$dx = \alpha\,ds,\quad dy = \beta\,ds:$$

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0,$$

такъ что для ассимптотическихъ линій имѣемъ: $\frac{1}{R} = 0$, откуда заключаемъ, что касательныя къ ассимптотическимъ линіямъ совпадаютъ съ главными касательными къ поверхности; но поверхность имѣетъ дѣйствительныя главныя касательныя только въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ она имѣетъ противоположныя кривизны, поэтому въ такихъ только точкахъ она имѣетъ дѣйствительныя ассимптотическія линіи.

Составимъ общее дифференціальное уравненіе ассимптотическихъ линій поверхности. Пусть въ прежней координатной системѣ заданы уравненія поверхности въ видѣ:

$$x = f_1(u,v),\ y = f_2(u,v),\ z = f_3(u,v). \tag{18}$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности въ точкѣ $M_{(x,y,z)}$ представимъ въ видѣ:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{19}$$

причемъ коэффиціенты A, B, C связаны уравненіями:

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{\partial f_1}{\partial u}+B\frac{\partial f_2}{\partial u}+C\frac{\partial f_3}{\partial u}=0\\ A\frac{\partial f_1}{\partial v}+B\frac{\partial f_2}{\partial v}+C\frac{\partial f_3}{\partial v}=0.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Если на u и v наложимъ какую-нибудь зависимость, нпр. выражая u, какъ функцію v, или выражая u и v, какъ функціи новаго параметра, то уравненія (18) представятъ нѣкоторую линію на поверхности. Мы постараемся найти такую зависимость между u и v, при которой уравненія (18) опредѣляли бы ассимптотическія линіи поверхности. Для этого выразимъ условіе, что касательная плоскость (19) соприкасается къ кривой (18) въ точкѣ M; имѣемъ:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0$$

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

На основаніи уравненій (20) первое изъ этихъ уравненій удовлетворяется само собою, второе же можно представить въ видѣ:

$$A\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}dv^2\right)+B\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}dv^2\right)+$$

$$+C\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f_3}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 f_3}{\partial v^2}dv^2\right)=0. \tag{21}$$

Для полученія искомой дифференціальной зависимости между u и v исключаемъ коэффиціенты A, B, C изъ уравненій (20) и (21), послѣ чего находимъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}dv^2, & \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}dv^2, & \frac{\partial^2 f_3}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f_3}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 f_3}{\partial v^2}dv^2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial u}, & \frac{\partial f_2}{\partial u}, & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}, & \frac{\partial f_2}{\partial v}, & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Примѣнимъ теперь полученный результатъ спеціально къ линейчатымъ поверхностямъ. Одна система ассимптотическихъ линій линейчатой поверхности извѣстна заранѣе: это — система ея прямолинейныхъ образующихъ; въ самомъ дѣлѣ, прямолинейную образующую во всякой ея точкѣ можно разсматривать, какъ нормальное сѣченіе поверхности въ этой точкѣ, имѣющее безконечно большой радіусъ кривизны. Найдемъ вторую систему ассимптотическихъ линій линейчатой поверхности.

Считая u функціею параметра v, будемъ имѣть по уравненіямъ (18) нѣкоторую кривую на нашей поверхности, текущія координаты которой: ξ, η, ζ будутъ функціями одного параметра v. Прямолинейная образующая поверхности, проходящая черезъ точку (ξ, η, ζ), пусть образуетъ съ координатными осями углы, косинусы которыхъ суть α, β, γ; α, β, γ суть также функціи параметра v. На этой образующей въ разстояніи l отъ точки (ξ, η, ζ) пусть будетъ точка поверхности (x, y, z); положеніе каждой точки поверхности вполнѣ опредѣлится двумя параметрами: l и v; дѣйствительно, будемъ имѣть:

$$x=\xi+l\alpha,\quad y=\eta+l\beta,\quad z=\zeta+l\gamma.$$

Полагая поэтому $u=l$, получимъ на основаніи выведеннаго нами общаго дифференціальнаго уравненія ассимптотическихъ линій слѣдующее дифференціальное уравненіе ассимптотическихъ линій линейчатыхъ поверхностей:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d^2\xi}{dv^2}+l\frac{d^2\alpha}{dv^2}\right)dv^2+2\frac{d\alpha}{dv}dldv, & \left(\frac{d^2\eta}{dv^2}+l\frac{d^2\beta}{dv^2}\right)dv^2+2\frac{d\beta}{dv}dldv. & \left(\frac{d^2\zeta}{dv^2}+l\frac{d^2\gamma}{dv^2}\right)dv^2+2\frac{d\gamma}{dv}dldv \\ \frac{d\xi}{dv}+l\frac{d\alpha}{dv}, & \frac{d\eta}{dv}+l\frac{d\beta}{dv}, & \frac{d\zeta}{dv}+l\frac{d\gamma}{dv} \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Отбросивъ рѣшеніе $dv = 0$, ведущее, очевидно, къ первой системѣ ассимптотическихъ линій, получимъ для второй системы уравненіе:

$$\frac{dl}{dv} + Pl^2 + Ql + R = 0,$$

гдѣ P, Q, R — опредѣленныя функціи v [1]).

На основаніи свойствъ интеграловъ уравненія Риккати заключаемъ, что, зная 1, 2, 3 ассимптотическихъ линіи второй системы, мы найдемъ всѣ линіи этой системы соотвѣтственно двумя квадратурами, одною квадратурою или безъ интегрированія.

Если l_1, l_2, l_3, l_4 обозначаютъ четыре интеграла полученнаго уравненія Риккати, то будемъ имѣть:

$$\frac{l_1 - l_2}{l_3 - l_2} : \frac{l_1 - l_4}{l_3 - l_4} = const,$$

откуда видимъ, что ангармоническое отношеніе точекъ пересѣченія какой-нибудь образующей съ четырьмя ассимптотическими линіями постоянно (для всѣхъ образующихъ) [2]).

