BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

III. CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 8. Novembre 1901.

Séance du lundi 4. Novembre 1901.

Présidence de M. F. KREUTZ.

42. Le président donne la parole à M. L. MARCHLEWSKI pour prononcer l'éloge historique de Marceli Nencki.

Marceli Nencki, den wir mit Stolz zu unseren Landsleuten und Mitgliedern zählen, wurde am 15. Januar im Jahre 1847 im Königreich Polen, im Kreise Sieradz, geboren. Das Gymnasium absolvierte er im Jahre 1863 in Piotrków. Durch die politischen Verhältnisse gezwungen, verlässt er im Herbst desselben Jahres das Land, um nach Krakau zu gehen, wo er die Universität in der Absicht bezog, sich philologischen Studien zu widmen. Im Sommersemester des nächsten Jahres siedelte er nach Jena über, wo er seine philologischen Studien fortsetzte. Die Zeit von 1865—1867 verweilt er als Student an der Universität Berlin, sich seinen ursprünglichen Studien widmend, um aber dann im Wintersemester des Jahres 1867 sich dem Studium der Medicin zuzuwenden. Drei Jahre darauf wurde er zum Doctor der Medicin promoviert. Sodann widmet er sich zwei Jahre dem Studium der Chemie im Laboratorium v. Baeyer's in Berlin. Hierauf geht er nach Bern als Assistent am Lehrstuhl der patologischen Anatomie, um sich daselbst bald zu habilitieren. Im Jahre 1878 wurde er zum Professor der physiologischen Chemie ernannt. Im Jahre 1891 siedelte er nach St. Petersburg über, um die Leitung der chemischen Abtheilung im Institut für praktische Medicin zu übernehmen, eine Stelle, die er bis zu seinem Tode bekleidete.

In der kurzen mir zur Verfügung stehenden Zeit kann ich leider den Inhalt der glänzenden Arbeiten des verstorbenen Forschers nur in Kürze erwähnen. Eine erschöpfende Behandlung der von ihm erreichten Resultate würde die Zusammenfassung der Errungenschaften der modernen sog. physiologischen Chemie bedeuten. Es gab kein Thema auf diesem Gebiet, das er nicht gefördert hätte und zwar mit einem Geschick, einer Gründlichkeit und Umsicht, die Bewunderung erwecken müssen. Bereits seine Erstlingsarbeiten, die z. Th. gemeinschaftlich mit Otto Schulzen ausgeführt wurden, haben sich die grösste Anerkennung erworben. Eine derselben behandelte die Frage über Producte der Oxydation von aromatischen Kohlenwasserstoffen im thierischen Organismus, wobei das Resultat erhalten wurde, dass, kurz gesagt, der Oxydationsprocess ganz analog dem ausserhalb des Organismus studierten verläuft, dass aber die entstehenden Oxydationsproducte sofort mit anderen im Stoffwechsel auftretenden Körpern condensiert werden. So wird z. B. Toluol zu Benzoesäure oxydiert und in Verbindung mit Glycocoll als Hippursäure abgesondert. Aehnliches wurde bei den Versuchen mit Xylol und Mesytylen beobachtet. Bei der biologischen Oxydation des Cymols hatte Nencki schon damals eine auffallende Verschiedenheit in der Oxydierbarkeit der Seitenketten eines arom. Kohlenwasserstoffs beobachtet, dass nämlich die Propylgruppe leichter oxydiert wird als die Methylgruppe, wohingegen bei Oxydationen ausserhalb des Organismus das Entgegengesetzte beobachtet wurde.

In der zweiten erwähnten Arbeit stellte sich Nencki die Frage, aus welchen chem. Verbindungen der Harnstoff des Stoffwechsels enstehe, und beantwortete sie in glänzender Weise. Er fand, dass Säureamide zu dieser Umwandlung nicht fähig sind, und dass es die Aminosäuren sind, welche leicht in Harnstoff übergehen. Aus diesen experimentellen Ergebnissen entstanden dann die daraus entspringenden theoretisch so wichtigen Folgerungen, dass der vom thierischen Organismus assimilierte Stickstoff sich in der Nahrung in Form von Aminosäuren vorfindet, und dass die Eiweisskörper wahrscheinlich zur Gruppe von compl. Aminosäuren, bezw. Derivaten derselben zu zählen sind. Sodann wandte sich Nencki dem Studium der Harnsäure zu und, obwohl es ihm nicht gelang, die Constitution derselben festzustellen, so haben doch diese Bestrebungen eine Fülle von wichtigen Resultaten zu Tage gefördert, nämlich die nähere Kenntnis des Guanidins, des Thioharnstoffs, einer neuen Körperclasse der Guanamine und der Rhodaninsäure. Das Verhalten verschiedener Kohlenwasserstoffe im Organismus wurde von Nencki's Schülern fortgesetzt, sowie auch das Studium der chem. Natur des Amyloids aufgenommen. Im Jahre 1874 wandte sich Nencki der vom biologischen Standpunkt aus wichtigsten Körperclasse zu, nämlich den Eiweisskörpern, und gerade diese bahnbrechenden Arbeiten sind es, denen zufolge die Geschichte den Namen Nencki's zu den verdienstvollsten zählen muss. Die von ihm zur Autklärung der Natur dieser Körper angewandte Methode war eingenartig und basierte hauptsächlich auf dem Studium der Zersetzungsproducte derselben bei Fäulnisprocessen, sowie auch deren Spaltungsproducten, die vom lebenden Organismus abgesondert werden. So fand er unter den Fäulnisproducten von Gelatine eine Base „Collidin“, die sich als ω-Phenylaethylamin herausstellte, unter den des Eiweisses Isoleucin und Indol, in den Absonderungsproducten des Menschen Methylindol oder Skatol. Das Eiweissmolekel erwies sich hierbei als ein aus verschiedenartigsten Gebilden zusammengesetztes Molecül, unter denen drei Gruppen besonders in die Augen fallen, nämlich die Gruppe der p-Oxyphenylaminopropionsäure, der Phenylaminopropionsäure und der Skatolaminoessigsäure, welche bei der anaeroben Fäulnis unter Ammoniakabspaltung stickstofffreie Säuren liefern. Es liessen sich hierbei auch Verschiedenheiten in den stattfindenden Umwandlungen bemerken, je nach der Natur des studierten Proteinkörpers. Gelatine beispielsweise lieferte kein Indol oder Tyrosin, sondern nur Phenylaminopropionsäure. Ebenso wichtig waren Nencki's Studien in der Enzymchemie. Die oben skizzierten Resultate, die er beim Studium der Fäulnis von Eiweisstoffen erhielt, führten ihn zu der Annahme, dass die unter dem Einfluss von Bacterien erzielten Resultate in Wirklichkeit auf die von ihnen producierten Enzyme zurückzuführen seien. Besonders widmete er sich dem Studium der Wirkungen des Trypsins, und eine seiner letzten publicierten Arbeiten behandelte in meisterhafter Art das Pepsin. Durch das Studium der Zersetzung von Estern unter dem Einfluss von Trypsin kam er auf die Idee, zur localen Behandlung des Darmes Verbindungen anzuwenden, die den Magen unzersetzt passieren und erst im Darm Zersetzung erfahren würden, um dort die specifische Wirkung zu entfalten. Diesen Bestrebungen verdankt die Therapie das noch heute vielseitig angewandte Salol. Das Studium der tryptischen Verdauung des Eiweisses hat später eine geistreiche Hypothese ins Leben gerufen, die die stoffliche Ursache der chemischen Verwandschaft des Chlorophylls mit Blutfarbstoff aufzuklären anstrebt. Dem Studium der Enzyme verdanken wir auch die Aussage Nencki's, dass die Verdauungsprocesse sich ohne Mithilfe von Bacterien abspielen können, eine Ansicht, die von Pasteur bekämpft wurde, die aber später durch von Nencki veranlasste Experimente vollauf bestätigt wurde.

