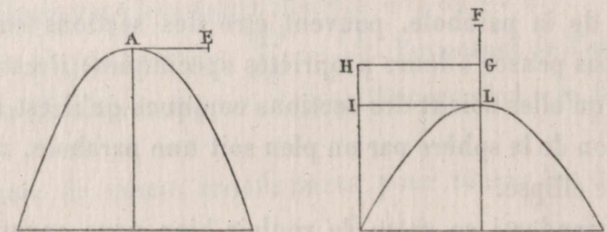
PROPOSITIONS A LALOUVÈRE.

I.

Soit une parabole BAD (*fig.* 112) dont AC est l'axe, BC une ordonnée, AE le paramètre. On demande le rapport de la courbe AB à la droite BC.

Fig. 112.



Soit l'hyperbole MLO de centre G, d'axe transverse FL égal au paramètre AE de la parabole. Soit LN l'axe de cette hyperbole, dont nous supposerons le paramètre égal à l'axe transverse, en sorte que pour toute ordonnée on ait $MN^2 = FN.NL$. En G, élevons la perpendiculaire GH égale à l'ordonnée BC de la parabole; menons HM et LI, parallèles à GN et GH et par M, point de rencontre de HM et de l'hyperbole, menons l'ordonnée MN.

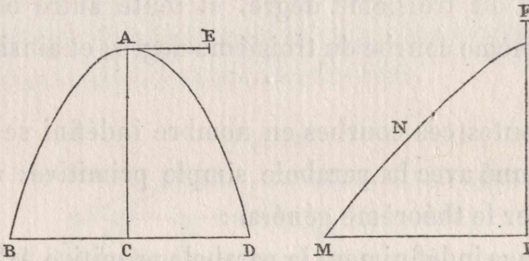
Je dis que le rapport de la courbe parabolique AB à la droite BC est le même que celui du quadrilatère MHGL (formé par les droites MG, HG, GL et la courbe ML) au rectangle IG.

II.

Soit donnée (*fig.* 113) la parabole BAD; soient AC son axe, BC une ordonnée, AE le paramètre; on fait tourner la figure parabolique BAC autour de l'ordonnée BC; trouver la mesure de la surface courbe du solide engendré.

Je construis l'hyperbole MNH ayant HI pour axe, en prenant son axe transverse HF égal au quart du paramètre de la parabole, c'est-à-dire de la droite AE, et en faisant le paramètre de cette hyperbole

Fig. 113.

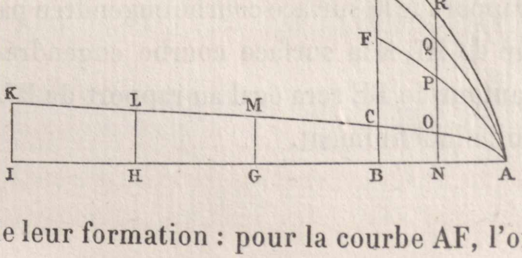


égal à son axe transverse, en sorte que, pour une ordonnée quelconque, on ait $IM^2 = FI.IH$. Je prends HI égale à l'axe AC de la parabole et je mène l'ordonnée IM. Du produit de CA par l'arc parabolique BA, je retranche l'aire hyperbolique IMH; je construis le carré égal à la différence. La diagonale de ce carré sera le rayon d'un cercle égal à la surface courbe du solide engendré par la rotation de l'aire ABC autour de l'ordonnée BC.

III.

Soit une demi-parabole quelconque AC (*fig.* 114), de sommet A et d'axe AB; de cette courbe j'en déduis d'autres en nombre indéfini comme AF, AE, AD, etc.

Fig. 114.



Voici la loi de leur formation : pour la courbe AF, l'ordonnée BF est égale à l'arc de courbe parabolique CA, et si je prends un autre point quelconque, comme N, par lequel je mène l'ordonnée NP, cette ordonnée NP est de même égale à l'arc de parabole AO. Pour la courbe EA, l'ordonnée EB est égale à la courbe FA du second degré et toute autre ordonnée QN est de même égale à l'arc PA de la même courbe du second degré. De même, pour la courbe AD, l'ordonnée BD est égale à la courbe EA du troisième degré, et toute autre ordonnée NR à l'arc QA de la même courbe du troisième degré ; et ainsi de suite indéfiniment.

Je dis que toutes ces courbes en nombre indéfini se trouvent dans un rapport donné avec la parabole simple primitive; voici comment on peut énoncer le théorème général :

Qu'on prolonge indéfiniment la parabole primitive AC par les points M, L, K, par exemple, et de même son axe par les points G, H, I, en nombre aussi grand que l'on voudra, en prenant $BG = GH = HI = AB$ l'axe, et en menant les ordonnées GM, HL, IK :

Le rapport de la courbe parabolique AM à la courbe AF du second degré est celui de l'ordonnée GM à l'ordonnée BC.