Въ одномъ случаѣ заранѣе извѣстны два рѣшенія уравненія Риккати, а именно: когда прямолинейныя образующія линейчатой поверхности принадлежатъ линейному комплексу; тогда функціи α, β, γ, ξ, η, ζ параметра v тождественно удовлетворяютъ уравненію вида:

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P_1(\eta\gamma - \zeta\beta) + Q_1(\zeta\alpha - \xi\gamma) + R_1(\xi\beta - \eta\alpha) = 0,$$

гдѣ L, M, N, P_1, Q_1, R_1 — постоянные коэффиціенты, и, какъ показалъ *Picard* [3]), исходя изъ послѣдняго уравненія, непосредственно можно найти одну ассимптотическую линію, которая пересѣкаетъ каждую прямолинейную образующую въ двухъ точкахъ, и, слѣдовательно, равносильна двумъ ассимптотическимъ линіямъ; въ этомъ случаѣ всѣ остальныя ассимптотическія линіи поверхности получаются посредствомъ одной квадратуры.

---

[1]) Этотъ результатъ впервые былъ полученъ *Bonnet* (по словамъ *Picard*'а).

[2]) Эту теорему доказалъ геометрически *Serret* въ сочиненіи: „Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure.“ Paris, 1860 p. 169.

[3]) *Picard*.—„Application de la théorie etc.“ loc. cit.

Клебшъ инымъ способомъ рѣшаетъ задачу изысканія ассимптотическихъ линій линейчатыхъ поверхностей [1]).

§ 6. Изысканіе на данной развертывающейся поверхности кривыхъ, всѣ касательныя къ которымъ пересѣкаютъ заданную кривую линію въ пространствѣ [2]).

Намѣченная задача рѣшается косвеннымъ путемъ посредствомъ теоріи *конгруэнцій*.

Разсмотримъ предварительно нѣкоторыя свойства т. н. *линейныхъ конгруэнцій*, на которыхъ будетъ основано рѣшеніе интересующей насъ задачи.

Пусть даны два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} F = Ax+By+Cz+D = 0 \\ F_1 = A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{22}$$

гдѣ $A, B, \ldots\ldots D_1$ — функціи двухъ перемѣнныхъ параметровъ: a и b. Совокупность всѣхъ прямыхъ, представляемыхъ этими уравненіями при всевозможныхъ значеніяхъ a и b, называется *линейною конгруэнціею* (по *Plücker*'у). Черезъ всякую точку пространства проходитъ вообще конечное число прямыхъ конгруэнціи; черезъ нѣкоторыя точки, играющія роль особенныхъ, можетъ проходить безчисленное множество прямыхъ конгруэнціи.

Устанавливая между a и b какую-нибудь зависимость вида:

$$b = \varphi(a),$$

мы выдѣлимъ изъ конгруэнціи систему прямыхъ, образующихъ сплошную линейчатую поверхность, т. н. *поверхность конгруэнціи*. Уравненіе касательной плоскости къ этой поверхности въ какой-нибудь ея точкѣ (x, y, z) есть:

$$\frac{Adx+Bdy+Cdz}{A_1dx+B_1dy+C_1dz} =$$

$$= \frac{\left[\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial A}{\partial b}\varphi'(a)\right]x+\left[\frac{\partial B}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}\varphi'(a)\right]y+\left[\frac{\partial C}{\partial a}+\frac{\partial C}{\partial b}\varphi'(a)\right]z+\frac{\partial D}{\partial a}+\frac{\partial D}{\partial b}\varphi'(a)}{\left[\frac{\partial A_1}{\partial a}+\frac{\partial A_1}{\partial b}\varphi'(a)\right]x+\left[\frac{\partial B_1}{\partial a}+\frac{\partial B_1}{\partial b}\varphi'(a)\right]y+\left[\frac{\partial C_1}{\partial a}+\frac{\partial C_1}{\partial b}\varphi'(a)\right]z+\frac{\partial D_1}{\partial a}+\frac{\partial D_1}{\partial b}\varphi'(a)}.$$

---

[1]) *A. Clebsch.*—„Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen. Crel. 7. 1868. LXVIII p. 151—161.

[2]) *Darboux*.—Leçons etc. t. II, 1889, стр. 1 и слѣд.

На какой-нибудь прямой L конгруэнціи отмѣтимъ тѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію:

$$(23)\qquad \frac{\frac{\partial A}{\partial a}x+\frac{\partial B}{\partial a}y+\frac{\partial C}{\partial a}z+\frac{\partial D}{\partial a}}{\frac{\partial A_1}{\partial a}x+\frac{\partial B_1}{\partial a}y+\frac{\partial C_1}{\partial a}z+\frac{\partial D_1}{\partial a}}=\frac{\frac{\partial A}{\partial b}x+\frac{\partial B}{\partial b}y+\frac{\partial C}{\partial b}z+\frac{\partial D}{\partial b}}{\frac{\partial A_1}{\partial b}x+\frac{\partial B_1}{\partial b}y+\frac{\partial C_1}{\partial b}z+\frac{\partial D_1}{\partial b}};$$

число такихъ точекъ, очевидно, равно двумъ; будемъ эти точки называть *фокальными точками* прямой L. Для всѣхъ поверхностей конгруэнціи, содержащихъ прямую L, уравненіе касательной плоскости въ фокальныхъ точкахъ этой прямой имѣетъ видъ:

$$\frac{Adx+Bdy+Cdz}{A_1dx+B_1dy+C_1dz}=\frac{\frac{\partial A}{\partial a}x+\frac{\partial B}{\partial a}y+\frac{\partial C}{\partial a}z+\frac{\partial D}{\partial a}}{\frac{\partial A_1}{\partial a}x+\frac{\partial B_1}{\partial a}y+\frac{\partial C_1}{\partial a}z+\frac{\partial D_1}{\partial a}},$$

слѣдовательно всѣ поверхности конгруэнціи, содержащія прямую L, имѣютъ въ каждой изъ двухъ ея фокальныхъ точекъ общую касательную плоскость. Исключая a и b изъ уравненій (22) и (23), получимъ уравненіе геометрическаго мѣста фокальныхъ точекъ всѣхъ прямыхъ конгруэнціи; это геометрическое мѣсто будетъ нѣкоторою поверхностью, которую будемъ называть *фокальною поверхностью конгруэнціи;* фокальная поверхность линейной конгруэнціи состоитъ изъ двухъ полостей, соотвѣтствующихъ двумъ фокальнымъ точкамъ каждой прямой конгруэнціи; одна или обѣ полости могутъ обратиться въ частномъ случаѣ въ линію или точку.