Dass die Enzyme zur Gruppe der Proteide zu zählen sind, hat er gemeinschaftlich mit seiner Assistentin Frau Sieber klar gemacht. Er wies nach, dass Toxine durch Verdauungsferment unschädlich gemacht werden, indem sie in Toxosen und Toxeide umgewandelt werden, die den Albumosen und Peptonen an die Seite zu stellen sind. Die bereits erwähnte Arbeit über Pepsin, die ebenfalls in Gemeinschaft mit Frau Sieber ausgeführt wurde, enthält eine Fülle von neuen Thatsachen. Das Enzym wurde in einem Zustand der Reinheit erhalten, der wohl schwerlich zu übertreffen sein wird. Als Spaltungsproduct desselben unter dem Einfluss von Säuren wurden Nukleoproteid, Lecithin und eine Protose erhalten. Es besitzt nicht nur die Eigenschaft, Eiweisskörper zu hydrolysieren, sondern dieselben auch zu koagulieren. Chlor hat sich als ein constituierender Bestandtheil des Pepsin herausgestellt.

Neben den oben schon berührten synthetischen Arbeiten müssen noch andere Erwähnung finden. So die Condensationen von Phenolen mit Säuren bei Anwesenheit von Wasser entziehenden Mitteln (Resacetophenon, Resaurin, Phenacetein) von Chinolin und Chinaldin mit Chlorketonen, Oksyketonen und Aldehydsäuren, endlich die erste Synthese des Indigotins durch Oxydation des Indols mittels activen Sauerstoffs.

Zu seinen brillantesten, mehr rein physiologischen Studien gehören die in neuester Zeit gemachten, sich an eine seiner ersten Arbeiten anlehnenden, die die Auffindung der Zwischenstufe bei der Harnstoffbildung im Organismus zum Ziele hatten. Bereits vor 30 Jahren wies er darauf hin, dass bei der Spaltung der als Aminosäuren aufgefassten Eiweisstoffe carbaminsaures Ammonium entstehen müsse, welches dann in Harnstoff übergehen könnte. Es gelang ihm jedoch damals nicht, diese Zwischenstufe im Organismus aufzufinden, und gegen die Richtigkeit der Annahme schien noch dazu der Umstand zu sprechen, dass carbaminsaures Ammon toxische Eigenschaften besitzt. Die Lösung des Räthsels gelang ihm gemeinschaftlich mit Pawlow. Dank dem Geschick des letztgenannten berühmten Physiologen gelang es bei Hunden durch Anlegung der Eck'schen Fistel die Leber aus dem Kreislauf auszuscheiden und bei den so operierten Thieren wurde dann im Harn reichlich carbaminsaures Ammonium aufgefunden. Eiweissnahrung erwies sich, wie zu erwarten war, in diesen Fällen geradezu giftig. Daraus wurde geschlossen, dass die Leber die Arbeit übernimmt, das primär gebildete carbaminsaure Ammon in Ammoniak umzuwandeln.

Ich gehe nun zur Besprechung von Arbeiten über, denen sich Nencki mit besonderer Liebe widmete, Studien, die er niemals aus dem Auge liess und die reich an Früchten waren. Es sind dies Studien, die sich auf einen der wichtigsten Bestandtheile der organisierten Welt beziehen, einen Bestandtheil, ohne den das Leben besonders höherer Thiere unmöglich wäre, nämlich das Blut. Der Gegenstand hatte für viele Forscher grossen Reiz, aber erst den Bestrebungen Nencki's haben wir es zu verdanken, dass die chem. Constitution des Blutfarbstoffs bald als aufgeklärt anzusehen sein wird. Dass es Nencki war, dem die Wissenschaft zu so grossem Danke verpflichtet ist, kann nicht wundern. Die Aufgabe war sehr schwer; auf Erfolg konnte nur ein Forscher rechnen, der an exactes Arbeiten gewöhnt ist, ein Forscher, dem die neuesten chemischen Forschungsmethoden vollständig geläufig waren, ein Forscher, der am Ausbau dieser Methoden selbst theilnehmen konnte. Nencki gehörte zu solchen Forschern. Die erste chemisch wichtige Beobachtung betreffs des Blutfarbstoffs wurde hier in Krakau gemacht, als Teichmann bewiesen hatte, dass der Farbstoff des Bluts unter dem Einfluss von Säuren in eine Eiweissubstanz und den eigentlichen Farbstoffträger, das Haemin gespalten wird. Nencki nahm neben anderen Forschern diese Beobachtung auf und bewies vor allem, dass das Haemin Teichmann's eine esterartige Verbindung ist, welche unter dem Einfluss von Alkalien verseift wird, und indem an Stelle z. B. des Chlors eine Hydroxylgruppe tritt. Die Zusammensetzung des Haemins wurde durch zahlreiche, mühevolle Analysen ermittelt und später eine ganze Reihe von Estern des Haematins dargestellt.

Aus dem Haemin gelang es Nencki sodann das Eisen vermittelst einer eleganten Reaction abzuscheiden und so zu einem der charakteristischsten Abkömmlinge des Haemoglobins zu gelangen, dessen Zusammensetzung verhältnismässig einfach ist, und dessen Constitutionbestimmung schon aus diesem Grunde auf Erfolg rechnen konnte. Ein neues Interesse gewann das Haematoporphyrin als von anderer Seite auf die grosse Aehnlichkeit desselben mit Phylloporphyrin, einem Abbauproducte des Chlorophylls hingewiesen wurde. Die Forscher, die die letztgenannten Beziehungen entdeckten, wiesen auf die grosse biologische Bedeutung dieser Thatsache hin und Nencki war in einer geistvollen Abhandlung imstande, auf die mögliche Ursache der nahen chemischen Verwandtschaft des Blutfarbstoffs und des Chlorophylls hinzuweisen. Er erinnerte an das von ihm näher studierte Proteinchrom, dessen Zusammensetzung an die des Haematoporphyrins erinnert, und dessen Muttersubstanz bei der tryptischen Verdauung des Eiweisses gebildet wird. Auf diese Beobachtungen gestützt schloss Nencki, dass das Eiweiss die Muttersubstanz für die Bildung des Blutfarbstoffs ist, welches unter dem Einfluss von theils synthetischen theils analytischen Vorgängen einen Complex bildet, den wir später im Blutfarbstoff wiederfinden. Da nun andererseits das pflanzliche Eiweiss dem thierischen sehr nahe steht, und die chemischen, in beiden Reichen verlaufenden Processe sich eher quantitativ als qualitativ unterscheiden, so müssen analoge Umwandlungen des Eiweisses auch zu analogen Endproducten führen. Nencki's Bestrebung war es nun' Haematoporphyrin in Phylloporphyrin umzuwandeln, um gar keine Zweifel über die Behauptung der oben erwähnten Forscher aufkommen zu lassen, und obwohl ihm diese Aufgabe nicht gelang, so haben die daraufhin gezielten Bestrebungen so wichtige Resultate ergeben, dass es ihm möglich war, die ersten Constitutionsformeln für Haematoporphyrin und Haematin aufzustellen. Durch Reduction des Haematoporphyrins gelangte er zunächst zum Mesoporphyrin und von diesem zu einer farblosen Substanz, für welche er es wahrscheinlich machte, dass sie Methyl-Propylpyrrol ist. Letzterer Körper oxydiert sich leicht unter Bildung von Urobilin. Die behauptete Verwandtschaft des Blutfarbstoffs mit dem Chlorophyll wurde dann endlich von Nencki gemeinschaftlich mit dem Verfasser dieser Zeilen dadurch endgiltig bewiesen, das Phyllocyanin in Haemopyrrol (Methyl-Propylpyrrol) umgewandelt werden konnte.

Diese flüchtige Aufzählung der Verdienste Nencki's um die Wissenschaft erschöpft natürlich auch nicht annähernd alles, was wir ihm wirklich verdanken. Indessen könnte auch eine sehr genaue chronologische Wiedergabe seiner Werke dieses Ziel nicht erreichen. Seine Errungenschaften werden auch für zukünftige Generationen in vielen Richtungen Pfadzeiger bei weiteren Forschungen sein, seine Ideen in den Wissenschaften fortleben, sein Einfluss fortbestehen. Dies ist die grösste Belohnung, die ein Forscher erhoffen darf. Nencki wird diese Belohnung in vollem Maase zutheil werden.

