SUR LA TRANSFORMATION

ET LA

SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DE LIEUX,

POUR LA COMPARAISON SOUS TOUTES LES FORMES

DES AIRES CURVILIGNES, SOIT ENTRE ELLES, SOIT AVEC LES RECTILIGNES,

ET EN MÊME TEMPS

SUR L'EMPLOI DE LA PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

POUR LA QUADRATURE DES PARABOLES ET HYPERBOLES A L'INFINI.

Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la seule quadrature de la parabole; dans ses autres comparaisons entre quantités hétérogènes, il s'est borné à la seule progression arithmétique. Est-ce parce qu'il avait trouvé que la progression géométrique se prêtait moins bien à la quadrature? Est-ce parce que l'artifice particulier dont il s'est servi pour carrer avec cette progression la première parabole peut difficilement s'appliquer aux autres? Quoi qu'il en soit, j'ai reconnu et éprouvé cette progression comme très féconde en quadratures, et je communique volontiers aux géomètres modernes mon invention qui permet de carrer, par une méthode absolument identique, et paraboles et hyperboles.

Toute cette méthode dérive d'une seule propriété bien connue de la progression géométrique, c'est-à-dire du théorème suivant :

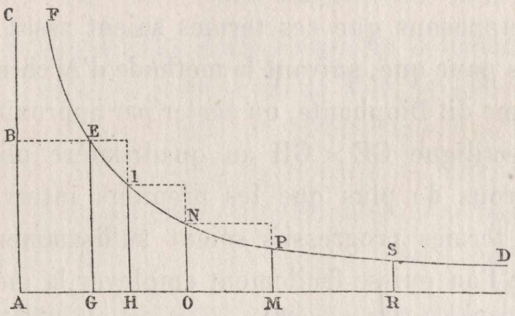
Étant donnée une progression géométrique dont les termes décroissent indéfiniment, la différence des deux termes de la raison de cette progres-

sion est au plus petit des deux comme le plus grand de tous les termes de la progression est à la somme de tous les autres jusqu'à l'infini (1).

Cela posé, soit d'abord proposée la quadrature des hyperboles :

Je définis hyperboles des courbes d'espèces variant à l'infini, qui, comme DSEF (*fig.* 142), ont cette propriété que, si l'on suppose, sous

Fig. 142.



un angle donné quelconque RAC, les asymptotes RA, AC que l'on peut prolonger indéfiniment comme la courbe elle-même, et que si l'on mène parallèlement à l'une des asymptotes et comme on le voudra les droites GE, HI, ON, MP, RS, etc., on aura toujours le même rapport entre une puissance déterminée de AH et la même puissance de AG d'une part, et une puissance de GE (semblable ou différente par rapport à la précédente) et la même puissance de HI, d'autre part. J'entends par puissances, non seulement les carrés, cubes, bicarrés, etc., dont les exposants sont 2, 3, 4, etc., mais aussi les racines simples dont l'exposant est 1.

Je dis que toutes ces hyperboles à l'infini, sauf une seule, celle d'Apollonius ou la première, peuvent être carrées au moyen d'une progression géométrique par une méthode uniforme et constante.

Soit par exemple l'hyperbole dont la propriété est définie par l'éga-

(1) Soit S la somme des termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment dont le plus grand terme est a, et la raison $q = \frac{u}{v}$; comme $q < 1$, $v > u$. Fermat énonce la relation $\frac{v-u}{u} = \frac{a}{S-a}$; d'où l'on tire immédiatement $S = a\frac{v}{v-u} = \frac{a}{1-q}$.

lité constante des rapports $\frac{HA^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI}$ et $\frac{OA^2}{AH^2} = \frac{HI}{ON}$, etc. Je dis que l'espace indéfini qui a pour base GE et qui est limité d'un côté par la courbe ES, de l'autre par l'asymptote indéfinie GOR, est égal à une aire rectiligne donnée.

Imaginons les termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment; soient AG le premier, AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse *adégaler*, comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne $GE \times GH$ au quadrilatère mixtiligne GHIE; nous supposerons de plus que les premiers intervalles GH, HO, OM, etc. des termes progressifs soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un artifice bien connu de tous les géomètres.

Cela posé, puisque $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM}$, on aura aussi $\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM}$, pour les intervalles. Mais, pour les parallélogrammes,

$$\frac{EG \times GH}{HI \times HO} = \frac{HI \times HO}{NO \times OM};$$

en effet, le rapport des parallélogrammes $\frac{GE \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{GH}{HO}$; mais, comme nous l'avons indiqué, $\frac{GH}{HO} = \frac{AG}{AH}$; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times HO}$ est composé des rapports $\frac{GE}{HI}$ et $\frac{AG}{AH}$. D'autre part, par construction, $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^2}{GA^2}$ ou $\frac{AO}{GA}$, par suite de la proportionalité des termes; donc le rapport $\frac{EG \times GH}{HI \times GO}$ est composé des rapports $\frac{AO}{AG}$ et $\frac{AG}{AH}$; mais $\frac{AO}{AH}$ est composé des mêmes rapports; on aura donc pour le rapport des parallélogrammes : $\frac{GE \times GH}{HI \times HO} = \frac{OA}{AH} = \frac{HA}{AG}$.

On prouvera de même que $\frac{HI \times HO}{ON \times OM} = \frac{AO}{HA}$.

Mais les droites AO, HA, GA qui constituent les rapports des parallélogrammes, forment, par construction, une proportion géométrique; donc les parallélogrammes en nombre indéfini $GE \times GH$, $HI \times HO$, $ON \times NM$, etc. formeront une progression géométrique continue dont la raison sera $\frac{HA}{AG}$. Par suite, selon le théorème constitutif de notre méthode, GH, différence des deux termes de la raison, sera au plus petit terme GA, comme le premier terme de la progression des parallélogrammes, c'est-à-dire comme le parallélogramme $EG \times GH$, à la somme de tous les autres parallélogrammes en nombre indéfini, ou autrement, suivant l'*adéquation* d'Archimède, à la figure limitée par HI, par l'asymptote HR et la courbe IND prolongée indéfiniment.

Mais, si l'on multiplie les deux termes par GE, $\frac{HG}{GA} = \frac{GE \times GH}{GE \times GA}$; donc $GE \times GH$ est à cette figure indéfinie dont la base est HI comme $GE \times GH$ est à $GE \times GA$. Donc le parallélogramme $GE \times GA$, qui est une aire rectiligne donnée, est *adégal* à la figure précitée; si l'on ajoute de part et d'autre le parallélogramme $GE \times GH$, qui, par suite des divisions indéfiniment poursuivies, s'évanouira et se réduira à rien, on arrive à cette vérité qu'il serait facile de confirmer par une démonstration plus prolixe, menée à la façon d'Archimède : que dans ce genre d'hyperbole, le parallélogramme AE est équivalent à la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ED indéfiniment prolongée.