Le rapport de la courbe parabolique AL à la courbe AE du troisième degré est celui de l'ordonnée HL à la droite BC.

Le rapport de la courbe parabolique AK à la courbe AD du quatrième degré est celui de l'ordonnée KI à la droite BC.

Et ainsi de suite indéfiniment.

Si l'on fait tourner les figures AMG, AFB autour des ordonnées GM, BF, le rapport de la surface courbe engendrée par la figure AMG tournant autour de GM à la surface courbe engendrée par la figure AFB tournant autour de BF est égal au rapport de GM^3 à BC^3.

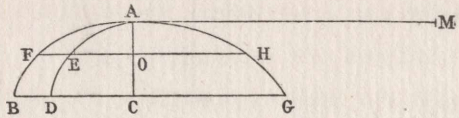
De même le rapport de la surface courbe engendrée par la figure ALH tournant autour de HL à la surface courbe engendrée par la figure AEB tournant autour de BE sera égal au rapport de HL^3 à BC^3.

Et ainsi de suite indéfiniment.

IV.

Soit BA (*fig.* 115) une demi-cycloïde dont on déduit une autre courbe DA par la condition que le rapport des ordonnées $\frac{BC}{CD}$ ou $\frac{FO}{EO}$ soit constamment égal à un rapport donné. Des géomètres ont démontré que la demi-cycloïde BA est double de la droite AC, diamètre du cercle générateur de la cycloïde. On demande la relation des courbes AD à d'autres lignes soit courbes, soit droites.

Fig. 115.



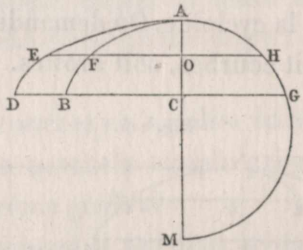
Voici notre énoncé général : Si ces nouvelles courbes se trouvent, comme sur la figure ci-dessus, entre la cycloïde et le diamètre du cercle générateur, toutes ces courbes AD et leurs parties seront égales à des arcs de parabole; si ces nouvelles courbes sont au contraire extérieures à la cycloïde, comme dans la figure ci-après (*fig.* 116), toutes ces courbes AD et leurs parties auront un rapport donné à la somme d'une droite et d'un arc de cercle.

Sur la première figure (*fig.* 115), le théorème général peut être formulé comme il suit. Construisez AM pour la condition $\frac{BC^2 - CD^2}{CD^2} = \frac{4AC}{AM}$; prenez A comme sommet d'une parabole ayant AM pour paramètre et AC pour axe; soit G le point de rencontre de cette parabole et du prolongement de la droite BDC, H le point de rencontre avec le prolongement de la droite FEO. Le rapport de la courbe parabolique AG à la courbe AD sera donné; on aura en effet $\frac{AG^2}{AD^2} = \frac{BC^2}{BC^2 - CD^2}$, et le rapport des arcs AH et AE sera le même.

Si l'on fait tourner les figures : ACG autour de l'ordonnée CG, ADC autour de la droite DC, le rapport des surfaces courbes engendrées sera égal au rapport des courbes AG et AD. Il en sera de même pour les parties de figure AOH, AEO, si on les fait tourner autour des droites OH, OE.

Pour l'autre figure (*fig.* 116), dans laquelle la courbe AD est extérieure à la cycloïde AB, je fais $\frac{CD^2 - CB^2}{CD^2} = \frac{AC}{AM}$, et je prends la longueur AM sur la même direction que AC; sur cette droite AM, je

Fig. 116.

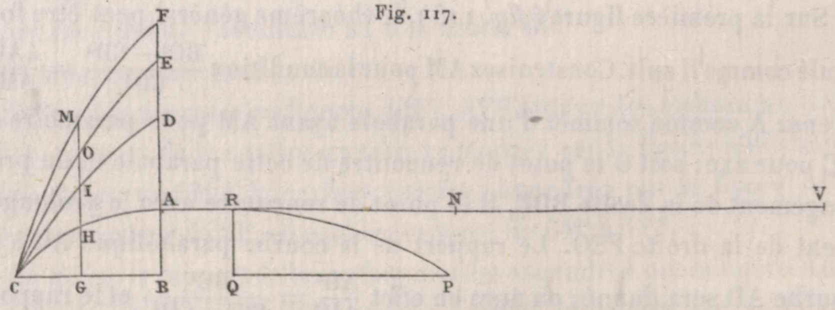


décris un demi-cercle qui sera coupé aux points G et H par les droites DBC, EFO. On aura $\left(\frac{\text{arc AG} + \text{GC}}{\text{arc AD}}\right)^2 = \left(\frac{\text{arc AH} + \text{HO}}{\text{arc AE}}\right)^2 = \frac{BC^2}{DC^2 - CB^2}$, rapport donné.