---

43. M. J. Puzyna présente le travail de M. J. RAJEWSKI: **O funkcyach hypergeometrycznych wyższego rzędu i ich przekształceniach.** ***(Ueber die hypergeometrischen Functionen höherer Ordnung und deren Degenerationen).*** *(Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur et sur les cas de dégénérescence de ces fonctions).*

Thomé [1]) und Goursat [2]) haben bewiesen, dass eine hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung:

$$F(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n; \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n; x) = 1 + \frac{\alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_n}{1 . \rho_2 \dots \rho_n} x + \\ + \frac{\alpha_1 (\alpha_1 + 1) \alpha_2 (\alpha_2 + 1) \dots \alpha_n (\alpha_n + 1)}{1. \quad 2. \quad \rho_2 (\rho_2 + 1) \dots \rho_n (\rho_n + 1)} x^2 + \dots \tag{1}$$

einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von der Form:

$$x^{n-1}(x-1)\frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-2}(a_1 x - r_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + x(a_{n-2}x - r_{n-2})\frac{d^2 y}{dx^2} + \\ + (a_{n-1}x - r_{n-1})\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \tag{2}$$

genügeleistet.

1) Thomé. Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen. Math. Annalen Bd. 2.

2) Goursat. Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Ann. de l'École Normale Ser. II t. XII.

L. Pochhammer[1]). hat die Coëfficienten $a_1, a_2 \dots a_n, r_1\, r_2 \dots r_{n-1}$, welche symmetrische Functionen der n Elemente $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, beziehungsweise der $n-1$ Elemente $\rho_2\, \rho_3 \dots \rho_n$ sind, berechnet und hat gezeigt, dass ausser der Reihe $F\,(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n ; \rho_2 \dots \rho_n ; x)$ noch $n-1$ andere hypergeometrische Reihen in der Umgebung des Punktes $x=0$ der Differentialgleichung (2) genügeleisten. Diese n Reihen können in der Form:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &x^{1-\rho_r} F(\alpha_1+1-\rho_r, \alpha_2+1-\rho_r, \dots \alpha_n+1-\rho_r ; 2-\rho_r, \dots \rho_n + \\ &+1-\rho_r ; x), r=1, 2 \dots n, \rho_1=1 \end{aligned}$$

dargestellt werden.

Weiter hat Herr L. Pochhammer[2]) gezeigt, dass in der Umgebung des Punktes $x=\infty$ n folgende hypergeometrische Reihen der Differentialgleichung (2) genügeleisten:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &x^{-\alpha_s} F\,(\alpha_s, \alpha_s+1-\rho_2, \dots \alpha_s+1-\rho_n ; \alpha_s+1-\alpha_1, \dots \\ &\dots \alpha_s+1-\alpha_n ; x^{-1}), s=1, 2 \dots n. \end{aligned}$$

Setzt man in der Differentialgleichung (2) $x=\dfrac{\xi}{\alpha_n}, |\alpha_n|=\infty$, so entsteht die Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\xi^{n-1}\frac{d^n y}{d\xi^n}+\xi^{n-2}(r_1-\xi)\frac{dy^{n-1}}{d\xi^{n-1}}+\xi^{n-3}(r_2-a_1'\xi)\frac{d^{n-2}y}{d\xi^{n-2}}+\dots \\ &\dots+\xi\,(r_{n-2}-a'_{n-3}\,\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(r_{n-1}-a'_{n-2}\,\xi)\frac{dy}{d\xi}-a'_{n-1}y=0 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (5) gehört nicht zu der Fuchs'schen Classe, und hat den Punkt $\xi=\infty$ zum Punkte der Unbestimmtheit der Integrale.

Auch diese Differentialgleichung haben Goursat[3]) und L. Pochhammer[4]) behandelt; der letzte hat die Coëfficienten $a_1'\, a_2' \dots a'_{n-1}, r_1, r_2 \dots r_{n-1}$ berechnet, und die n Elemente der Integrale von

[1]) L. Pochhammer. Ueber die Differentialgleichung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. Crellés Journal. Bd. 102.

[2]) l. c.

[3]) Goursat l. c.

[4]) L. Pochhammer. Ueber eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte. Crélles Journal Bd. 108. Siehe auch:

L. Pochhammer. Ueber die Differentialgleichung der allgemeinen F-reihe Math. Annalen Bd. 38.

der Umgebung des Punktes $x=0$ in der Form der beständig convergierenden Reihen:

$$\xi^{1-\rho_r} F(\alpha_1+1-\rho_r, \alpha_2+1-\rho_r, \ldots a_{n-1}+1-\rho_r; 2-\rho_r, \ldots \rho_n + \\ + 1-\rho_r; \xi), r=1, 2, \ldots n \tag{6}$$

bestimmt.

Die zu dem Punkte $\xi=\infty$ der Unbestimmtheit der Integrale der Differentialgleichung (2) gehörigen n assymptotischen Reihen findet man in diesem Berichte unter (33) und (33)'.

Setzt man in der Differentialgleichung (2) $x=\rho_n\xi$, $|\rho_n|=\infty$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\xi^n \frac{d^n y}{d\xi^n} + \xi^{n-2}(a_1\xi - 1)\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \xi^{n-3}(a_2\xi - r_1')\frac{d^{n-2}y}{d\xi^{n-2}} + \ldots \\ \ldots + \xi(a_{n-2}\xi - r'_{n-3})\frac{d^2y}{d\xi^2} + (a_{n-1}\xi - r'_{n-2})\frac{dy}{d\xi} + a_n y = 0. \tag{7}$$

Die Coëfficienten a_1, $a_2 \ldots a_n$ sind dieselben, wie in der Differentialgleichung (2), und die Coëfficienten r_1', r_2', $\ldots r'_{n-2}$ sind symmetrische Functionen, welche auf dieselbe Weise aus $n-2$ Elementen $\rho_2\ \rho_3 \ldots \rho_{n-1}$ gebildet sind, wie die Coëfficienten a_1, $a_2 \ldots a_n$ aus n Elementen α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Auch diese Differentialgleichung gehört nicht zu der Fuchs'schen Classe, und $\xi=0$ ist der Punkt der Unbestimmtheit der Integrale.

Die zu dem Punkte $\xi=0$ der Unbestimmtheit der Integrale der Differentialgleichung (7) gehörigen assymptotischen Reihen findet man in diesem Berichte unter (50) und (51), das zu dem Punkte $\xi=\infty$ gehörige Fundamentalsystem der Integrale unter (52).

Die Hauptaufgabe, welche sich der Verfasser in dieser Abhandlung stellte, war, im Falle der allgemeinen α und ρ, die zu dem Wege $(0\,\infty)$ der Integrale der Differentialgleichungen (2), (5) und (7) gehörigen Uebergangssubstitutionen zu bestimmen.

Da die zu den Punkten der Unbestimmtheit der Integrale der Differentialgleichungen (5) und (7) gehörigen assymptotischen Reihen, wie im folgenden bewiesen wird, sich mittelst der Uebergangssubstitutionen durch convergente Reihen darstellen lassen, so folgt daraus, dass eine divergente Reihe, welche der Differentialgleichung (5) oder (7) formal genügeleistet, ähnlich wie eine Reihe mit endlichem Convergenzbereiche eine analytische Function definiert.

Da jedoch eine divergente Reihe (oder eigentlich eine nur in einem Punkte convergierende Reihe) der Natur der Sache nach nicht fortgesetzt werden kann, so bleibt als der einzige Weg zur Bestimmung der durch die divergente Reihe definierten analytischen Function ausserhalb des Convergenzpunktes der Reihe die Auffindung der zu den singulären Punkten der linearen Differentialgleichung (5) beziehungsweise (7) gehörigen Fundamentalsysteme der Integrale. Durch diese Integrale wird die durch diese Reihe definierte Function homogen und linear mit den aufgesuchten Substitutionscoëfficienten dargestellt.