Il est facile d'étendre cette invention à toutes les hyperboles définies ci-dessus, sauf la seule exception que nous avons indiquée. Soit en effet une autre hyperbole ayant pour propriété que $\frac{GE}{HI} = \frac{HA^3}{GA^3}$, etc. pour les autres ordonnées.

Prenons, comme ci-dessus, une série indéfinie de termes en progression; on démontrera de même que les parallélogrammes EH, IO, MN, etc. forment de même une progression indéfinie; mais, dans ce cas, le rapport du premier parallélogramme au second, du second au troisième, etc. sera $\frac{AO}{GA}$, ce que montrera immédiatement la composition des rapports. Donc le parallélogramme EH sera à la figure comme OG à GA, ou, en multipliant les termes par GE, comme $OG \times GE$ à $GE \times GA$: *vicissim* $OG \times GE$ est à EH ou $GE \times GH$ comme $GE \times GA$ à la figure. Mais $\frac{OG \times GE}{HG \times GE} = \frac{OG}{GH}$ ou $\frac{2}{1}$ par *adéquation;* car les intervalles voisins de la base sont, par construction, sensiblement égaux entre eux. Donc, dans cette hyperbole, le parallélogramme EGA, qui est égal à une aire rectiligne donnée, sera le double de la figure comprise sous la base GE, l'asymptote GR et la courbe ESD indéfiniment prolongée.

La démonstration sera la même dans tous les autres cas; il n'y a que pour la première hyperbole, c'est-à-dire la simple ou celle d'Apollonius, que la méthode est en défaut. La raison en est que les parallélogrammes EH, IO, NM y sont toujours égaux; les termes constitutifs de la progression, étant dès lors égaux entre eux, ne donnent aucune différence, et c'est précisément la différence qui fait tout le mystère de cette affaire.

Je n'ajoute pas la démonstration que, dans l'hyperbole commune, les parallélogrammes en question sont toujours égaux; la chose se voit immédiatement et dérive aussitôt de cette propriété de l'espèce que l'on a toujours $\frac{GE}{HI} = \frac{HA}{GA}$.

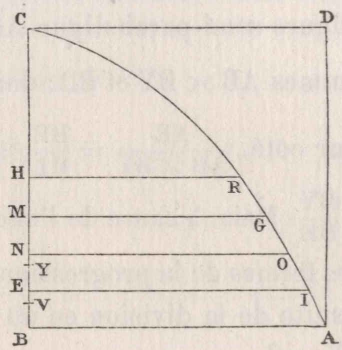
Le même moyen carre toutes les paraboles sans qu'il y en ait cette fois une seule qui, comme pour les hyperboles, échappe à notre méthode.

Je ne donnerai qu'un exemple, celui de la première parabole, celle d'Apollonius; sur ce modèle, on pourra faire toutes les démonstrations pour les paraboles quelconques à l'infini.

Soit AGRC une semi-parabole première (*fig.* 143), de diamètre CB, de demi-base AB. Si l'on prend les ordonnées IE, ON, GM, etc., on a toujours $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, $\frac{IE^2}{ON^2} = \frac{EC}{CN}$, etc. à l'infini, d'après la propriété spécifique de la parabole d'Apollonius.

D'après la méthode, imaginons les droites BC, EC, NC, MC, HC, etc., formant une progression indéfinie. Les parallélogrammes AE, IN, OM, GH formeront aussi, comme on l'a prouvé ci-dessus, une progression indéfinie.

Fig. 143.



Pour connaître le rapport des parallélogrammes AE, IN, il faut, d'après la méthode, recourir à la composition des rapports.

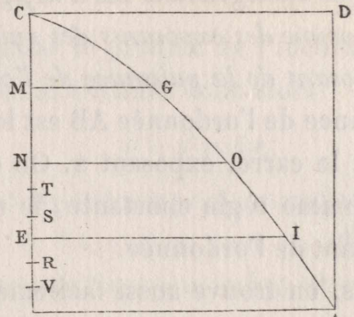
Or le rapport des parallélogrammes AE et IN est composé des rapports $\frac{AB}{IE}$ et $\frac{BE}{EN}$. Mais, puisque $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, si entre BC et CE on prend la moyenne proportionnelle CV, de même entre EC et NC la moyenne proportionnelle YC, les droites BC, VC, EC, YC, NC formeront une progression géométrique, et l'on aura $\frac{BC}{EC} = \frac{BC^2}{VC^2}$; donc, puisque $\frac{BC}{EC} = \frac{AB^2}{EI^2}$, $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{VC}$. Par conséquent, le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN}$ est composé du rapport $\frac{BC}{VC}$ ou $\frac{VC}{CE}$ ou $\frac{EC}{YC}$ et du rapport $\frac{BE}{EN}$ ou, comme on l'a prouvé plus haut, $\frac{BC}{CE}$; mais un rapport composé des deux $\frac{BC}{CE}$ et $\frac{EC}{CY}$ est égal au rapport $\frac{BC}{CY}$; donc le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN} = \frac{BC}{YC}$, et par conséquent, d'après le théorème constitutif de notre méthode, le rapport du parallélogramme AE à la figure IRCHE est $\frac{BY}{YC}$ et celui du même parallélogramme AE à la figure totale AIGRCB est $\frac{BY}{BC}$, BC étant le diamètre total. Mais, si l'on multiplie de part et d'autre par AB, $\frac{BY}{BC} = \frac{AB \times BY}{AB \times BC}$; or $AB \times BC$ est le parallélogramme BD, obtenu en menant AD parallèle au diamètre et en la prolongeant jusqu'à la rencontre en D avec la tangente CD; donc le rapport du parallélogramme AE à la figure semi-parabolique ARCB est le même que celui des parallélogrammes $AB \times BY$ et BD; donc $\frac{AE}{AB \times BY} = \frac{ARCB}{BD}$. Mais AE ayant AB pour côté, $\frac{AE}{AB \times BY} = \frac{BE}{BY}$; donc $\frac{BE}{BY} = \frac{ARCB}{BD}$, ou *convertendo*, $\frac{BD}{ARCD} = \frac{BY}{BE}$. Mais, à cause de l'*adégalité* des droites BV, VE, EY, différences des termes de la progression, mais supposées sensiblement égales par suite de la division en un très grand nombre de parties très petites, $\frac{BY}{BE} = \frac{3}{2}$. Le rapport du parallélogramme BD à la figure est donc le rapport de 3 à 2, ce qui est d'accord avec la quadrature de la parabole donnée par Archimède, quoiqu'il se soit autrement servi de la progression géométrique. Si d'ailleurs j'ai trouvé nécessaire de changer sa méthode et de prendre une autre voie que la sienne, c'est que je suis assuré qu'en suivant exactement les traces de ce grand géomètre, on reconnaîtra que l'emploi de la progression géométrique est stérile pour la quadrature des autres paraboles en nombre indéfini, tandis que pour toutes ces paraboles sans exception la démonstration et les règles générales sont immédiatement données par notre procédé.