Докажемъ, что каждая прямая L конгруэнціи касается фокальной поверхности въ своихъ фокальныхъ точкахъ, и что всѣ поверхности конгруэнціи, содержащія эту прямую, касаются фокальной поверхности въ тѣхъ же точкахъ, слѣдовательно, касаются и между собою въ этихъ точкахъ. Для этого представимъ уравненіе (23) въ видѣ слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$(24)\qquad \begin{cases}\left(\frac{\partial A}{\partial a}x+\frac{\partial B}{\partial a}y+\frac{\partial C}{\partial a}z+\frac{\partial D}{\partial a}\right)-k\left(\frac{\partial A_1}{\partial a}x+\frac{\partial B_1}{\partial a}y+\frac{\partial C_1}{\partial a}z+\frac{\partial D_1}{\partial a}\right)=0\\ \left(\frac{\partial A}{\partial b}x+\frac{\partial B}{\partial b}y+\frac{\partial C}{\partial b}z+\frac{\partial D}{\partial b}\right)-k\left(\frac{\partial A_1}{\partial b}x+\frac{\partial B_1}{\partial b}y+\frac{\partial C_1}{\partial b}z+\frac{\partial D_1}{\partial b}\right)=0,\end{cases}$$

введя произвольный коэффиціентъ пропорціональности k; тогда уравненіе касательной плоскости къ поверхности конгруэнціи въ одной изъ фокальныхъ точекъ прямой L будетъ:

$$(A-kA_1)\,dx+(B-kB_1)\,dy+(C-kC_1)\,dz=0. \tag{25}$$

Чтобы получить уравненіе фокальной поверхности, нужно изъ уравненій (22) и (23) исключить a, b, k, или, что все равно, считать въ этихъ уравненіяхъ a, b, k нѣкоторыми функціями отъ x, y, z. Для полученія уравненія касательной плоскости къ фокальной поверхности въ фокальной точкѣ прямой L нужно дифференцировать уравненія (22) и (24), считая въ нихъ a, b, k — перемѣнными. Если на основаніи уравненій (22) составимъ уравненіе:

$$dF-kdF_1=0$$

и замѣтимъ, что члены, содержащіе da и db, исчезаютъ въ немъ на основаніи уравненій (24), то это уравненіе совпадетъ съ уравненіемъ (25), чѣмъ требуемое и доказано.

Всегда (притомъ безчисленнымъ множествомъ способовъ) можно опредѣлить зависимость между b и a такъ, чтобы соотвѣтствующая линейчатая поверхность конгруэнціи была развертывающаяся, т. е. такъ, чтобы всѣ прямыя конгруэнціи, соотвѣтствующія этой зависимости, касались нѣкоторой кривой (ребра возврата упомянутой поверхности). Для этого будемъ пока считать b неопредѣленною функціею a, и въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравненія (22) по независимому параметру a; получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial A}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}\right)x+\left(\frac{\partial B}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}\right)y+\left(\frac{\partial C}{\partial a}+\frac{\partial C}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}\right)z+\frac{\partial D}{\partial a}+\frac{\partial D}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}=0\\
&\left(\frac{\partial A_1}{\partial a}+\frac{\partial A_1}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}\right)x+\left(\frac{\partial B_1}{\partial a}+\frac{\partial B_1}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}\right)y+\left(\frac{\partial C_1}{\partial a}+\frac{\partial C_1}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}\right)z+\frac{\partial D_1}{\partial a}+\frac{\partial D_1}{\partial b}\cdot\frac{db}{da}=0
\end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Эти уравненія должны существовать совмѣстно съ уравненіями (22) для того, чтобы соотвѣтствующія прямыя конгруэнціи образовали развертывающуюся поверхность; исключая изъ четырехъ уравненій (22) и (26) x, y, z, получимъ искомую зависимость между b и a въ видѣ:

$$f\left(a,\, b,\, \frac{db}{da}\right)=0,$$

. . . .

такъ что вообще задача группировки прямыхъ конгруэнціи въ развертывающіяся поверхности требуетъ интегрированія нѣкотораго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка; присутствіе произвольной постоянной въ общемъ интегралѣ этого уравненія доказываетъ, что эта задача можетъ быть выполнена безчисленнымъ множествомъ способовъ.

Замѣтимъ, что уравненіе (23) получается, какъ результатъ исключенія $\frac{db}{da}$ изъ уравненій (26), слѣдовательно, какова бы ни была искомая зависимость между b и a, какова бы, стало быть, ни была образуемая прямыми конгруэнціи развертывающаяся поверхность, ребро возврата послѣдней непремѣнно должно лежать на той или другой полости фокальной поверхности.

Каждая прямая L конгруэнціи можетъ принадлежать только двумъ развертывающимся поверхностямъ конгруэнціи; дѣйствительно, если фокальныя точки прямой L обозначимъ черезъ λ и λ', то заключимъ, что прямая L принадлежитъ: 1) той развертывающейся поверхности конгруэнціи, ребро возврата которой лежитъ на первой полости фокальной поверхности и касается прямой L въ точкѣ λ, и 2) той развертывающейся поверхности конгруэнціи, ребро возврата которой лежитъ на второй полости фокальной поверхности и касается прямой L въ точкѣ λ'. Такъ какъ каждая прямая конгруэнціи принадлежитъ двумъ и только двумъ развертывающимся поверхностямъ, образованнымъ изъ прямыхъ конгруэнціи, то можемъ утверждать, что всѣ прямыя конгруэнціи могутъ быть сгруппированы въ систему развертывающихся поверхностей двоякимъ способомъ, или, иначе, что линейная конгруэнція содержитъ двѣ системы развертывающихся поверхностей.

Чтобы перейти къ нашей спеціальной задачѣ, мы предположимъ, что одна полость фокальной поверхности, нпр. первая, сводится къ кривой линіи, которую будемъ называть *фокальною кривою;* такимъ образомъ разсматриваемъ случай, когда фокальная поверхность состоитъ изъ фокальной кривой и однополой поверхности. Система развертывающихся поверхностей, которыя имѣли бы ребро возврата на первой полости фокальной поверхности, сводится теперь къ системѣ коническихъ поверхностей, имѣющихъ вершины на фокальной кривой и касающихся однополой части фокальной поверхности. Такъ какъ конгруэнція линейная, то, по основному свойству такихъ конгруэнцій, всѣ прямыя конгруэнціи, проходящія черезъ какую-нибудь точку фокальной кривой, лежатъ на одной плоскости, слѣдовательно коническія поверхности въ данномъ случаѣ суть плоскости; при перемѣщеніи центра плоскаго пучка по фокальной кривой эта плоскость огибаетъ вторую полость фокальной поверхности, слѣдовательно вторая полость фокальной поверхности есть развертывающаяся поверхность.