V.

Soit la parabole AC (*fig.* 117), de sommet A, d'axe AB, d'ordonnée CB; de la courbe parabolique CA j'en déduis d'autres en

Fig. 117.



nombre indéfini CD, CE, CF, par la même méthode que précédemment (*fig.* 114), sauf que cette fois je les fais toutes passer par l'extrémité de la même ordonnée, au lieu de les faire toutes passer par le sommet.

La propriété de ces nouvelles courbes sera donc que, si l'on mène GHIOM parallèle à l'axe AB, la droite BD interceptée en D par la courbe CID du second degré sera égale à l'arc de parabole AC, et la droite GI égale à l'arc de parabole CH; la droite BE interceptée en E par la courbe du troisième degré sera égale à l'arc DIC du second degré et ainsi de suite indéfiniment pour les courbes et leurs arcs.

Je dis que toutes ces courbes CD, EC, FC, etc. sont égales à des arcs de paraboles primitives ou simples, qui seront toutefois différentes de celles qui ont été précédemment égalées aux courbes dérivées. Voici le théorème général :

Je construis la parabole RP, ayant pour axe $RQ = AB$ l'axe de la première parabole, et pour paramètre RV, double du paramètre AN. Je dis que l'arc RP de cette parabole est égal à la courbe CID.

Si, avec $RQ = AB$ pour axe, on prend le paramètre $RV = 3AN$, l'arc parabolique RP sera égal à la courbe COE.

Si, toujours avec $RQ = AB$ pour axe, on prend le paramètre $RV = 4AN$, l'arc parabolique RP sera égal à la courbe CMF.

VI.

Si, autour des droites AB, BD, BE, BF, on fait tourner les figures ACB, DCB, ECB, FCB, etc., on peut construire un cercle équivalent à chacune des surfaces courbes des solides ainsi engendrés, avec autant de facilité que l'on peut construire un cercle représentant la surface courbe du conoïde parabolique engendré par la rotation de la parabole AB autour de l'axe AB. Je n'ajouterais pas cette dernière construction que j'apprends avoir déjà été trouvée (sans avoir cependant connaissance de ce qui a été écrit par d'autres sur ce sujet), si le procédé n'était pas général et ne s'étendait pas très aisément à tous les conoïdes engendrés autour des axes BD, BE, BF par ces nouvelles courbes en nombre indéfini.

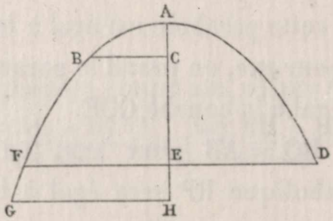
Si l'on fait tourner (*fig.* 117) la courbe CD autour de la droite BD, voici comment on trouvera la surface courbe du solide engendré :

Construisez, d'après la méthode ci-dessus, la courbe parabolique RP égale à la courbe CID, et faites tourner cette parabole RP autour de la droite RQ. On aura $\frac{\text{surf. conoïde RPQ}}{\text{surf. conoïde DICB}} = \frac{PQ}{CB}$, rapport des ordonnées. Si l'on construit de même la parabole RP égale à la courbe COE, on aura encore $\frac{\text{surf. conoïde RPQ}}{\text{surf. conoïde EOCB}} = \frac{PQ}{CB}$, et ainsi de suite indéfiniment.

VII.

Soit maintenant (*fig.* 118) la parabole FBAD d'axe EA, d'ordonnée FE. On demande la mesure de la surface courbe du solide engendré par la rotation de la figure ABFE autour de l'axe AE.

Fig. 118.



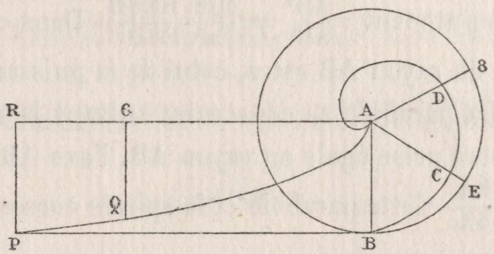
Prenez AC égal au quart du paramètre; construisez l'ordonnée CB; prenez EH = AC, et construisez l'ordonnée GH, puis le carré équivalent à CBGH, ce qui est facile d'après Archimède. La diagonale de ce carré équivalent à CBGH sera le rayon du cercle équivalent à la surface courbe du conoïde FAD engendré autour de l'axe AE.