Soient, pour ne pas laisser lieu au doute, AIGC (*fig.* 144) la parabole dont j'ai parlé dans ma *Dissertation sur la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*, AB sa base, BC son diamètre, IE, IC ses ordonnées telles que l'on ait $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^2}{EC^2}$. Qu'on imagine le reste de la construction comme ci-dessus, c'est-à-dire la progression indéfinie des droites BC, EC, NC, MC, etc. et celle des parallélogrammes AE, IN, OM, etc.

Prenez entre BC et EC les deux moyennes proportionnelles VC, RC; de même, entre EC et CN, les deux moyennes proportionnelles SC, TC.

Comme, par construction, $\frac{BC}{EC} = \frac{EC}{NC}$, les lignes BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC seront en progression.

Fig. 144.



D'ailleurs $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^2}{EC^2} = \frac{BC}{NC}$. Mais, dans la progression des sept proportionnelles BC, VC, RC, EC, SC, TC, NC, la première, la troisième, la cinquième et la septième forment aussi une progression continue.

Donc $::$ BC : RC : SC : NC, et en prenant le premier, le second et le quatrième terme de cette nouvelle progression, $\frac{BC}{NC} = \frac{BC^3}{RC^3}$; mais nous avons prouvé que $\frac{BC}{NC} = \frac{AB^3}{IE^3}$; donc $\frac{AB^3}{IE^3} = \frac{BC^3}{RC^3}$, d'où $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{RC}$.

Mais le rapport des parallélogrammes $\frac{AE}{IN} = \frac{AB}{IE} \times \frac{BE}{EN}$ ou $\frac{BC}{RC} \times \frac{BC}{EC}$ $\left(\text{puisque d'ailleurs } \frac{BE}{EN} = \frac{BC}{EC}\right)$.

D'autre part, dans les sept proportionnelles, en prenant la première, la troisième, la quatrième et la sixième, on a $\frac{BC}{EC} = \frac{RC}{TC}$; donc $\frac{AE}{IN} = \frac{BC}{RC} \times \frac{RC}{TC} = \frac{BC}{TC}$; donc $\frac{AE}{IGCE} = \frac{BT}{TC}$.

Donc, d'après ce qui a été démontré, le rapport du parallélogramme à la figure : $\frac{AE}{AICB} = \frac{BT}{BC} = \frac{AB \times BT}{AB \times BC}$, en multipliant de part et d'autre par AB; *vicissim* et *convertendo :* $\frac{BD}{AICB} = \frac{AB \times BT}{AB \times BE} = \frac{BT}{BE}$, en raison de la communauté du côté AB. Mais BT comprend *cinq* intervalles : TS, SE, ER, RV, VB qui, à cause de notre méthode logarithmique, sont censés égaux entre eux; BE en comprend *trois :* ER, RV, VB; donc, dans ce cas, le rapport du parallélogramme BD à la figure est de 5 à 3.

On peut de là tirer facilement une règle universelle. *Il est clair en effet que le rapport du parallélogramme* BD *à la figure* AICB *est toujours égal au rapport de la somme des exposants des puissances de l'ordonnée et de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée.* Ainsi, dans cet exemple, la puissance de l'ordonnée AB est le cube, l'exposant 3; celle de l'abscisse est le carré, exposant 2. On doit avoir, ainsi que nous l'avons établi comme règle constante, le rapport de la somme $3+2$ ou 5 à 3, exposant de l'ordonnée.

Pour les hyperboles, on trouve aussi facilement une règle universelle. *Dans une hyperbole quelconque* (*fig.* 142) *le rapport du parallélogramme* BG *à la figure indéfiniment étendue* RGED *sera égal au rapport de la différence de l'exposant de la puissance de l'ordonnée et de celui de la puissance de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée.* Soit, par exemple, $\frac{HA^3}{GA^3} = \frac{GE^2}{HI^2}$; la différence des exposants du cube et du carré, $3 - 2 = 1$; l'exposant de la puissance de l'ordonnée, qui est au carré, est 2. Dans ce cas le rapport du parallélogramme à la figure sera de 1 à 2.

Pour ce qui regarde les centres de gravité et les tangentes des hyperboles et paraboles, leur invention, dérivée de ma *Méthode de maximis et minimis,* a été communiquée aux géomètres modernes, il y a déjà environ vingt ans. Les plus célèbres mathématiciens de la France voudront bien sans doute le faire savoir aux étrangers, afin que dans l'avenir il n'y ait point de doute à cet égard.

Il est remarquable combien le travail des quadratures peut être avancé par la théorie qui précède; car elle permet de carrer facilement une infinité de courbes auxquelles n'ont jamais pensé les géomètres tant anciens que modernes. Nous allons condenser brièvement ces résultats sous certaines règles.

Soit une courbe dont la propriété conduise à l'équation suivante :

$b^2 - a^2 = e^2$ (on voit immédiatement que cette courbe est un cercle).

On peut ramener la puissance de l'inconnue e^2 à une racine par une division (application ou parabolisme). Nous pouvons en effet poser

$$e^2 = bu;$$

car on est libre d'égaler le produit de l'inconnue u par la connue b au carré de l'inconnue e. On aura donc alors

$$b^2 - a^2 = bu.$$

Mais le terme bu peut être décomposé en autant de termes qu'il y en a dans l'autre membre de l'équation, tout en affectant ces termes des mêmes signes que ceux de l'autre membre. Posons donc

$$bu = bi - by,$$

en représentant toujours, comme Viète, les inconnues par des voyelles. Il viendra

$$b^2 - a^2 = bi - by.$$

Égalons chacun des termes d'un membre au correspondant de l'autre. On aura

$$b^2 = bi \quad \text{d'où} \quad i = b \text{ sera donné,}$$

$$-a^2 = -by \quad \text{ou} \quad a^2 = by.$$

Le point extrême de la droite y sera sur une parabole primaire. Ainsi, dans ce cas, tout peut être ramené à un carré; si donc on ordonne tous les e^2 sur une ligne droite donnée, leur somme sera un solide rectiligne donné et connu.