Разыщемъ теперь систему развертывающихся поверхностей, ребро возврата которыхъ лежитъ на второй полости фокальной поверхности. Представимъ уравненіе фокальной кривой въ видѣ:

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z). \tag{27}$$

Уравненіе прямой конгруэнціи можемъ написать въ формѣ:

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= \lambda(\zeta - z) \\ \eta - y &= \mu(\zeta - z) \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

гдѣ ξ, η, ζ — текущія координаты, а μ и λ — произвольные параметры, связанные условіемъ вида:

$$\alpha\mu + \beta\lambda + \gamma = 0,$$

характеризующимъ линейную конгруэнцію; α, β и γ — нѣкоторыя функціи отъ z. На основаніи послѣдняго соотношенія можемъ считать λ произвольною функціею отъ z, а μ — опредѣленною функціею отъ λ и z:

$$\mu = M\lambda + N,$$

гдѣ обозначено:

$$M = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad N = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Дадимъ z безконечно малое приращеніе dz; тогда x и y получатъ безконечно малыя приращенія dx и dy, λ — получитъ нѣкоторое безконечно малое приращеніе $d\lambda$, а μ получитъ приращеніе $d\mu$, равное:

$$d\mu = M d\lambda + (M'\lambda + N')\,dz,$$

гдѣ обозначено:

$$M' = \frac{dM}{dz}, \quad N' = \frac{dN}{dz}.$$

Вмѣсто прямой (28) получимъ смежную прямую:

$$(29)\quad \begin{cases} \xi - x - dx = \lambda(\zeta - z - dz) + (\zeta - z)\,d\lambda \\ \eta - y - dy = \mu(\zeta - z - dz) + (\zeta - z)\,d\mu \end{cases}.$$

Опредѣлимъ λ въ функціи z такъ, чтобы прямыя (28) образовали развертывающуюся поверхность; для этого необходимо, чтобы уравненія (28) и (29) могли существовать совмѣстно. Если бы мы въ этихъ уравненіяхъ замѣнили μ его выраженіемъ черезъ λ и z, затѣмъ исключили λ и изъ оставшихся трехъ уравненій опредѣлили ξ, η, ζ, то мы получили бы координаты текущей точки ребра возврата развертывающейся поверхности. Такъ какъ уравненія (28) и (29) должны существовать совмѣстно, то должно также существовать уравненіе, получающееся въ результатѣ исключенія ξ, η, ζ изъ этихъ уравненій. Вычитывая первое уравненіе (28) изъ перваго (29) и второе (28) изъ второго (29), получимъ:

$$dx + (\zeta - z)\,d\lambda - \lambda dz = 0,$$

$$dy + (\zeta - z)\,d\mu - \mu dz = 0;$$

исключая отсюда еще ζ, получимъ:

$$(30)\qquad (dx - \lambda dz)\,d\mu = (dy - \mu dz)\,d\lambda.$$

(Уравненіе (30), очевидно, удовлетворяется, если примемъ:

$$dx = 0,\ dy = 0,\ dz = 0,$$

т. е.

$$x = C_1,\ y = C_2,\ z = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — какія-нибудь постоянныя, что соотвѣтствуетъ плоскому пучку прямыхъ конгруэнціи, проходящихъ черезъ какую-нибудь точку фокальной кривой; эта система отмѣчена нами à priori).

На основаніи выраженія для $d\mu$, представимъ уравненіе (30) въ видѣ:

$$Mdx\,d\lambda + (M'\lambda + N')\,dx\,dz - (M'\lambda + N')\,\lambda\,dz^2 - dy\,d\lambda + Ndz\,d\lambda = 0;$$

раздѣляя всѣ члены этого уравненія на $(dz)^2$ и обозначая:

$$\frac{M'}{M\varphi' + N - \psi'} = -P,\ \frac{PN'\varphi'}{M'} = -R,\ P\varphi' + \frac{R}{\varphi'} = -Q,$$

гдѣ:

$$\varphi' = \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{dx}{dz},\quad \psi' = \frac{d\psi(z)}{dz} = \frac{dy}{dz},$$

получимъ уравненіе Риккати:

$$\frac{d\lambda}{dz}+P\lambda^2+Q\lambda+R=0,$$

такъ что λ есть функція Риккати отъ z.

Замѣтимъ, что прямыя конгруэнціи, пересѣкающія фокальную кривую, суть касательныя кривыхъ, служащихъ ребрами возврата второй системы развертывающихся поверхностей; всѣ эти кривыя лежатъ на однополой фокальной поверхности, которая, въ свою очередь, есть развертывающаяся поверхность. Поэтому мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе: изысканіе всѣхъ кривыхъ, лежащихъ на данной развертывающейся поверхности, касательныя къ которымъ пересѣкаютъ данную кривую, сводится къ интегрированію уравненія Риккати (данную кривую слѣдуетъ принять за фокальную кривую, данную поверхность за полость фокальной поверхности, тогда касательныя къ искомымъ кривымъ составятъ линейную конгруэнцію). Зная одну, двѣ, три кривыя, найдемъ всѣ остальныя соотвѣтственно посредствомъ двухъ квадратуръ, одной квадратуры, безъ квадратуръ.

Въ двухъ случаяхъ одна изъ искомыхъ кривыхъ заранѣе извѣстна, а именно: 1) когда данная (т. е. фокальная) кривая плоская, то сѣченіе данной (т. е. фокальной) развертывающейся поверхности плоскостью этой кривой даетъ одно рѣшеніе нашей задачи; 2) когда данная кривая какая-нибудь, но данная развертывающаяся поверхность есть коническая, то частнымъ рѣшеніемъ задачи будетъ пересѣченіе данной конической поверхности съ другою конической поверхностью, имѣющею ту же вершину, что и данная, и за направляющую — данную кривую. Въ этихъ двухъ частныхъ случаяхъ можно посредствомъ двухъ квадратуръ найти всѣ искомыя кривыя.

§ 7. Аналитическое опредѣленіе линій кривизны поверхности, обертывающей систему сферъ [1]).

Уравненіе:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0, \tag{31}$$

[1]) *Picard*, Application etc. loc. cit. § 23 стр. 361 и слѣд.