Im ersten Abschnitte beschäftigt sich der Verfasser mit der hypergeometrischen Reihe mit 2n Elementen:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \rho_2, \rho_3 \ldots \rho_n; x).$$

Setzt man: $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\lambda-1)=|\alpha|_\lambda$, so erhält diese Reihe folgende Form:

$$(8)\quad \begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \rho_2, \rho_3 \ldots \rho_n; x) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{|\alpha_1|_\lambda |\alpha_2|_\lambda \ldots |\alpha_n|_\lambda}{|1|_\lambda |\rho_2|_\lambda \ldots |\rho_n|_\lambda} x^\lambda = \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{|\alpha_\mu|_\lambda}{|\rho_\mu|_\lambda} . x^\lambda, \ \rho_1 = 1 \end{aligned}$$

Was das Symbol $|\alpha|_\lambda$ betrifft, so hat man:

$$(9)\qquad |\alpha|_\lambda = \frac{|\alpha|_{\lambda+1}}{\alpha+\lambda}, \quad |\alpha|_1 = \alpha, \quad |\alpha|_0 = 1$$

$$(10)\qquad |\alpha|_{-1} = \frac{1}{\alpha-1} = \frac{-1}{1-\alpha}; \ |\alpha|_{-2} = \frac{(-1)^2}{|1-\alpha|_2}, \ldots \ |\alpha|_{-\lambda} = \frac{(-1)^\lambda}{|1-\alpha|_\lambda}.$$

$$(11)\quad |1|_\lambda = \lambda!, \ |1|_1 = 1, \ |1|_0 = 1; \ |1|_{-1} = \frac{1}{\varepsilon}, \ \varepsilon = 0; \ |1|_{-\lambda} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{|1|_{\lambda-1} . \varepsilon}, \ \varepsilon = 0.$$

Weiter ist:

$$(12)\quad |\alpha|_\lambda = \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)}, \ |1|_\lambda = \Gamma(\lambda+1); \ |\alpha|_{-\alpha} = \frac{(-1)^\lambda}{|1-\alpha|_\lambda} = (-1)^\lambda \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+\lambda)}$$

Ist α eine negative ganze Zahl, so ist:

$$(13)\ |\alpha|^{-\alpha} = (-1)^{-\alpha} |1|_{-\alpha}, \text{ und für } \lambda > -\alpha: |\alpha|_\lambda = (-1)^{-\alpha} |1|_{-\alpha} \varepsilon . |1|_{\alpha+\lambda-1}, \ \varepsilon = 0.$$

Ist α eine positive ganze Zahl, so hat man:

$$(14)\quad |\alpha|_{-\alpha} = -\frac{1}{(1)_{\alpha-1}\varepsilon}, \ \varepsilon = 0; \ \text{für } \lambda > \alpha: \ |\alpha|_{-\lambda} = \frac{(-1)^{1-\alpha+\lambda}}{|1|_{\alpha-1} |1|_{\lambda-\alpha} . \varepsilon}, \ \varepsilon = 0.$$

Angenommen, dass die Argumente $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n; \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n$ in der unedlichen Reihe $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \rho_2, \rho_3, \dots \rho_n; x)$ negative und ganze Zahlen sind, deren absolute Werte den Ungleichungen

$$|\alpha_{r_1}| < |\rho_{s_1}|, < |\alpha_{r_2}| < |\rho_{s_2}| \cdots |\alpha_{r_{n-1}}| < |\rho_{s_{n-1}}| < |\alpha_{r_n}| \tag{15}$$

genügen, so bekommt man mit Rücksicht auf die Gleichungen (13) folgende Relation:

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \rho_2 \dots{}_n \rho; x)_{0,\infty} &= F(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n; \rho_2 \dots \rho_n; x)_{0,-\alpha_r} + \\ + C_1 x^{1-\rho_{s_1}} & F(\alpha_1 + 1 - \rho_{s_1}, \alpha_2 + 1 - \rho_{s_1}, \dots \alpha_n + 1 - \rho_{s_1}; 2 - \rho_{s_1}, \dots \rho_n + 1 - \rho_{s_1}; x)_{0,-(\alpha_{r_2}+1-\rho_{s_1})} \\ + C_2 x^{1-\rho_{s_2}} & F(\alpha_1 + 1 - \rho_{s_2}, \alpha_2 + 1 - \rho_{s_2}, \dots \alpha_n + 1 - \rho_{s_2}; 2 - \rho_{s_2}, \dots \rho_n + 1 - \rho_{s_2}; x)_{0,-(\alpha_{r_3}+1-\rho_{s_2})} \\ &\vdots \\ + C_{n-1} x^{1-\rho_{s_{n-1}}} & F(\alpha_1 + 1 - \rho_{s_{n-1}}, \alpha_2 + 1 - \rho_{s_{n-1}}, \dots \alpha_n + 1 - \rho_{s_{n-1}}; 2 - \rho_{s_{n-1}}, \dots \rho_n + 1 - \rho_{s_{n-1}}; x)_{0,-(\alpha_{r_n}+1-\rho_{s_{n-1}})} \end{aligned} \tag{16}$$

wo $C_1\ C_2, \dots C_{n-1}$ beliebige Constanten, und $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2} \dots \alpha_{r_n}; \rho_{s_1}\ \rho_{s_2} \dots \rho_{s_{n-1}}$ eine Permutation der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \rho_2, \rho_3 \dots \rho_n$ bedeuten.

Sind also die Argumente α und ρ ganze und negative Zahlen, welche die Bedingungen (15) erfüllen, so erhält man aus einer unendlichen Reihe $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \rho_2 \dots \rho_n; x)$ n verschiedene Reihen, welche ganze und rationale Functionen sind, und welche sich nicht linear durch einander darstellen lassen. Diese Reihen bleiben auch dann von einander unabhängig, wenn diese Argumente allgemein sind und, keine der Differenzen $\rho_r - \rho_s$, für $r \neq s$ eine ganze Zahl ist. Diese n Reihen können also als ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung betrachtet werden.

Alle Reihen der Gleichung (16) rechts lassen sich in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} x^{1-\rho_r} F(\alpha_1 + 1 - \rho_r, \alpha_2 + 1 - \rho_r, \dots \alpha_n + 1 - \rho_r; 2 - \rho_r, \dots \rho_n + 1 - \rho_r; x) &= \\ = x^{1-\rho_r} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{|\alpha_\mu + 1 - \rho_r|_\lambda \cdot x^\lambda}{|\rho_\mu + 1 - \rho_r|_\lambda}, \quad r = 1, 2, \dots n, \ \rho_1 = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

Betrachtet man die Reihe $F(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n; \rho_2, \dots \rho_n; x)$ als Summe von $-\infty$ bis $+\infty$, und nimmt α_1 ganzzahlig und positiv an, so bekommt man mit Rücksicht auf die Gleichungen (14):

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \rho_2 \dots \rho_n; x)_{-\infty,+\infty} &= F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \rho_2 \dots \rho_n; x)_{0,\infty} + \\ + C x^{-\alpha_1} F(\alpha_1, \alpha_1 + 1 - \rho_2, \dots \alpha_1 + 1 - \rho_n; & \ \alpha_1 + 1 - \alpha_2, \dots \alpha_1 + 1 - \alpha_n; x^{-1})_{0,\infty} \end{aligned} \tag{18}$$

wo C eine beliebige Constante bedeutet.

Wenn man endlich in der Reihe: $x^{-\alpha_1} F(\alpha_1, \alpha_1+1-\rho_2, \ldots \alpha_1+1-\rho_n; \alpha_1+1-\alpha_2, \ldots \alpha_1+1-\alpha_n; x^{-1})_{0,\infty}$ die Argumente $\alpha_1, \alpha_1+1-\rho_2, \ldots \alpha_1+1-\rho_n;\ \alpha_1+1-\alpha_2, \ldots \alpha_1+1-\alpha_n$ ganzzahlig und negativ annimmt, welche noch die Bedingungen:

$$\text{(19)} \quad \begin{aligned} &|\alpha_1+1-\rho_{r_1}|<|\alpha_1+1-\alpha_{s_1}|<|\alpha_1+1-\rho_{r_2}|<|\alpha_1+1-\alpha_{s_2}|\ldots \\ &\ldots|\alpha_1+1-\rho_{r_{n-1}}|<|\alpha_1+1-\alpha_{s_{n-1}}|<|\alpha_1+1-\rho_{r_n}|;\ \rho_1=1 \end{aligned}$$

erfüllen, so bekommt man:

$$\text{(20)} \quad \begin{aligned} & x^{-\alpha_1} F(\alpha_1, \alpha_1+1-\rho_2,\ldots\alpha_1+1-\rho_n;\alpha_1+1-\alpha_2,\ldots\alpha_1+1-\alpha_n;x^{-1})_{0,\infty} \\ = {} & x^{-\alpha_1} F(\alpha_1, \alpha_1+1-\rho_2,\ldots\alpha_1+1-\rho_n;\alpha_1+1-\alpha_2,\ldots\alpha_1+1-\alpha_n;x^{-1})_{0,-(\alpha_1+1-\rho_{r_1})} + \\ + {} & C_1\, x^{-\alpha_{s_1}} F(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_1}+1-\rho_2,\ldots\alpha_{s_1}+1-\rho_n;\alpha_{s_1}+1-\alpha_1,\ldots\alpha_{s_1}+1-\alpha_n;x^{-1})_{0,-(\alpha_{s_1}+1-\rho_{r_2})} + \\ + {} & C_2\, x^{-\alpha_{s_2}} F(\alpha_{s_2}, \alpha_{s_2}+1-\rho_2,\ldots\alpha_{s_2}+1-\rho_n;\alpha_{s_2}+1-\alpha_1,\ldots\alpha_{s_2}+1-\alpha_n;x^{-1})_{0,-(\alpha_{s2}+1-\rho_{r_3})} + \\ & \vdots \\ + {} & C_{n-1} x^{-\alpha_{s_{n-1}}} F(\alpha_{s_{n-1}}, \alpha_{s_{n-1}}+1-\rho_2,\ldots\alpha_{s_{n-1}}+1-\rho_n;\alpha_{s_{n-1}}+1-\alpha_1,\ldots\alpha_{s_{n-1}}+1-\alpha_n;x^{-1})_{0,-(\alpha_{s_{n-1}}+1-\rho_n)} \end{aligned}$$

wo $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ beliebige Constanten bedeuten.

Die Reihen (20) rechts, welchen man folgende Form geben kann:

$$x^{-\alpha_s} F(\alpha_s, \alpha_s+1-\rho_2, \ldots \alpha_s+1-\rho_n; \alpha_s+1-\alpha_1, \ldots \alpha_s+1-\alpha_n; x^{-1}) = $$
$$= x^{-\alpha_s} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{|\alpha_s+1-\rho_\mu|_\lambda}{|\alpha_s+1-\alpha_\mu|_\lambda} x^{-\lambda}, \qquad \rho_1=1,\ s=1,\ 2, \ldots n$$

sind im Falle, wenn Argumente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n;\ \rho_2, \rho_3 \ldots \rho_n$ die Bedingungen (19) erfüllen oder allgemein sind, und dabei keine der Differenzen $\alpha_r - \alpha_s$ für $\alpha_r \neq \alpha_s$ eine ganze Zahl ist, von einander unabhängig, und können als Elemente eines Fundamentalsystems der Integrale einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung betrachtet werden.

Im zweiten Abschnitt beschäftigt sich der Verfasser mit den Uebergangssubstitutionen der Integrale der Differentialgleichung:

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} & x^{n-1}(x-1)\frac{d^n y}{dx_u} + x^{n-2}(a_1 x - r_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + x(a_{n-2}x - r_{n-2})\frac{d^2 y}{dx^2} + \\ & + (a_{u-1}x - r_{n-1})\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem der Integrale von der Umgebung des Punktes $x=0$ ist [1])

$$y_{or}=x^{1-\rho_r}\, F(\alpha_1+1-\rho_r, \alpha_2+1-\rho_r, \dots \alpha_n+1-\rho_r; 2-\rho_r, \dots \rho_n+1-\rho_r; x)=$$
$$=x^{1-\rho_r}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{n}\frac{|\alpha_\mu+1-\rho_r|_\lambda\, x^\lambda}{|\rho_\mu+1+\rho_r|_\lambda}, \quad r=1,\,2,\,\dots\, n,\ \rho_1=1 \tag{17}$$

und von der Umgebung des Punktes $x=\infty$

$$y_{\infty s}=x^{-\alpha_s}\, F(\alpha_s, \alpha_s+1-\rho_2, \dots \alpha_s+1-\rho_n; \alpha_s+1-\alpha_1, \dots \alpha_s+1-\alpha_n; x^{-1})=$$
$$=x^{-\alpha_s}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{n}\frac{|\alpha_s+1-\rho_\mu|_\lambda\, x^\lambda}{|\alpha_s+1-\alpha_\mu|_\lambda}, \quad \rho_1=1,\ s=1,\,2,\,\dots\, n. \tag{21}$$

Um die zu dem Wege $(0\,\infty)$ gehörigen Uebergangssubstitutionen zu finden, setze man:

$$y_{or}=\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, y_{\infty s},\ r=1,\,2,\,\dots\, n \tag{22}$$

und

$$y_{\infty s}=\sum_{r=1}^{n} a'_{sr}\, y_{or},\ s=1,\,2,\,\dots\, n. \tag{23}$$

Ist $\alpha_z+1-\rho_r$ eine ganze und negative Zahl, dann ist das Integral y_{or} ein Product aus $x^{1-\rho_r}$ und einer ganzen rationalen Function, und das Integral $y_{\infty s}$ ist das Product aus $x^{-\alpha_s}$ und einer ganzen rationalen Function Die beiden Integrale unterscheiden sich nur durch constanten Factor. Es ist also:

$$y_{or}=a_{rs}\, y_{\infty s} \text{ und } y_{\infty s}=a'_{sr}\, y_{or}.$$

a_{rs} ist der Coëfficient des letzten Gliedes von y_{or}, während a'_{sr} der Coëfficient des letzten Gliedes von $y_{\infty s}$ ist.

Es ist:

$$a_{rs}=\prod_{\mu=1}^{n}\frac{|\alpha_\mu+1-\rho_r|_{-(\alpha_s+1-\rho_r)}}{|\rho_\mu+1-\rho_r|_{-(\alpha_s+1-\rho_r)}}$$

und:

$$a'_{sr}=\prod_{\mu}^{n}\frac{|\alpha_s+1-\rho_\mu|_{-(\alpha_s+1-\rho_r)}}{|\alpha_s+1-\rho_\mu|_{-(\alpha_s+1-\rho_r)}}$$

[1]) L. Pochhammer, l. c.

und wenn man die Gleichungen (12) berücksichtigt, so bekommt man:

$$(24) \qquad a_{rs} = e^{-\pi i(\alpha_s + 1 - \rho_r)} \underset{\mu=1}{\overset{n}{\prod_{s}}}{}' \frac{\Gamma(\alpha_\mu - \alpha_s)}{\Gamma(\alpha_\mu + 1 - \rho_r)} \underset{\mu=1}{\overset{n}{\prod_{r}}}{}' \frac{\Gamma(\rho_\mu + 1 - \rho_r)}{\Gamma(\rho_\mu - \alpha_s)}, \quad \rho_1 = 1$$

und:

$$(25) \qquad a'_{sr} = e^{-\pi i(\alpha_s + 1 - \rho_r)} \underset{\mu=1}{\overset{n}{\prod_{r}}}{}' \frac{\Gamma(\rho_r - \rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s + 1 - \rho_\mu)} \underset{\mu=1}{\overset{n}{\prod_{s}}}{}' \frac{\Gamma(\alpha_s + 1 - \alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r - \alpha_\mu)}, \quad \rho_1 = 1$$

Der Strich bei Π und der Buchstabe r beziehungsweise s in den Producten (24) und (25) haben daran zu erinnern, dass in diesen Producten $\mu \neq r$ beziehungsweise $\mu \neq s$ ist.