Soit maintenant proposée la courbe dont l'équation est

$$a^3 + ba^2 = e^3.$$

Qu'on applique e^3 à une aire donnée, soit par exemple : $e^3 = b^2u$.

La droite u pouvant être composée de plusieurs inconnues, soit

$$a^3 + ba^2 = b^2i + b^2y.$$

Égalons terme à terme, savoir :

$a^3 = b^2i$, on aura une parabole sous un cube et une racine.

$ba^2 = b^2y$, on aura une parabole sous un carré et une racine, c'est-à-dire primaire.

Or ces deux paraboles sont carrables; donc la somme des e^3 ordonnés sur une droite donnée formera un *bi-plan* qu'on pourra facilement égaler à des quantités rectilignes du même degré.

S'il y a dans l'équation un plus grand nombre de termes, aussi bien que s'ils sont composés avec différentes puissances de l'une ou de l'autre inconnue, ils n'en pourront pas moins d'ordinaire être traités par la même méthode, au moyen de réductions légitimes.

Il est donc clair que si dans la première équation : $b^2 - a^2 = e^2$, au lieu de e^2, nous substituons bu, nous pouvons considérer comme un *plan* la somme de tous les u, ordonnés sur une ligne droite, et la carrer. En effet la somme des u n'est autre chose que celle des e^2, divisée par une droite donnée b.

De même dans la seconde équation, la somme des u n'est autre chose que celle des e^3, divisés par le carré donné b^2.

Donc, aussi bien dans le premier que dans le second cas, la somme des u fait une figure égale à une aire rectiligne donnée.

Ces opérations se font par *synérèse* et s'accomplissent, comme il est clair, au moyen de paraboles.

Mais on n'obtient pas moins de quadratures par *diérèse*, au moyen d'hyperboles, soit seules, soit unies à des paraboles.

Soit proposée, par exemple, la courbe ayant pour équation

$$\frac{b^6 + b^5 a + a^6}{a^4} = e^2.$$

On peut de même poser $e^2 = bu$, ou bien, pour avoir de part et d'autre trois termes dans chaque membre de l'équation

$$bu = b\bar{o} + bi + by.$$

Il viendra

$$\frac{b^6 + b^5 a + a^6}{a^4} = b\bar{o} + bi + by$$ et, également terme à terme :

1° $\frac{b^6}{a^4} = b\bar{o}$; multipliant par a^4 des deux côtés, $b^6 = a^4 b\bar{o}$; divisant par b; $b^5 = a^4\bar{o}$, équation d'une hyperbole. On sait en effet que les équations constitutives des hyperboles renferment dans un membre une quantité donnée, dans l'autre le produit de puissances des deux inconnues.

2° $\frac{b^5 a}{a^4}$ ou $\frac{b^5}{a^3} = bi$. Multipliant par a^3 et divisant par b de part et d'autre : $b^4 = a^3 i$, équation d'une hyperbole différente de la précédente.

3° $\frac{a^6}{a^4}$ ou $a^2 = by$; équation d'une parabole.

On voit donc que, dans l'équation proposée, la somme des u ordonnés sur une droite donnée est égale à une aire rectiligne donnée; car la somme de deux hyperboles carrables et d'une parabole donne une aire égale à un rectiligne ou à un carré donné.

Rien n'empêche au reste de diviser séparément, comme on l'a fait, chacun des termes du numérateur par le dénominateur. Le résultat est en effet le même que si l'on divisait en une fois par le dénominateur le numérateur entier composé de trois termes. Cette division séparée permet de comparer facilement chaque terme d'un des membres de l'équation à son corrélatif dans l'autre.

Soit proposé encore : $\frac{b^5 a - b^6}{a^3} = e^3$.

Posons $e^3 = b^2 u$, ou bien, à cause des deux termes du membre corrélatif, $e^3 = b^2 i - b^2 y$. On aura :

1° $\frac{b^5 a}{a^3} = \frac{b^5}{a^2} = b^2 i$; multipliant par a^2 et divisant par b^2, $b^3 = a^2 i$, équation d'une hyperbole carrable.

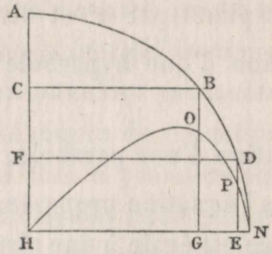
2° $\frac{b^6}{a^3} = b^2 y$; multipliant par a^3 et divisant par b^2, $b^4 = a^3 y$, équation constitutive d'une hyperbole carrable.

Si donc on revient à la première équation, on aura, dans ce cas, donnée en rectilignes la somme de tous les e^3, ordonnée sur une droite donnée.

Mais rien n'empêche d'aller plus loin dans le travail des quadratures.

Soit (*fig.* 145) une courbe quelconque ABDN, de base HN, de diamètre HA; soient CB, FD les ordonnées sur le diamètre, BG, DE les ordonnées sur la base. Nous supposerons que les ordonnées décroissent constamment de la base au sommet, comme dans la figure : c'est-à-dire $HN > FD$; $FD > CB$, et ainsi de suite.

Fig. 145.



La figure formée par les carrés de HN, FD, CB, ordonnés sur la droite AH, c'est-à-dire le solide $CB^2 \times CA \ldots + FD^2 \times FC \ldots + NH^2 \times HF$, est toujours égale à la figure formée par les rectangles $BG \times GH$, $DE \times EH$ doublés et ordonnés sur la base HN, c'est-à-dire au solide $2BG.GH.GH \ldots + 2DE.EH.EG$, etc., la série des termes de part et d'autre étant supposée indéfinie. Or, pour les autres puissances des ordonnées, la réduction des termes sur le diamètre aux termes sur la base se fait avec la même facilité, et cette observation conduit à la quadrature d'une infinité de courbes inconnues jusqu'ici.

En effet, la somme des cubes de HN, FD, CB, ordonnés de même sur la droite AH, sera égale à celle des produits : $BG.GH^2$, $DE.EH^2$, triplés et ordonnés de même sur la droite HN, c'est-à-dire que le *bi-plan* $CB^3.CA \ldots + DF^3.FC \ldots + HN^3.HF$ sera égal à la somme des *bi-plans* $3(BG.GH^2.HG \ldots + DE.EH^2.EG)$.