отнесенное къ какой-нибудь системѣ прямоугольныхъ осей координатъ, представляетъ сферу съ центромъ въ точкѣ (a, b, c) и съ радіусомъ, равнымъ R. Если въ уравненіи (31) считать a, b, c, R функціями нѣкотораго перемѣннаго параметра t, то оно представитъ систему сферъ, обертываемыхъ нѣкоторою поверхностью. Характеристики поверхности, которыя въ этомъ случаѣ будутъ и ея линіями кривизны, опредѣляются уравненіемъ (31) совмѣстно съ уравненіемъ (32):

$$(32) \qquad (x-a)\frac{da}{dt}+(y-b)\frac{db}{dt}+(z-c)\frac{dc}{dt}+R\frac{dR}{dt}=0.$$

Такъ какъ уравненіе (32) есть уравненіе подвижной плоскости, то заключаемъ, что совокупность уравненій (31) и (32) опредѣляетъ систему окружностей.

Пусть будетъ (x, y, z) какая-нибудь точка на огибаемой поверхности. Уравненія нормали къ поверхности въ этой точкѣ суть:

$$\frac{X-x}{x-a}=\frac{Y-y}{y-b}=\frac{Z-z}{z-c}$$

или:

$$(33) \qquad \begin{cases} X=Z\dfrac{x-a}{z-c}+\dfrac{az-cx}{z-c} \\ Y=Z\dfrac{y-b}{z-c}+\dfrac{bz-cy}{z-c}, \end{cases}$$

гдѣ X, Y, Z—текущія координаты нормали. Въ точкѣ $(x+dx, y+dy, z+dz)$ поверхности нормаль къ послѣдней представится уравненіями:

$$(34) \qquad \begin{cases} X=Z\left[\dfrac{x-a}{z-c}+d\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right)\right]+\dfrac{az-cx}{z-c}+d\left(\dfrac{az-cx}{z-c}\right) \\ Y=Z\left[\dfrac{y-b}{z-c}+d\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)\right]+\dfrac{bz-cy}{z-c}+d\left(\dfrac{bz-cy}{z-c}\right). \end{cases}$$

Если нормали (33) и (34) взаимно пересѣкаются, то должна удовлетворяться зависимость:

$$d\left(\frac{x-a}{z-c}\right).\,d\left(\frac{bz-cy}{z-c}\right)=d\left(\frac{y-b}{z-c}\right).\,d\left(\frac{az-cx}{z-c}\right),$$

характеризующая линіи кривизны. Послѣдняя зависимость можетъ быть представлена въ видѣ:

$$[(z-c)\,d(y-b)-(y-b)\,d(z-c)]\,da+[(x-a)\,d(z-c)-(z-c)\,d(x-a)]\,db+$$
$$+[(y-b)\,d(x-a)-(x-a)\,d(y-b)]\,dc=0. \qquad (35)$$

На основаніи совмѣстныхъ уравненій (31), (32) и (35) можно выразить координаты x, y, z точекъ линій кривизны въ функціи параметра t.

Если мы, далѣе, въ нѣкоторой плоскости:

$$Ax+By+Cz=0$$

вообразимъ окружность радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ, то, называя черезъ θ уголъ, образуемый радіусомъ окружности, идущимъ въ точку (x, y, z), съ прямою:

$$Ax+By=0,$$

лежащею на пересѣченіи плоскости круга съ плоскостью xy, получимъ для координатъ точки окружности слѣдующія выраженія:

$$x=-\frac{ACr\sin\theta}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}+\frac{Br\cos\theta}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$y=-\frac{BCr\sin\theta}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}-\frac{Ar\cos\theta}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$z=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}\cdot r\sin\theta.$$

Чтобы примѣнить эти формулы къ случаю, соотвѣтствующему нашей задачѣ, когда плоскость круга есть плоскость (32), а окружность опредѣляется уравненіями (31) и (32), мы должны за координаты центра окружности принять выраженія:

$$x=a-\frac{R\,dR\,da}{da^2+db^2+dc^2}$$

$$y=b-\frac{R\,dR\,db}{da^2+db^2+dc^2}$$

$$z=c-\frac{R\,dR\,dc}{da^2+db^2+dc^2},$$

радіусъ r окружности мы должны опредѣлить по формулѣ:

$$r^2=R^2-\frac{R^2\,(dR)^2}{da^2+db^2+dc^2},$$

и положить:

$$A = da,\ B = db,\ C = dc;$$

поэтому, считая θ угломъ между радіусомъ, идущимъ въ точку (x, y, z) окружности, и прямою, проведенною въ плоскости окружности (31, 32) черезъ центръ послѣдней параллельно плоскости xy, найдемъ слѣдующія выраженія для координатъ точекъ окружности (31, 32):

$$x = a - \frac{R\,dR\,da}{da^2+db^2+dc^2} - \frac{da\,dc\,r\sin\theta}{\sqrt{(da^2+db^2)(da^2+db^2+dc^2)}} + \frac{db\cdot r\cos\theta}{\sqrt{da^2+db^2}}$$

$$y = b - \frac{R\,dR\,db}{da^2+db^2+dc^2} - \frac{db\,dc\,r\sin\theta}{\sqrt{(da^2+db^2)(da^2+db^2+dc^2)}} + \frac{da.r\cos\theta}{\sqrt{da^2+db^2}}$$

$$z = c - \frac{R\,dR\,dc}{da^2+db^2+dc^2} + \sqrt{\frac{da^2+db^2}{da^2+db^2+dc^2}}\cdot r\sin\theta.$$

Замѣнивъ въ уравненіи (35) x, y, z полученными выраженіями, мы найдемъ дифференціальную зависимость между θ и t, которую можно разсматривать, какъ дифференціальное уравненіе второй системы линій кривизны; произведя указанную замѣну, получимъ послѣ упрощеній уравненіе вида:

$$S\frac{d\theta}{dt} + T\sin\theta + U\cos\theta + V = 0,$$

гдѣ S, T, U, V—функціи t; подстановкою:

$$tg\,\frac{\theta}{2} = u \text{ [1]}$$

приведемъ это уравненіе къ уравненію Риккати:

$$2\,S\frac{du}{dt} + 2Tu + U(1-u^2) + V(1+u^2) = 0.$$

Взявъ какіе-нибудь четыре интеграла этого уравненія и назвавъ соотвѣтствующія имъ значенія θ черезъ: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, легко получимъ, какъ въ § 1:

$$\frac{\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}} : \frac{\sin\frac{\theta_1-\theta_4}{2}}{\sin\frac{\theta_3-\theta_4}{2}} = const.,$$

---

[1]) См. конецъ § 1 гл. I ч. III.