Die Substitutionscoëfficienten a_{rs} (22) und a'_{sr} in (23) müssen die Bedingung erfüllen, dass im Falle, wenn $\alpha_s + 1 - \rho_r$ eine negative ganze Zahl ist, alle Substitutionscoëfficienten $a_{r\sigma}$ für $\sigma \neq s$ gleich Null seien, und nur der Coëfficient a_{rs} den Wert (24) habe: ebenso müssen alle Substitutionscoëfficienten $a'_{s\tau}$ für $\tau \neq r$ in diesem Falle gleich Null sein, und nur der Coëfficient a'_{sr} den Wert (25) haben. Diese Bedingung wird jedenfalls erfüllt, wenn man allen Substitutionscoëfficienten a_{rs} $(r, s = 1, 2, \ldots n)$ die Form (24) und allen Substitutionscoëfficienten a'_{sr} die Form (25) giebt. Man kann sonst die Substitutionscoëfficienten a'_{sr} aus a_{rs} berechnen. Bezeichne man die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit D und die zu dem Elemente a_{rs} gehörige Unterdeterminante mit A_{rs}, so kann man durch Folgerung von n auf $n + 1$ folgende Beziehungen beweisen:

$$(26) \quad D = e^{-\pi i\left(\sum\limits_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu + n - \sum\limits_{\mu=1}^{n} \rho_\mu\right)} \frac{\prod(\rho_\mu - \rho_\nu)}{\prod(\alpha_\mu - \alpha_\nu)}, \rho_1 = 1, \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, .. n)$$

und

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} e^{-\pi i\left(\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}'_{s} \alpha_\mu + n - 1 - \sum\limits_{\mu=1}^{n}{}'_{r} \rho_\mu\right)} \underset{\mu=1}{\overset{n}{\prod_{r}}}{}' \frac{(\Gamma\rho_r + 1 - \rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s + 1 - \rho_\mu)} \underset{\mu=1}{\overset{n}{\prod_{s}}} \frac{\Gamma'(\alpha_s - \alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r - \rho_\mu)} \cdot$$

$$(27) \qquad \cdot \frac{\prod_{r}{}'(\rho_\mu - \rho_\nu)}{\prod_{s}{}'(\alpha_\mu - \alpha_\nu)}, \quad \begin{matrix} \rho_1 = 1 \\ \mu < \nu \\ (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \end{matrix}$$

Wenn man jetzt a'_{sr} auf Grund der Relation $a'_{sr} = \frac{A_{rs}}{D}$ berechnet, so erhält man für a'_{tr} die Form (25).

Wir haben also die zu dem Wege (0∞) gehörigen Uebergangssubstitutionen:

$$S = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \\ a_{n1}, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } S^{-1} = \begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12} \dots a'_{1n} \\ a'_{21}, a'_{22} \dots a'_{2n} \\ . \quad . \quad . \\ a'_{n1}, a'_{n2} \dots a'_{nn} \end{vmatrix} \tag{28}$$

daneben die Substitution:

$$\Omega_0 = \begin{vmatrix} 1, 0, \dots 0 \\ 0 \;\; \varepsilon_2 \dots 0 \\ . \quad . \quad . \\ 0 \;\; 0 \quad \varepsilon_n \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_r = e^{2\pi i(1-\rho_r)}, \tag{29}$$

welche das Fundamentalsystem $|y_{or}|$ beim Umlauf um den Punkt $x = 0$ erleidet, und noch die Substitution

$$\Omega_\infty = \begin{vmatrix} \varepsilon', 0 \dots 0 \\ 0, \varepsilon'_2 \dots 0 \\ . \quad . \quad . \\ 0, 0 \dots \varepsilon'_n \end{vmatrix}, \quad \varepsilon'_s = e^{2\pi i \alpha_s}, \tag{30}$$

welche das Fundamentalsystem $|y_{\infty s}|$ beim Umlauf um den Punkt $x = \infty$ erleidet.

Durch Composition und Iteration der Substitutionen Ω_0 und $S\Omega_\infty S^{-1}$ bekommt man die Werte aller Zweige der vieldeutigen Functionen des Fundamentalsystems $|y_{or}|$, ebenfalls durch die Composition nnd Iteration der Substitutionen Ω_∞ und $S^{-1}\Omega_0 S$ erhält man die Werte aller Zweige der vieldeutigen Functionen des Fundamentalsystems $|y_{\infty s}|$. Der Umlauf um den Punkt $x = 1$, in dessen Umgebung die Elemente der Integrale der Differentialgleichung (2) eine nicht so durchsichtige Form haben, wie in der Umgebung der Punkte $x = 0$ und $x = \infty$, ist nicht nothwendig, da er den hintereinander auszuführenden negativen Umlaufen um die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ aequivalent ist und zu keinen neuen Zweigen der vieldeutigen Functionen $|y_{or}|$ beziehungsweise $|y_{\infty s}|$ führt.

Die zu dem Punkte $x = 1$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2) ist:

$$(31)\qquad \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2)(\rho-n+1+a_1-r_1)=$$
$$=\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2)(\rho+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-\rho_2-\rho_3\ldots\rho_n)=0.$$

Man sieht, dass alle Integrale der Differentialgleichung (2) ausser dem letzten, welches zum Exponenten:

$\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n=\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu$ gehört, im Punkte $x=1$ regulär sind.

Man kann den Elementen (17) und (21) auch folgende Form geben:

$$(17)'\qquad y_{or}=x^{1-\rho_r}(1-x)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}P_{or}(x),\quad r=1,2,\ldots n.$$

und

$$(21)'\qquad y_{\infty s}=x^{-\alpha_s}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}P_{\infty s}\left(\frac{1}{x}\right),\quad s=1,2,\ldots n.$$

wo $P_{or}(x)$ und $P_{\infty s}\left(\frac{1}{x}\right)$ Potenzreihen sind, deren Coëfficienten sich leicht aus den Coëfficienten der Elemente (17) beziehungsweise (21) berechnen lassen.

Im dritten Abschnitte behandelt der Verfasser die Integrale der Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \xi^{n-1}\frac{d^n y}{d\xi^n}+\xi^{n-2}(r_1-\xi)\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-2}}+\xi^{n-3}(r_2-a'_1\xi)\frac{d^{n-2}y}{d\xi^{n-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\xi(r_{n-2}-a'_{n-3}\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(r_{n-1}-a'_{n-2}\xi)\frac{dy}{d\xi}-a'_{n-1}y=0$$

Diese Differentialgleichung entsteht aus der Differentialgleichung (2), wenn man $x=\frac{\xi}{\alpha_n}$, $|\alpha_n|=\infty$ setzt, wodurch die beiden Punkte $x=0$ und $x=\infty$ der Differentialgleichung (2) in den Punkt $\xi=\infty$ zusammenfallen, was ich als Degeneration der Differentialgleichung (2) bezeichne.

Setzt man in den Gleichungen (17) $x=\frac{\xi}{\alpha_n}$, $|\alpha_n|=\infty$, und lässt die constanten Coëfficienten $\frac{1}{\alpha_n^{1-\rho_r}}$ weg, so erhält man die Elemente der Integrale der Differentialgleichung (5) von der Umgebung des Punktes $\xi=0$

$$y_{or}=\xi^{1-\rho_r}F(\alpha_1+1-\rho_r,\alpha_2+1-\rho_r,\ldots\alpha_{n-1}+1-\rho_r;2-\rho_r,\ldots\rho_n+1-\rho_r;\xi)=$$
$$=\xi^{1-\rho_r}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\prod_{\mu=1}^{n-1}|\alpha_\mu+1-\rho_r|_\lambda\,\xi^\lambda}{\prod_{\mu=1}^{n}|\rho_\mu+1-\rho_r|_\lambda},\quad r=1,2,\ldots n,\ \rho_1=1. \tag{32}$$

Jedes Element $y_{or}\,(r=1,2,\ldots n)$ ist ein Product aus $\xi^{1-\rho_r}$ und einer beständig convergierenden Reihe. Soll das Integral y_{or} algebraisch sein. so muss vor allem die beständig convergierende Reihe sich auf eine ganze rationale Function reduzieren. Dies ist nur auf diese Weise möglich, dass eine der Zahlen $\alpha_s+1-\rho_r$ $(s=1,2,\ldots n-1)$ ganz und negativ wird. Da man nur $n-1$ Argumente $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{n-1}$ zur Verfügung hat, so ist leicht ersichtlich, dass höchstens $n-1$ Integrale der Differentialgleichung (5) algebraisch gemacht werden können, und dass mindestens ein Integral transcendent bleiben muss.