De même la somme des bicarrés de HN, FD, CB, ordonnés sur la droite AH, sera égale à *quatre fois* celle des bi-plans $BG.GH^3 \ldots DE.EH^3$, ordonnés de même sur la droite HN.

De là dérivent, comme on va le voir, une infinité de quadratures.

Soit, par exemple, cette courbe ABDN, dont on donne la base HN et le diamètre HA. Appelons analytiquement b le diamètre donné HA, d la base donnée HN, e une ordonnée quelconque FD, a une coordonnée quelconque HF, et soit, par exemple, $b^2 - a^2 = e^2$ l'équation constitutive de la courbe (qui sera un cercle). D'après le théorème général qui précède, la somme des e^2, ordonnés sur la droite b, est égale à la somme des produits HG.GB, doublés et ordonnés sur la droite HN ou d; mais la somme des e^2, ordonnés sur b, est égale, comme on l'a prouvé plus haut, à un rectiligne donné; donc la somme des produits HG.GB, doublés et ordonnés sur la base d, forme une aire rectiligne donnée; si l'on prend la moitié, la somme des produits HG.GB, ordonnée sur la base d, formera de même une aire rectiligne donnée.

Pour passer facilement, et sans embarras de radicaux, de la première courbe à la nouvelle, nous devons employer un artifice qui est toujours le même, et dans lequel consiste notre méthode.

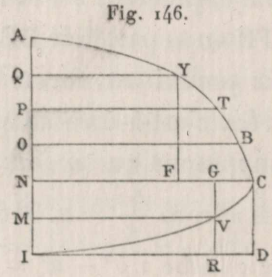
Soit HE.ED un quelconque des produits à ordonner sur la base; comme nous appelons analytiquement e l'ordonnée FD ou sa parallèle HE, a la coordonnée FH ou sa parallèle DE, nous appellerons ea le produit HE.ED. Égalons ce produit ea, formé de deux droites inconnues et indéterminées, à bu, c'est-à-dire au produit de la donnée b par une inconnue u, et supposons que u soit égale à EP prise sur la même droite que DE; nous aurons $\frac{bu}{e} = a$. Mais, d'après la propriété spécifique de la première courbe : $b^2 - a^2 = e^2$; substituant à a sa nouvelle valeur $\frac{bu}{e}$, il viendra $b^2e^2 - b^2u^2 = e^4$ ou, en transposant, $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, équation constitutive de la nouvelle courbe HOPN, dérivée de la première, et pour laquelle il est prouvé que la somme des bu ordonnés sur b est donnée. Divisant par b la somme des u ordonnés sur la base, c'est-à-dire la surface HOPN, sera donnée en rectilignes, on aura donc sa quadrature.

Soit, comme second exemple, $ba^2 - a^3 = e^3$ l'équation constitutive de la première courbe. La somme des e^3 ordonnés sur le diamètre b est donnée, donc la somme des produits $HE^2.ED$ ordonnés sur la base. Mais $HE^2.ED$ est en expression analytique e^2a; égalons ce produit à b^2u, et supposons, comme ci-dessus, $EP = u$. On aura $\frac{b^2u}{e^2} = a$; si donc, au lieu de a, on substitue sa valeur $\frac{b^2u}{e^2}$, et qu'on suive les règles de l'analyse, on aura $b^5u^2e^2 - e^9 = b^6u^3$, équation constitutive de la nouvelle courbe HOPN dérivée de la première, et pour laquelle la somme des produits $b^2 u$, ordonnés sur la base d, est donnée. Divisant par b^2, la somme des u ordonnés sur la base d sera donnée, donc la quadrature de la figure HOPN. La méthode est générale et s'étend à tous les cas indéfiniment.

Mais il faut remarquer et observer avec soin que, pour les transformations de courbes dont les ordonnées au diamètre décroissent vers la base, les analystes doivent suivre un autre procédé qui diffère du précédent.

Soit (*fig.* 146) la courbe primitive IVCBTYA, de diamètre AI, d'ordonnées MV, NC, OB, PT, QY. Cette courbe est supposée telle que ses

Fig. 146.



ordonnées MV du côté de la base décroissent jusqu'à la base, en sorte que $MV < NC$; que, d'autre part, du côté de A, la courbe s'infléchisse suivant CBYA, en sorte que $CN > BO$, $BO > PT$, $PT > QY$, etc., en sorte que l'ordonnée maxima soit CN.

Si, dans ce cas, nous cherchons la transformation des carrés MV^2, NC^2 en produits sur la base, nous ne les comparerons plus aux produits IR.RV, comme précédemment. Car le théorème général suppose que la somme $MV^2 \ldots + NC^2$ est égale à celle des produits VG.GN, puisque CN, l'ordonnée maxima, peut et doit être regardée comme base par rapport à la courbe dont le sommet est I. Il faut donc, dans une courbe dont les ordonnées décroissent vers la base, comparer les carrés $MV^2 \ldots NC^2$ aux produits GV.GN, c'est-à-dire, pour arriver sur cette figure à une équation analytique : si nous posons $MI = RV = a$, $MV = RI = e$ et $CD = GR = z$ donnée (cette droite menée parallèlement au diamètre par l'extrémité de l'ordonnée maxima est facile à trouver par nos méthodes), on aura $GV.GN = ze - ae$; par suite, la somme des carrés $MV^2 \ldots NC^2$ jusqu'à l'ordonnée maxima sera comparée à la somme des produits $ze - ae$, ordonnés sur la base ID. La somme des autres carrés CN^2, BO^2, PT^2 sera comparée à la somme des produits YF.FN, soit en expression analytique $ae - ze$. Cela établi, on dérivera facilement de la première courbe une nouvelle sur la base; on observera la même règle pour toutes les autres puissances des inconnues.

Pour bien montrer que notre méthode fournit de nouvelles quadratures, dont aucun des modernes n'a encore jamais rien soupçonné, soit proposée la courbe précédente, dont l'équation est

$$\frac{b^5 a - b^6}{a^3} = e^3.$$

Il a été prouvé que la somme des e^3 est donnée en rectilignes. En les transformant sur la base, on aura, d'après la méthode précédente, $\frac{b^2 u}{e^2} = a$; substituant la nouvelle valeur de a, et achevant les calculs suivant les règles, on arrivera à la nouvelle équation $e^3 + u^3 = beu$, qui donne une courbe du côté de la base. C'est celle de Schooten, qui en a donné la construction dans ses *Miscellanea*, section XXV, page 493. La figure courbe AKOGDCH de cet auteur sera donc facilement carrable d'après les règles précédentes.