откуда заключаемъ, что 4 точки пересѣченія произвольной окружности первой системы линій кривизны какими-либо четырьмя линіями кривизны второй системы находятся въ постоянномъ ангармоническомъ отношеніи.

Существуетъ цѣлый классъ поверхностей, имѣющихъ одну циклическую систему линій кривизны, для которыхъ извѣстна à priori одна линія кривизны второй системы; сюда относятся поверхности, обертывающія систему шаровъ, которые пересѣкаютъ данную сферу подъ постояннымъ угломъ. Подвижная сфера пересѣкаетъ данную неподвижную сферу по системѣ окружностей; обертка этихъ окружностей есть линія кривизны неподвижной сферы, пересѣкающей огибаемую поверхность подъ постояннымъ угломъ; отсюда заключаемъ, на основаніи теоремы *Іоахимсталя* [1]), что эта обертка есть линія кривизны самой огибаемой поверхности; такъ какъ она пересѣкаетъ каждую окружность первой системы линій кривизны въ двухъ точкахъ, то она равносильна двумъ отдѣльнымъ линіямъ кривизны такъ что всѣ остальныя линіи кривизны второй системы для разсматриваемаго класса поверхностей найдутся при посредствѣ одной квадратуры.

§ 8. Къ вопросу объ отображеніи трехоснаго эллипсоида на плоскости [2]).

Изъ общаго Гауссова рѣшенія задачи объ отображеніи поверхностей на плоскости и на другихъ поверхностяхъ [3]) слѣдуетъ, что задача отображенія эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{36}$$

на плоскости съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ элементахъ сводится къ опредѣленію на эллипсоидѣ системы мнимыхъ кривыхъ, опредѣляемыхъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

---

[1]) См. *Picard*, loc. cit.

[2]) *Weyr*, loc. cit.

[3]) По словамъ *Вейра*.

(37) $$dx^2+dy^2+dz^2=0$$ [1]).

Кривыя эти названы *циклическими;* это названіе объясняется ихъ характеристическимъ свойствомъ, состоящимъ въ томъ, что всѣ касательныя къ этимъ кривымъ встрѣчаютъ окружность мнимаго безконечно удаленнаго круга [2]). Черезъ каждую точку поверхности эллипсоида проходятъ 2 циклическія линіи, соотвѣтственно двумъ касательнымъ, которыя можно провести изъ этой точки къ окружности мнимаго безконечно удаленнаго круга. Пусть будетъ A какая-нибудь точка этой окружности, и a — полярная плоскость точки A относительно эллипсоида; пусть плоскость a пересѣкаетъ эллипсоидъ по кривой α. Касательныя къ циклическимъ кривымъ одной системы въ точкахъ ихъ пересѣченія съ кривою α параллельны между собою, потому что онѣ всѣ направлены въ безконечно удаленную точку A. Если заставимъ точку A описать всю мнимую окружность, то плоскость a обогнетъ нѣкоторую коническую поверхность второго порядка съ вершиною въ центрѣ эллипсоида.

Координаты x, y, z точки A удовлетворяютъ уравненію [3]).

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

или:

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=0.$$

Положимъ:

$$\frac{y}{x}=\lambda,$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{z}{x}=i\sqrt{1+\lambda^2},$$

т. е.

(38) $$x:y:z=1:\lambda:i\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Уравненіе плоскости a можемъ написать въ видѣ:

---

[1]) См. *Schering.*—„Conforme Abbildung des Ellipsoides auf der Ebene". 1858.

[2]) Извѣстно, что всѣ сферическія поверхности въ пространствѣ пересѣкаются безконечно удаленною плоскостью по одной и той же мнимой окружности (нѣм. *imaginäre Kugelkreis*). См. *Clebsch.*—„Vorlesungen über Geometrie", Leipzig, (Teubner); т. II. стр. 182.

[3]) См. *Clebsch*, loc. cit.

$$\frac{x}{a}+\lambda\frac{y}{b}+i\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\frac{z}{c}=0,$$

такъ что каждому значенію параметра λ соотвѣтствуетъ опредѣленная кривая α. Проведемъ затѣмъ черезъ ось z плоскость:

$$y=\mu x; \tag{39}$$

мѣняя параметръ μ, мы получимъ другую систему плоскостей, изъ которыхъ каждая пересѣкаетъ эллипсоидъ по нѣкоторой опредѣленной кривой. Ясно, что параметры μ и λ можемъ считать криволинейными координатами точекъ на эллипсоидѣ; каждая зависимость между μ и λ опредѣляетъ на эллипсоидѣ нѣкоторую кривую линію. Найдемъ, какова должна быть зависимость между μ и λ для того, чтобы она опредѣляла циклическія линіи эллипсоида.

Пусть значенію параметра $\lambda+d\lambda$ соотвѣтствуетъ плоскость a, и кривая α'. На кривой α отмѣтимъ произвольныя 4 точки: P_1, P_2, P_3, P_4; какъ было замѣчено, циклическія линіи одной системы, проходящія черезъ эти точки, имѣютъ въ этихъ точкахъ параллельныя касательныя. Положимъ что эти циклическія линіи встрѣчаютъ кривую α' соотвѣтственно въ точкахъ: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, тогда элементы циклическихъ линій: P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, совпадающіе съ соотвѣтствующими элементами касательныхъ къ нимъ, будутъ параллельны между собою. Пусть центръ эллипсоида (совпадающій съ началомъ координатъ) будетъ O; тогда легко замѣтимъ, что ангармоническое отношеніе пучка прямыхъ OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 равно ангармоническому отношенію пучка: OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4, и, слѣдовательно, ангармоническое отношеніе пучка плоскостей, проведенныхъ черезъ ось z и точки P_1, P_2, P_3, P_4, равно ангармоническому отношенію пучка плоскостей, проведенныхъ черезъ ось z и точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Можемъ на основаніи этого утверждать, что ангармоническое отношеніе значеній μ для точекъ P таково же, какъ и для точекъ Q; отсюда вытекаетъ, что отношеніе:

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2}:\frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2}$$

не мѣняется, когда четыре точки (λ, μ_1), (λ, μ_2), (λ, μ_3), (λ, μ_4) перемѣщаются по циклическимъ линіямъ эллипсоида одной системы, оставаясь одновременно (т. е. при одномъ значеніи λ) въ одной плоскости. Это постоянство ангармоническаго отношенія характеристично для функцій Риккати, поэтому заключаемъ, что дифференціальное уравненіе циклическихъ линій эллипсоида имѣетъ видъ:

$$\frac{d\mu}{d\lambda}+L\mu^2+M\mu+N=0,$$

гдѣ L, M, N — нѣкоторыя функціи λ; ихъ можно вычислить на основаніи уравненія (37), вставляя въ него на мѣсто x, y, z ихъ выраженія через μ и λ, опредѣляемыя изъ уравненій (36), (38) и (39).