Die $n-1$ Elemente der Integrale der Differentialgleichung (5) von der Umgebung des Punktes $\xi=\infty$ der Unbestimmtheit der Integrale erhält man, wenn man in den Gleichungen (21) $x=\dfrac{\xi}{\alpha_n}$, $|\alpha_n|=\infty$ setzt und die constanten Coëfficienten $\alpha_n^{\alpha_s}$ weglässt. Man hat also:

$$y_{\infty s}=\xi^{-\alpha_s}F(\alpha_s,\alpha_s+1-\rho_2,\ldots\alpha_s+1-\rho_n;\alpha_s+1-\alpha_1,\ldots\alpha_s+1-\alpha_{n-1};-\xi^{-1})=$$
$$=\xi^{-\alpha_s}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\prod_{\mu=1}^{n}|\alpha_s+1-\rho_\mu|_\lambda\,(-\xi)^\lambda}{\prod_{\mu=1}^{n-1}|\alpha_s+1-\alpha_\mu|_\lambda},\quad \rho_1=1,\ s=1,2,\ldots n-1. \tag{33}$$

Jedes Element $y_{\infty s}\,(s=1,2\ldots n-1)$ ist ein Product aus $\xi^{-\alpha_s}$ und einer Reihe, welche, wenn sie sich nicht auf eine ganze rationelle Function reduziert, nur in einem Punkte $\xi=\infty$ convergiert, und sonst divergent ist. Man sieht leicht, dass höchstens diese $n-1$ Elemente algebraisch werden können. Ist das Integral $y_{\infty s}$ algebraisch, so ist es immer mit einem entsprechenden Integral y_{or} bis auf den constanten Factor identisch.

Das n^{te} Element der Gleichungen (21) verliert für $x=\dfrac{\xi}{\alpha_n}$ $|\alpha_n|=\infty$ jeden Sinn.

Der Verfasser beweist weiter, dass man solche nur in einem Punkte convergierende Reihen als Grenzfall der ausserhalb beziehungsweise innerhalb eines Kreises und auf dessen Umfange convergierenden Reihen betrachten kann. Ist eine Reihe ausserhalb oder innerhalb eines Convergenzkreises mit veränderlichem Convergenzradius, und auf dem Umfange dieses Kreises convergent, so bleibt sie auch dann convergent, wenn der Radius ins Unendliche wächst beziehungsweise bis auf Null zusammenschrumpft. Ist eine solche Reihe auf dem Umfange des Convergenzkreises divergent, so verliert sie jeden Sinn, wenn der Radius ins Unendliche wächst beziehungsweise bis Null verkleinert wird.

Das n^{tl} zu dem Punkte $\xi = \infty$ gehörige Element des Integrals der Differentialgleichung (5) erhält man aus den Gleichungen (21)'. Man hat dort für $s = n$

$$y_{\infty n} = x^{-\alpha_n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\rho_\mu} P_{\infty,n}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= (x-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} \, . \, x^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} P_{\infty n}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Man setze $x = \frac{\xi}{\alpha_n}$, $|\alpha_n| = \infty$, und berücksichtige, dass

$$x - 1 = \frac{\xi}{\alpha_n} - 1 = \frac{\xi - \alpha_n}{\alpha_n} = \frac{\alpha_n - \xi}{-\alpha_n} = \frac{1 - \frac{\xi}{\alpha_n}}{-1}$$

$$(x-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} = (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu - \sum\limits_{\mu=2}^{n}} \left(1 - \frac{\xi}{\alpha_\mu}\right)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} =$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\upsilon - \sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu} e^{\xi}.$$

dann erhält man nach Weglassung des constanten Coëfficienten

$$\frac{(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu - \sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu}}{\alpha_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu - \sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu}} :$$

(33)' $$y_{\infty n} = \xi^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu - \sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu} e^{\xi} \bar{P}_{\infty n}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

Die zu dem Wege $(0\,\infty)$, gehörigen Uebergangssubstitutionen erhält man aus den Substitutionen (24) und (25), wenn man berücksichtigt, dass für $x=\frac{\xi}{\alpha_n}$ und $|\alpha_n|=\infty$, $y_{or}(r=1,2,\dots n)$ den Coëfficienten $\frac{1}{\alpha_n^{1-\rho_r}}$, $y_{\infty s}$ für $s=1,2\dots n-1$ den Coëfficienten $\alpha_n^{\alpha_s}$ und endlich $y_{\infty n}$ den Coëfficienten $\frac{(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu-\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu}}{\alpha_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu-\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu}}$ bekommt.

Man setze also:

$$y_{or}=\sum_{s=1}^{n} b_{rs}\,y_{\infty s}, \quad r=1,2,\dots n. \tag{34}$$

und

$$y_{\infty s}=\sum_{r=1}^{n} b'_{sr}\,y_{or}, \quad s=1,2,\dots n. \tag{35}$$

dann ist:

$$b_{rs}=a_{.s}\,\alpha_n^{\alpha_s+1-\rho_r}=e^{-\pi i(\alpha_s+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{(s)}\frac{\Gamma(\alpha_\mu-\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_\mu+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{(r)}\frac{\Gamma(o_\mu+1-\rho_r)}{\Gamma(\rho_\mu-\alpha_s)}\cdot\alpha_s^{\alpha_s+1-\rho_r}$$

$$|\alpha_n|=\infty,\ \rho_1=1,\ \begin{matrix} r=1,2,\dots n \\ s=1,2,\dots n-1 \end{matrix} \tag{36}$$

$$b_{rn}=a_{rn}\,\frac{(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu-\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu}}{\alpha_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}'^{r}\rho_\mu}}= \tag{37}$$

$$=e^{-\pi i(\alpha_n+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha_\mu-\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_\mu+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{(r)}\frac{\Gamma(\rho_\mu+1-\rho_r)}{\Gamma(\rho_\mu-\alpha_n)}\,\frac{(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu-\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu}}{\alpha_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu-\sum\limits^{n}{}^{r\prime}\rho_\mu}}$$

$$|\alpha|=\infty \quad \rho_1=1, \quad r=1,2,\dots n$$

$$b'_{sr}=a'_{sr}\,\frac{1}{\alpha_n^{\alpha_s+1-\rho_r}}= \tag{38}$$

$$=e^{\pi i(\alpha_s+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{(r)}\frac{\Gamma(\rho_r-\rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s+1-\rho_\mu)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{(s)}\frac{\Gamma(\alpha_s+1-\alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r-\alpha_\mu)}\cdot\frac{1}{\alpha_n^{\alpha_s+1-\rho_r}}$$

$$|\alpha_n|=\infty,\ \rho_1=1,\ \begin{matrix} r=1,2,\dots n \\ s=1,2,\dots n-1 \end{matrix}$$

$$(39)\qquad b'_{nr}=a'_{nr}\,\frac{(-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}}{\alpha_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}'^{r}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}}=$$

$$=e^{\pi i(\alpha_{n+1}-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{r}\frac{\Gamma(\rho_r-\rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_n+1-\rho_\mu)}\prod_{\mu=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha_n+1-\alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r-\alpha_\mu)}\cdot\frac{(-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}}{\alpha_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}'\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\alpha_\mu}}$$

$$|\alpha_n|=\infty,\ \rho_1=1,\ r=1,2,\ldots n.$$

Wenn man jetzt in den Gleichungen (36) (37) (38) und (39) für $|\alpha_n|=\infty$ die bekannte Relation:

$$(40)\qquad \Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z},\ |z|=\infty$$

wie auch noch zwei andere, welche aus derselben folgen, nämlich

$$\Gamma(z-p)=\sqrt{2\pi}\,(z-p)^{z-p-\frac{1}{2}}e^{p-z}=\sqrt{2\pi}\,z^{z-p-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{p}{z}\right)^{z-p-\frac{1}{2}}e^{p-z}=$$

$$(41)\qquad =\sqrt{2\pi}\,z^{z-p-\frac{1}{2}}\,e^{-p}\,e^{p-z}=\sqrt{2\pi}\,z^{z-p-\frac{1}{2}}\,e^{-z},\ |z|=\infty$$

und

$$\Gamma(p-z)=\sqrt{2\pi}\,(p-z)^{p-z-\frac{1}{2}}e^{z-p}=\sqrt{2\pi}\left(\frac{z-p}{-1}\right)^{p-z-\frac{1}{2}}e^{z-p}=$$