Il y a également lieu de remarquer que, des courbes dont la somme des puissances des ordonnées se trouve donnée, on peut déduire des courbes facilement carrables, non seulement sur la base, mais aussi sur le diamètre. Supposons, par exemple (*fig.* 145), l'équation constitutive déjà prise $b^2 - a^2 = e^2$; non seulement on en dérivera une nouvelle courbe sur la base ayant pour équation $b^2 e^2 - e^4 = b^2 u^2$, mais encore une nouvelle courbe sur le diamètre en égalant la puissance de l'ordonnée e^2 à un produit bu. Car la somme des produits bu, ordonnés sur le diamètre, sera donnée; donc, en divisant par b la somme des u ordonnés sur le diamètre, on aura la quadrature de la courbe dérivée de la primitive sur le diamètre, et dont l'équation sera $b^2 - a^2 = bu$. Il est évident que cette nouvelle courbe sur le diamètre est une parabole. Une transformation de cette sorte, non seulement donne des courbes nouvelles dérivées des premières, mais conduit facilement des paraboles aux hyperboles et des hyperboles aux paraboles, comme l'essai le fera voir.

Mais, de même que des courbes où est donnée la somme de puissances des ordonnées, l'analyse précédente dérive des courbes où la somme des ordonnées simples est donnée, de même, de courbes où est donnée la somme des ordonnées, on arrive facilement à des courbes où est donnée la somme des puissances des ordonnées.

Soit, comme exemple, la courbe dont l'équation est $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, équation où, comme je l'ai établi, la somme des u est donnée. Si l'on pose $u = \frac{ae}{b}$, et qu'on substitue à u sa nouvelle valeur $\frac{ae}{b}$, on aura $b^2e^2 - e^4 = a^2e^2$, et, en divisant tous les termes par e^2, $b^2 - e^2 = a^2$, ou bien $b^2 - a^2 = e^2$. Dans cette nouvelle courbe, qui est un cercle, la somme des e^2 sera donnée.

Si de la première courbe où est donnée la somme des ordonnées, on veut en déduire une nouvelle où soit donnée la somme de leurs cubes, on se servira toujours de la même méthode, mais en prenant des puissances conditionnées des inconnues.

Ainsi, soit proposée la courbe que nous avons plus haut déduite d'une autre et dont l'équation est $b^5u^2e^2 - e^9 = b^6u^3$, et où il est établi que la somme des u, c'est-à-dire des ordonnées, se trouve donnée.

Pour en déduire une nouvelle courbe où la somme des cubes des ordonnées soit donnée, on posera $u = \frac{e^2a}{b^2}$, et on substituera à u sa nouvelle valeur; en opérant conformément aux règles de l'art, on aura l'équation $ba^2 - a^3 = e^3$, qui donnera une courbe où la somme des e^3, c'est-à-dire des cubes des ordonnées, se trouve donnée.

Cette méthode, non seulement conduit à la connaissance d'une infinité de quadratures jusqu'à présent ignorées des géomètres, mais encore fait découvrir une infinité de courbes dont on obtient les quadratures en supposant celle de courbes plus simples, comme le cercle, l'hyperbole, etc.

Par exemple, dans l'équation du cercle $b^2 - a^2 = e^2$, on a, données en rectilignes, les sommes de toutes les puissances des ordonnées dont l'exposant est pair, carrés, bicarrés, bicubes, etc. Quant à la somme des puissances à exposant impair, comme celles des e^3, e^5, elle n'est donnée en rectilignes que si l'on suppose la quadrature du cercle. Il est facile de démontrer ce que je viens de dire et de le réduire en règle, comme corollaire de la méthode qui précède.

Il arrive aussi souvent que, pour trouver la mesure d'une courbe proposée, il faille réitérer l'opération deux fois ou plus souvent encore.

Soit proposée, par exemple, la courbe déterminée par l'équation suivante :

$$b^3 = a^2 e + b^2 e.$$

Si la somme des e est donnée, ainsi que la droite b, on aura aussi comme donnée celle des rectangles be. En inversant la méthode que nous avons exposée au début de cette Dissertation, posons $be = \overline{o^2}$, d'où $\frac{\overline{o^2}}{b} = e$. Substituant à e sa nouvelle valeur, il viendra

$$b^4 = a^2 \overline{o^2} + b^2 \overline{o^2}.$$

Nous avons là une première opération, inverse de celle indiquée au début de la Dissertation, et qui a conduit à une nouvelle courbe où il reste à chercher si la somme des $\overline{o^2}$ est donnée.

Il faut donc recourir à la seconde méthode qui de la somme des carrés des ordonnées conduit à la somme des ordonnées simples.

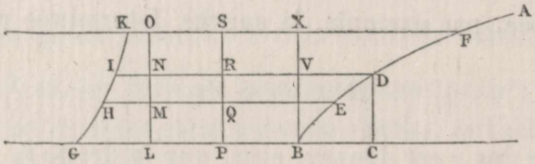
D'après la méthode précédente exposée en seconde ligne, posons $\frac{bu}{o} = a$ et substituons à a la nouvelle valeur que lui assigne cette méthode. Il viendra $b^4 - b^2 \overline{o^2} = b^2 u^2$, et divisant tous les termes par b^2, $b^2 - \overline{o^2} = u^2$, équation du cercle. La somme des u est donc donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle.

Si nous remontons à la première courbe : $b^3 = a^2e + b^2e$, il en résulte que l'aire de cette courbe peut être carrée en supposant la quadrature du cercle, et nous sommes facilement et rapidement arrivés à cette conclusion par notre analyse, au moyen de deux courbes différentes de la précédente.

L'utilité de tout ce qui précède sera immédiatement reconnue par un analyste subtil, tant pour l'invention de droites égales à des courbes, que pour nombre d'autres problèmes qui n'ont pas encore été assez approfondis.

Soient (*fig.* 148) AB une parabole primaire, CB son axe, CD l'ordonnée égale à l'axe CB et au paramètre BV. Prenez BP, PL, LG

Fig. 148.



égales entre elles et à l'axe CB, et portées sur son prolongement. Menez à CD les parallèles indéfinies BX, PS, LO (qui seront données) et par un point quelconque F de la courbe, menez à l'axe la parallèle FXSOK rencontrant les droites BX, PS, LO aux points X, S, O. Faites enfin $\frac{FX + XS}{SO}$ ou $\frac{XS}{SO} = \frac{SO}{OK}$. Prenant de même les points D, E, faites $\frac{DR}{RN} = \frac{RN}{NI}$ et $\frac{EQ}{QM} = \frac{QM}{MH}$. Imaginez par les points G, H, I, K, ... une courbe indéfinie qui aura pour asymptote la droite indéfinie LO.