Заранѣе извѣстно одно частное рѣшеніе нашей задачи, а именно: циклическою линіею служитъ, очевидно, линія, по которой эллипсоидъ касается развертывающейся линейчатой поверхности, проходящей черезъ вышеупомянутую мнимую безконечно удаленную окружность; поэтому всѣ циклическія линіи трехоснаго эллипсоида могутъ быть найдены посредствомъ двухъ квадратуръ.

ГЛАВА III.

Приложеніе уравненія Риккати къ механикѣ.

§ 1. Опредѣленіе движенія твердаго тѣла около неподвижной точки по проекціямъ угловой скорости, заданнымъ въ функціи времени.

Положеніе точекъ твердаго тѣла отнесемъ къ системѣ неподвижныхъ въ пространствѣ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатныхъ осей ξ, η, ζ съ началомъ въ неподвижной точкѣ O твердаго тѣла; выберемъ, кромѣ того, систему прямоугольныхъ осей x, y, z съ тѣмъ же началомъ, неизмѣнно связанныхъ съ движущимся тѣломъ; положеніе твердаго тѣла опредѣляется вполнѣ 9 косинусами угловъ, образуемыхъ осями x, y, z съ осями ξ, η, ζ (извѣстно, что только 3 изъ этихъ косинусовъ независимы); пусть эти косинусы будутъ слѣдующіе:

	x	y	z
ξ	a	b	c
η	a'	b'	c'
ζ	a''	b''	c''

Въ теченіе каждаго безконечно малаго промежутка времени движеніе твердаго тѣла происходитъ такъ, какъ будто бы оно вращалось около нѣкоторой т. н. мгновенной оси, проходящей черезъ точку O; на этой оси откладывается въ извѣстномъ направленіи векторъ, изображающій угловую скорость твердаго тѣла въ данный моментъ; проекціи этого вектора на оси x, y, z пусть будутъ: p, q, r (p, q, r — функціи времени); задача наша состоитъ въ опредѣленіи $a, a', \ldots.. c''$ по заданнымъ въ функціи времени p, q, r.

Разсмотримъ точку A неподвижной оси ξ, лежащую въ разстояніи $OA = 1$ отъ начала. Точка эта неподвижна, поэтому проекціи ея скорости на какія угодно оси равны нулю. Но по отношенію къ осямъ x, y, z точка A обладаетъ нѣкоторою скоростью, составленною изъ поступательной и угловой; проекціи поступательной скорости на координатныя оси x, y, z равны производнымъ соотвѣтствующихъ координатъ по времени; проекціи же угловой скорости составляются по формуламъ Эйлера:

$$v_x = qz - ry$$

$$v_y = rx - pz$$

$$v_z = py - qx.$$

Такъ какъ координаты точки A въ системѣ (x, y, z) суть, очевидно: a, b, c, то на основаніи сказаннаго будемъ имѣть:

$$\frac{da}{dt} + cq - br = 0$$

$$\frac{db}{dt} + ar - cp = 0$$

$$\frac{dc}{dt} + bp - aq = 0$$

или:

$$\frac{da}{dt} = br - cq$$

$$\frac{db}{dt} = cp - ar$$

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp.$$

По аналогіи можемъ написать:

$$\frac{da'}{dt} = b'r - c'q$$

$$\frac{db'}{dt} = c'p - a'r$$

$$\frac{dc'}{dt} = a'q - b'p$$

и

$$\frac{da''}{dt} = b''r - c''q$$

$$\frac{db''}{dt} = c''p - a''r$$

$$\frac{dc''}{dt} = a''q - b''p.$$

Каждая изъ группъ косинусовъ (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') является такимъ образомъ интегральною системою уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \beta r - \gamma q \\ \frac{d\beta}{dt} &= \gamma p - \alpha r \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \alpha q - \beta p \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Задача наша сводится такимъ образомъ къ интегрированію системы (1); такъ какъ эта система имѣетъ интегралъ вида:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

то мы можемъ къ этой системѣ примѣнить методъ, изложенный въ § 4 гл. I ч. III, т. е. привести интегрированіе системы (1) къ интегрированію уравненія Риккати съ двумя его частными интегралами, извѣстными заранѣе; останется выполнить одну квадратуру. Произвольное постоянное интеграціи опредѣлится на основаніи начальныхъ условій движенія.

§ 2. Опредѣленіе движенія твердаго тѣла около неподвижной точки по заданнымъ двумъ зависимостямъ между проекціями угловой скорости.

Пусть между проекціями p, q, r угловой скорости твердаго тѣла на оси x, y, z даны двѣ зависимости:

(2) $$f_1(p, q, r)=0,\ f_2(p, q, r)=0;$$

по этимъ даннымъ требуется найти выраженія 9-ти косинусовъ въ функціи времени.