VIII.

Le subtil géomètre qui a récemment démontré l'égalité de la spirale à la parabole aurait pu concevoir le théorème plus généralement et établir une comparaison entre un nombre indéfini de spirales et de paraboles d'espèces différentes, grâce à la proposition suivante qui peut être énoncée de façon à servir d'exemple général :

Soit sur la *fig.* 38 du Livre de Dettonville (*fig.* 119), une spirale d'espèce quelconque, c'est-à-dire telle que le rapport d'une puissance quelconque du rayon AB à la même puissance du rayon AC soit égal au rapport d'une puissance quelconque de la circonférence totale BE8B à la puissance semblable de l'arc E8B.

Fig. 119.



Construisez la parabole dont la demi-base ou la dernière ordonnée RP soit égale au rayon AB, et dont l'axe AR soit égal à une fraction de la circonférence totale BE8B, fraction ayant pour numérateur l'exposant de la puissance du rayon AB, et pour dénominateur la somme des exposants de la puissance du rayon AB et de la puissance de la circonférence BE8B; qu'enfin les puissances des ordonnées de la parabole, ayant pour exposant la somme de ceux des puissances du rayon AB et de la circonférence BE8B, soient entre elles dans le même rapport que les puissances des abscisses dont l'exposant est celui de la circonférence BE8B. Je dis que la spirale et la parabole ainsi construites seront toujours égales entre elles dans tous les cas.

Par exemple, soit d'abord la spirale d'Archimède et la parabole simple : $\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{circ. BE8B}}{\text{arc E8B}}$. Construisez la parabole AQP ayant pour dernière ordonnée RP $=$ AB, et pour axe AR une fraction de la circonférence BE8B, ayant pour numérateur l'exposant de la puissance du rayon AB (ici 1) et pour dénominateur la somme des exposants des puissances du rayon et de l'arc (ici 2; car dans ce cas l'exposant de la puissance de l'arc est 1). Ainsi l'axe AR devra être $\frac{1}{2}$ de la circonférence constitutive de la spirale, et dans la parabole, une puissance de l'ordonnée RP ayant pour exposant la somme de ceux des puissances du rayon et de l'arc (ici 2) doit être à la puissance semblable de l'ordonnée 6Q comme une puissance de l'abscisse AR ayant pour exposant celui de la circonférence BE8B (ici 1) est à la puissance semblable de l'abscisse A6, c'est-à-dire que l'on doit avoir : $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^2 = \frac{RA}{6A}$. La courbe parabolique PQA et la spirale BCDA seront égales.

Supposons maintenant : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\text{circ. BE8B}}{\text{arc E8B}}$. Dans ce cas l'exposant de la puissance du rayon AB est 2, celui de la puissance de la circonférence est 1. La parabole se construira suivant la règle ci-dessus : l'ordonnée RP sera prise égale au rayon AB, l'axe $AR = \frac{2}{3}$ circ. BE8B, enfin $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^3 = \frac{RA}{6A}$. Cette parabole et la spirale correspondante seront égales.

Soit encore : $\frac{AB}{AC} = \frac{\overline{\text{circ. BE8B}}^3}{\overline{\text{arc E8B}}^3}$. Dans la parabole, l'ordonnée RP sera prise égale au rayon AB, l'axe $AR = \frac{1}{4}$ circ. BE8B, et enfin $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^4 = \left(\frac{RA}{6A}\right)^3$. Il y aura toujours égalité entre la parabole et la spirale.

Soit enfin dans la spirale : $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\overline{\text{circ. BE8B}}^3}{\overline{\text{arc E8B}}^3}$; dans la parabole correspondante et égale à cette spirale, on aura, comme toujours, l'ordonnée RP = AB, l'axe $RA = \frac{2}{5}$ circ. BE8B, et enfin pour le rapport des ordonnées et des abscisses : $\left(\frac{RP}{6Q}\right)^5 = \left(\frac{AR}{6A}\right)^3$.

La méthode sera indéfiniment la même pour comparer les spirales et les paraboles d'espèce quelconque. Il n'y aura d'ailleurs aucune difficulté pour égaler des arcs de spirale augmentés ou diminués avec des arcs de la parabole correspondante. D'après ce qui précède, il y a à l'intérieur d'un même cercle une infinité de spirales différentes d'espèce et de longueur; bien plus, il y en a une infinité qui surpassent la circonférence du cercle, ce que l'on peut compter parmi les merveilles de la Géométrie. Cependant il n'y en a pas qui ne soit inférieure à la somme de la circonférence et du rayon, et il n'y en a pas qui ne soit plus grande que le rayon.