Cette courbe GHIK est celle dont l'espèce est définie par l'équation précédente, $b^3 = a^2e + b^2e$. Je dis donc, d'après la réitération indiquée ci-dessus des opérations analytiques, que l'aire KIHGLMNO, qui se prolonge indéfiniment du côté des points K, O, est égale au *double* du cercle ayant pour diamètre l'axe BC. C'est ainsi que nous avons immédiatement résolu cette question que nous proposait un savant géomètre.

Par la même méthode j'ai carré la courbe de Dioclès ou plutôt j'ai ramené sa quadrature à celle du cercle.

Mais le redoublement des opérations est surtout élégant lorsque l'analyse passe des plus hautes puissances des ordonnées aux plus basses, ou au contraire des plus basses aux plus hautes; cette méthode s'applique en particulier pour trouver la somme des ordonnées dans une courbe quelconque proposée, ainsi qu'à beaucoup d'autres problèmes de quadratures.

Soit proposée, par exemple, la courbe dont l'équation est

$$b^2 - a^2 = e^2,$$

et qu'on voit immédiatement être un cercle. On demande la somme des cubes des ordonnées, c'est-à-dire la somme des e^3.

Si la somme des e^3 est donnée, on peut, par les méthodes précédentes, en raison de la nature de la puissance, déduire de cette courbe une autre sur la base, où la somme des ordonnées soit donnée. Soit posé, d'après la méthode, $\frac{b^2\overline{o}}{e^2} = a$. Substituant à a sa nouvelle valeur, il vient $b^2e^4 - e^6 = b^4\overline{o^2}$, équation d'une courbe où, dans l'hypothèse que la somme des e^3 de la première courbe est donnée, la somme des $\overline{o}$ sera donnée.

Puisque, dans cette nouvelle courbe, la somme des $\overline{o}$ est donnée, on peut en dériver une troisième où l'on cherche la somme des carrés des ordonnées, et non celle des cubes comme dans la première courbe. D'après notre méthode pour les carrés, nous poserons, comme on l'a vu, $\frac{eu}{b} = \overline{o}$; d'où $b^2e^4 - e^6 = b^2e^2u^2$. Divisant tout par e^2, il viendra $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$, courbe où la somme des e^2 doit être donnée. Partant de cette courbe, cherchons-en une où soit donnée la somme des ordonnées; posons par exemple $e^2 = by$; la dernière équation deviendra $by - y^2 = u^2$. Si donc, dans la précédente, la somme des e^2 est donnée, dans celle-ci on aura celle des by, donc celle des y.

Or dans cette dernière courbe, qui est évidemment un cercle, la somme des y est donnée, en supposant toutefois la quadrature du cercle; donc, en remontant de cette dernière courbe, où finit notre analyse, à la première, il est clair que dans le cercle la somme des cubes des ordonnées est donnée, si l'on suppose la quadrature du cercle. De même pour les puissances cinquième, septième et les autres de degré impair indéfiniment, comme il est facile de le voir. Seulement le nombre des courbes se multiplie à mesure que s'élève le degré de la puissance dont il s'agit. On passera sans difficulté de l'analyse à la synthèse et au véritable calcul de la figure à carrer.

Au reste, il arrive souvent qu'il faut étrangement promener l'analyse par un très grand nombre de courbes pour arriver à la simple mesure pour une équation de lieu proposée.

Soit par exemple : $\dfrac{b^7 a - b^8}{a^6} = e^2$.

Supposons donnée la quadrature de la figure correspondant à cette équation; la somme des a est donc donnée, donc celle des ba, et si l'on pose $ba = \overline{o^2}$, celle des $\overline{o^2}$. On aura d'ailleurs $a = \dfrac{\overline{o^2}}{b}$, d'où l'équation $\dfrac{b^{12}\overline{o^2} - b^{14}}{\overline{o^{12}}} = e^2$.

De cette nouvelle courbe, par l'autre méthode que nous avons indiquée si souvent, on en déduira une troisième. La somme des $\overline{o^2}$ étant donnée, posons $\dfrac{bu}{\overline{o}} = e$, on aura l'équation $\dfrac{b^{10}\overline{o^2} - b^{12}}{\overline{o^{10}}} = u^2$.

C'est la troisième courbe où l'on aura la somme des $\overline{o}$, et par conséquent des u. Mais si la somme des u est donnée, on aura, d'après la première méthode, celle des produits bu. Soit $bu = y^2$, d'où $\dfrac{y^2}{b} = u$, nous aurons l'équation $\dfrac{b^{12}\overline{o^2} - b^{14}}{\overline{o^{10}}} = y^4$, quatrième courbe où sera donnée la somme des y^2. Par la méthode ordinaire, déduisons-en une autre; soit $\dfrac{bi}{y} = \overline{o}$; achevant les calculs suivant les règles de l'analyse, $b^4 y^4 i^2 - b^4 y^6 = i^{10}$, cinquième courbe où sera donnée la somme des y, donc celle des i.

Maintenant, par la méthode contraire, déjà souvent employée, cherchons une autre courbe où l'on connaisse la somme des carrés des ordonnées; soit $\frac{ia}{b} = y$ (car à défaut de voyelles rien n'empêche de reprendre celles qui ont déjà été employées), on aura $b^2 a^4 - a^6 = b^2 i^4$, sixième courbe où la somme des i^2 est donnée.

Ramenons aux racines par la méthode connue et déjà employée plusieurs fois; soit $i^2 = be$; on aura la somme des be donnée, et une septième courbe $b^2 a^4 - a^6 = b^4 e^2$, où la somme des e est donnée, donc celle des a.

De là on en déduira une autre, où la somme des carrés des ordonnées sera donnée.