Выразимъ 3 косинуса: a, b, c черезъ x, y по формуламъ (26) гл. I; получимъ:

(3) $$a=\frac{1-xy}{x-y},\ b=i\frac{1+xy}{x-y},\ c=\frac{x+y}{x-y},$$

причемъ x и y мнимы и имѣютъ видъ:

(4) $$x=m+ni,\quad y=-\frac{1}{m-ni}.$$

Выраженія (4) должны удовлетворять уравненію Риккати (27) гл. I, которое въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ:

$$\frac{du}{dt}-\frac{q+ip}{2}u^2+iru-\frac{q-ip}{2}=0;$$

вставляя выраженіе x въ это уравненіе и приравнивая нулю отдѣльно дѣйствительную часть, отдѣльно коэффиціентъ при мнимой единицѣ, получимъ:

(5) $$\begin{cases}\dfrac{dm}{dt}-rn-\frac{1}{2}q(1+m^2-n^2)+pmn=0\\[2mm] \dfrac{dn}{dt}+rm+\frac{1}{2}p(1-m^2+n^2)-qmn=0.\end{cases}$$

Исключая изъ уравненій (2) и (5) p, q, r, получимъ дифференціальную зависимость между m, n и t вида:

$$F\left(m, n, \frac{dm}{dt}, \frac{dn}{dt}\right)=0,$$

изъ которой опредѣлимъ посредствомъ одной квадратуры t въ функціи m и n, считая n произвольною функціею m; въ томъ же предположеніи мы затѣмъ по формуламъ (4) и (3) опредѣлимъ косинусы a b, c въ функціи времени; вторая квадратура дастъ остальные 6 косинусовъ.

§ 3. Опредѣленіе движенія твердаго тѣла около неподвижной точки, если это движеніе опредѣляется двумя перемѣнными параметрами.

Пусть движеніе твердаго тѣла около неподвижной точки происходитъ въ зависимости отъ двухъ параметровъ u и v, измѣняющихся со временемъ, такъ что неизвѣстные косинусы суть функціи этихъ двухъ параметровъ. Положимъ, что при постоянномъ v и при измѣненіи одного параметра u проекціи скорости выражаются, какъ функціи p, q, r отъ u, а при постоянномъ u и при измѣненіи v — проекціи скорости суть: p_1, q_1, r_1 — функціи отъ v; тогда аналогично § 1 будемъ имѣть двѣ системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial u}&=\beta r-\gamma q\\ \frac{\partial\beta}{\partial u}&=\gamma p-\alpha r\\ \frac{\partial\gamma}{\partial u}&=\alpha q-\beta p\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial v}&=\beta r_1-\gamma q_1\\ \frac{\partial\beta}{\partial v}&=\gamma p_1-\alpha r_1\\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}&=\alpha q_1-\beta p_1\end{aligned}\right\}.\tag{7}$$

Замѣтивъ соотношенія:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\partial\beta}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial\gamma}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\gamma}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

получимъ на основаніи уравненій (6) и (7):

$$\frac{d\alpha}{dt}=\beta R-\gamma Q$$

$$\frac{d\beta}{dt}=\gamma P-\alpha R$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\alpha Q-\beta P,$$

гдѣ обозначено:

$$P = p\frac{du}{dt} + p_1\frac{dv}{dt}$$

$$Q = q\frac{du}{dt} + q_1\frac{dv}{dt}$$

$$R = r\frac{du}{dt} + r_1\frac{dv}{dt};$$

P, Q, R суть проекціи угловой скорости въ разсматриваемомъ движеніи.

Задача наша приводится къ интегрированію уравненій (6) и (7), интегрированіе же такихъ системъ уравненій сводится, какъ было показано въ § 5 гл. I, къ интегрированію одного уравненія Риккати.

Значеніе сокращеній названій періодическихъ изданій.

Abh. Böh.—Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag.

Act. Erud. Sup.—Actorum Eruditorum quae Lipsiae publicantur supplementa.

Act. Mat.—Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. Stockholm.

Akad. Krak.—Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii umiejętności. Kraków.

Ann. Nor.—Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure. Paris.

An. of Mat.—Annals of Mathematics. New York.

Ber. Wien.—Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Wien.

Br. Rep.—British association Report. Dublin.

Bul. Belg.—Bulletin de l'Academie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles.

Com. Ac. P.—Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.

C. R.—Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'academie des sciences. Paris.

Crel. J.—Journal für die reine und angewandte Mathematik, (основанный Crelle, потомъ издаваемый Borchardt'омъ, затѣмъ Kronecker'омъ и Weierstrass'омъ, теперь издатель—Fuchs).

Educ. Times.—Mathematical questions with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times". Edited by Miller. London.

Gött. Nachr.—Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen.

J. Liouv.—Journal de mathematiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville (потомъ Résal, теперь Camille Jordan). Paris.

Jour. Ec. Pol.—Journal de l'Ecole Royale Polytéchnique de Paris.

Каз. изв.—Извѣстія физико-математическаго общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ. Казань.

Mat. Ann.—Mathematische Annalen, herausgegeben von Klein, Dyck etc. (прежде Clebsch & Neumann). Leipzig.

Мат. сб.—Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ математическимъ обществомъ. Москва.

Mess.—The Messenger of Mathematics, edited by Witworth, Tylor etc. London and Cambridge.

Новор. зап. — Записки математическаго отдѣленія Новороссійскаго общества естествоиспытателей. Одесса.

Phil. Mag.—The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.

Phil. Trans.—Philosophical Transactions of the Royal society of London. London.

Prace.—Prace fizyczno-matematyczne, wydawane przez S. Dicksteina etc. Warszawa.

Proc. C.—Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

Proc. L.—Proceedings of the Royal Society of London.

Proc. M. L.—Proceedings of the London Mathematical Society.

Qu. J.—The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by Glaisher, Forsyth. London.

Zeit. Mat.—Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig.

Хар. Сооб. — Сообщенія Харьковскаго математическаго общества. Харьковъ.

ОПЕЧАТКИ.

Стр. 7 *ст.* 10 *св. вм.* видъ *д. б.* видъ,
" " " 7 *сн. вм.* Риккати *д. б.* уравненія Риккати.
" 8 " 5 " *слѣдуетъ прибавить:* Въ этомъ духѣ трактовали уравненіе Риккати *Picard*, *Анисимовъ*.
" 35 " 3 " *вм.* $\int^{\pi}$ *д. б.* $\int_{0}^{\pi}$
" 43 " 1 *св. вм.* $\frac{1}{y}$ *д. б.* $\frac{1}{x}$
" 59 " 4 *сн. вм.* $d_\mu z \nu_\mu - 1$ *д. б.* $d_\mu z^{\nu_\mu - 1}$
" 62 " 11 *св. вм.* можечъ *д. б.* можетъ
" 86 " 1 *сн. вм.* $(\varphi(x, z_i)$ *д. б.* $\varphi(x, z_i)$
" 97 " 13 *св. вм.* приходить *д. б.* проходить.

ФЕЛЬДБЛЮМЪ — ТЕОРІЯ УРАВНЕНІЯ РИККАТИ