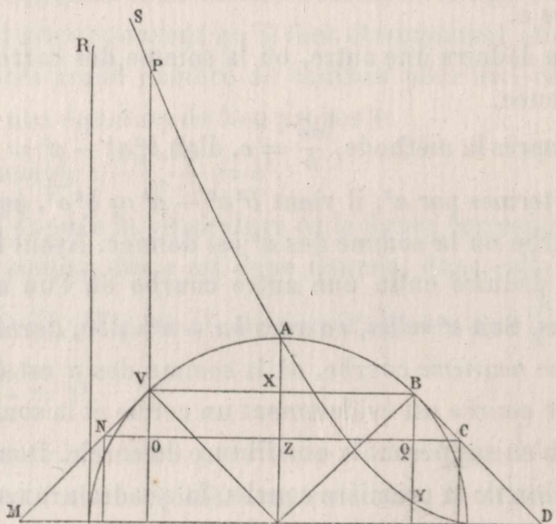
Posons, d'après la méthode, $\frac{a\overline{o}}{b} = e$, d'où $b^2 a^4 - a^6 = b^2 a^2 \overline{o^2}$. Divisant tous les termes par a^2, il vient $b^2 a^2 - a^4 = b^2 \overline{o^2}$, équation d'une huitième courbe où la somme des a^2 est donnée. Ayant la somme des a^2, on peut déduire enfin une autre courbe où l'on ait la somme des ordonnées. Soit $a^2 = bu$, on aura $bu - u^2 = \overline{o^2}$, dernière équation qui donne une *neuvième* courbe, où la somme des u est donnée. Mais cette dernière courbe est évidemment un cercle et la somme des u n'y est donnée qu'en supposant la quadrature du cercle. Donc, en remontant à l'équation de la première courbe, la quadrature en sera donnée si l'on suppose celle de la dernière courbe ou du cercle.

Nous avons ainsi employé neuf courbes différentes pour arriver à la connaissance de la première.

FRAGMENT SUR LA CISSOÏDE.

Soit la cissoïde EAPS (*fig.* 149) dans le demi-cercle LVABE, dont H est le centre, LE le diamètre, HA le rayon perpendiculaire au diamètre; soit LR la droite perpendiculaire au diamètre et asymptote de la cissoïde.

Fig. 149.



Je dis que l'aire comprise entre EL, la cissoïde EAPS et son asymptote LB prolongées indéfiniment est triple du demi-cercle LAE. Si donc on fait la même construction dans l'autre moitié du cercle, l'ensemble des deux aires, dont E formera le point saillant, sera égal au triple du cercle total.

La démonstration, loin d'être pénible, est assez élégante.

Je prends sur le diamètre deux points I, G quelconques, mais de part et d'autre du centre et à même distance; on aura donc HI = HG, et par suite LI = GE. En I et G j'élève des perpendiculaires qui rencontreront la cissoïde aux points P, Y, le cercle aux points V et B. Par ces derniers points, V, B, je mène les rayons HV, HB et les tangentes VM, BD, qui rencontreront le diamètre en M, D. Au delà de I, je prends une très petite longueur IK arbitraire, et au delà de G, GF $=$ IK; en K et F, j'élève au diamètre les perpendiculaires KN, FC qui rencontreront les tangentes aux points N, C, desquels j'abaisserai sur les droites VI, BG les perpendiculaires NO, CQ.

Cela fait, il est clair que l'aire de la cissoïde est égale à la somme de tous les rectangles PI $\times$ IK et YG $\times$ GF que l'on peut construire de la sorte; ces rectangles ont des bases égales, KI $=$ GF, et leurs hauteurs sont les ordonnées à angle droit de la cissoïde. Mais, d'après la propriété de cette courbe, $\frac{\mathrm{VI}}{\mathrm{IE}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IP}}$; d'autre part, $\mathrm{IE} = \mathrm{IH} + \mathrm{HE} = \mathrm{IH} + \mathrm{HV}$; donc $\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{IH} + \mathrm{HV}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{EP}}\cdot$ Maintenant les triangles HVI, VMI, VNO donnent $\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{HI} + \mathrm{HV}} = \frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{NV} + \mathrm{VO}}$; donc $\frac{\mathrm{KI}(= \mathrm{NO})}{\mathrm{NV} + \mathrm{VO}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IP}}$, d'où

$$\mathrm{IP} \times \mathrm{IK} = \mathrm{IE} \times \mathrm{NV} + \mathrm{IE} \times \mathrm{VO}.$$

D'un autre côté, d'après la propriété de la cissoïde, $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}} = \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{GY}}\cdot$ Mais $\mathrm{GE} = \mathrm{HE} - \mathrm{HG} = \mathrm{HB} - \mathrm{HG}$; donc $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BH} - \mathrm{HG}} = \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{GY}}\cdot$ Mais, en raison de la similitude des triangles, on aura aussi

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BH} - \mathrm{HG}} = \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC} - \mathrm{BQ}} = \frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{BC} - \mathrm{BQ}};$$

on en conclura que $\mathrm{YG} \times \mathrm{GF} = \mathrm{GE} \times \mathrm{BC} - \mathrm{GE} \times \mathrm{BQ}$.

Mais comme par construction $\mathrm{HI} = \mathrm{HG}$ et $\mathrm{KI} = \mathrm{GF}$, on aura évidemment $\mathrm{VN} = \mathrm{BC}$ et $\mathrm{VO} = \mathrm{BQ}$. Par conséquent, si l'on prend les deux rectangles correspondants,

$$\begin{aligned} &\mathrm{PI} \times \mathrm{IK} + \mathrm{YG} \times \mathrm{GF}[= \mathrm{YG} \times \mathrm{IK}] \\ &\quad = \mathrm{IE} \times \mathrm{NV} + \mathrm{GE} \times \mathrm{BC}[= \mathrm{LI} \times \mathrm{NV}] + \mathrm{IE} \times \mathrm{VO} - \mathrm{GE} \times \mathrm{BQ}[= \mathrm{GE} \times \mathrm{BO}]; \end{aligned}$$

mais

$$\mathrm{IE} \times \mathrm{NV} + \mathrm{LI} \times \mathrm{NV} = \mathrm{LE} \times \mathrm{NV},$$

et

$$\mathrm{IE} \times \mathrm{VO} - \mathrm{GE} \times \mathrm{VO} = \mathrm{IG} \times \mathrm{VO} = 2\,\mathrm{IH} \times \mathrm{VO} = 2\,\mathrm{VX} \times \mathrm{VO};$$

donc

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{IK} + \mathrm{YG} \times \mathrm{IK} = \mathrm{EL} \times \mathrm{VN} + 2\,\mathrm{VX} \times \mathrm{VO}.$$

Or la somme des produits du diamètre EL par les segments VN des tangentes dans le quart de cercle LVA représente le produit du diamètre par le quart de circonférence LVA, c'est-à-dire le double du demi-cercle LAE; d'autre part, la somme des rectangles $2VX \times VO$ ou, si l'on mène OZQ parallèle au diamètre, des rectangles $2VX \times XZ$ représente le demi-cercle LAE.

Donc l'aire de la cissoïde qui est équivalente à la double série de ces rectangles vaut évidemment le triple du demi-cercle.