$$(42)\qquad =\sqrt{2\pi}\,(-1)^{z+\frac{1}{2}-p}\,z^{p-z-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{p}{z}\right)^{p-z-\frac{1}{2}}e^{z-p}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,(-1)^{z+\frac{1}{2}-p}\,z^{p-z-\frac{1}{2}}\,e.^{p}e^{z-p}=\sqrt{2\pi}\,(-1)^{z+\frac{1}{2}-p}\,z^{p-z-\frac{1}{2}}\,e^{z},\ |z|=\infty$$

berücksichtigt, so erhält man nach der Ausrechnung:

$$(43)\qquad b_{rs}=e^{-\pi i(\alpha_{s+1}-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n-1}{}'_{s}\frac{\Gamma(\alpha_\mu-\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_\mu+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{r}\frac{\Gamma(\rho_\mu+1-\rho_r)}{\Gamma(\rho_\mu-\alpha_s)},\ \rho_1=1,\ \begin{matrix}r=1,2,\ldots n\\ s=1,2,\ldots n\text{-}1\end{matrix}$$

$$(44)\qquad b_{rn}=\frac{\prod\limits^{n}{}'_{r}\,\Gamma(\rho_\mu+1-\rho_r)}{\prod\limits_{\mu=1}^{n}\Gamma(\alpha_\mu+1-\rho_r)};\ \rho_1=1,\ s=1,2,\ldots n.$$

$$(45)\qquad b'_{sr}=\prod_{\mu=1}^{n}{}'\frac{\Gamma(\rho_r-\rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s+1-\rho_\mu)}\prod_{\mu=1}^{n-1}{}'_{s}\frac{\Gamma(\alpha_s+1-\alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r-\alpha_\mu)},\ \rho_1=1,\ \begin{matrix}r=1,2,\ldots n\\ s=1,2,\ldots n-1.\end{matrix}$$

$$b_{nr} = e^{\pi i}\left(\sum_{\mu=1}^{n}{}^{r} \rho_\mu - \sum_{\mu=1}^{n-1} \alpha_\mu \right) \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{n}{}'_{r}\, \Gamma(\rho_r - \rho_\mu)}{\prod\limits_{\mu=1}^{n-1} \Gamma(\rho_r - \alpha_\mu)}, \quad \rho_1 = 1, \; r = 1, 2, \ldots n. \tag{46}$$

Durch Folgerung von n auf $n+1$ findet man

$$D = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n} \\ b_{12}, b_{22}, \ldots b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \ldots b_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\prod (\rho_\mu - \rho_\nu),\ \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)}{\prod (\alpha_\mu - \alpha_\nu),\ \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n-1)}, \rho_1 = 1$$

und

$$B_{rs} = (-1)^{r+s} \prod_{\mu=1}^{n}{}'_{r} \frac{\Gamma(\rho_r + 1 - \rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s + 1 - \rho_\mu)} \prod_{\mu=1}^{n-1}{}'_{s} \frac{\Gamma(\alpha_s - \alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r - \alpha_\mu)} \frac{\prod'_{r} (\rho_\mu - \rho_\nu),\ \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)}{\prod'_{s} (\alpha_\mu - \alpha_\nu),\ \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n-1)}$$

$$\rho_1 = 1, \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots n \\ s = 1, 2, \ldots n-1. \end{matrix} \tag{48}$$

$$B_{rn} = (-1)^{r\,n} e^{\pi i}\left(\sum_{\mu=1}^{n}{}'^{r} \rho_\mu - (n-1) - \sum_{\mu=1}^{n-1} \alpha_\mu \right) \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{n}{}'_{r}\, \Gamma(\rho_r + 1 - \rho_\mu)}{\prod\limits_{\mu=1}^{n} \Gamma(\rho_r - \alpha_\mu)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\prod'_{r} (\rho_\mu - \rho_\nu),\ \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)}{\prod'_{s} (\alpha_\mu - \alpha_\nu),\ \mu < \nu, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n-1)} \tag{49}$$

$$\rho_1 = 1, \quad r = 1, 2, \ldots n$$

und wenn man die Coëfficienten b'_{sr} auf Grund der Relation $b'_{sr} = \frac{B_{rs}}{D}$ berechnet, so erhält man für b'_{sr} die Werte (38) und (39).

Die Relationen (34) können zur Berechnung der Werte der Functionen y_{or} (32) für sehr grosse Werte von ξ benutzt werden. Sind nämlich die absoluten Werte von ξ sehr gross, so muss man bei der Berechnung der Werte von y_{or} in den beständig convergierenden Reihen, welche sie darstellen, sehr viele Glieder summieren, während in den divergenten Reihen (33) und (33)' wenige Anfangsglieder ausreichen, um den gesuchten Wert der Function mit hinreichender Genauigkeit zu geben.

Die Relationen (35) dienen dazu, um die durch die divergenten Reihen (33) und (33)' definierten analytischen Functionen auch ausserhalb des Convergenzpunktes dieser Reihen zu bestimmen.

Da man die nur in einem Punkte convergierende Reihe als Grenzfall der Reihe mit dem endlichen Convergenzbereiche betrachten kann, und diese Reihe immer eine analytische Function definiert, so muss man diese Eigenschaft auch der nur in einem Punkte convergierenden Reihe zuerkennen. Man kann also sagen:

Eine divergente Reihe, welche einer linearen Differentialgleichung genügeleistet, definiert eine analytische Function. Diese Function ist ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung, welcher die definierende Reihe formal genügeleistet. Will man diese Function ausserhalb des Convergenzpunktes der Reihe bestimmen, so muss man das zu irgend einer singulären Stelle der Bestimmtheit der Integrale gehörige Fundamentalsystem bestimmen, und dann mittelst der gehörigen Uebergangssubstitutionen die durch divergente Reihe definierte Function durch die Integrale dieses Systems darstellen.

Ein Beispiel einer solchen Behandlung der durch divergente Reihen definierten Functionen, geben eben die Gleichungen (35).

Im vierten Abschnitt behandelt der Verfasser die Integrale der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}(7)\qquad &\xi^n \frac{d^n y}{d\xi^n} + \xi^{n-2}(a_1\xi - 1)\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \xi^{2-3}(a_2\xi - r_1')\frac{d^{n-2}y}{d\xi^{n-2}} + \ldots \\ &\ldots + \xi(a_{n-2}\xi - r'_{n-3})\frac{d^2y}{d\xi^2} + (a_{n-1}\xi - r'_{n-2})\frac{dy}{d\xi} + a_n y = 0\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung entsteht, wenn man in der Differentialgleichung (2) $x = \rho_n \xi$ und $|\rho_n| = \infty$ setzt.

Will man die zu dem Punkte $\xi = 0$ der Unbestimmtheit der Integrale gehörigen Elemente bekommen, so setze man in den Gleichungen (17) $x = \rho_n \xi$ und $|\rho_n| = \infty$.

Man erhält $n-1$ Elemente:

$$y_{or} = \xi^{1-\rho r} F(\alpha_1 + 1 - \rho^r, \alpha_2 + 1 - \rho_r, \ldots \alpha^n + 1 - \rho_r; 2 - \rho_r \ldots \rho_{n-1} + 1 - \rho_r\, \xi) =$$

$$(50)\qquad = \xi^{1-\rho r} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\prod_{\mu-1}^{n} |\alpha_\mu + 1 - \rho_r|\lambda\, \xi^\lambda}{\prod_{\mu-1}^{n-1} |\rho_\mu + 1 - \rho_r|\lambda}, \quad r = 1, 2, \ldots n-1, \rho_1 = 1$$

welche, sofern sie sich nicht auf ganze rationale Functionen reduzieren, nur in einem Punkte $\xi = 0$ convergieren, und sonst divergent sind.

Das Element des n^{ten} Integrals erhält man, wenn man in der Gleichung:

$$y_{on} = x^{1-\rho_n}(1-x)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} P_{on}(x) \tag{17$'$}$$

$x = \rho_n \xi$ und $|\rho_n| = \infty$ setzt, und den constanten Coëfficienten $(-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} \rho_n^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}$ weglässt.

Man bekommt:

$$y_{on} = \xi^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} e^{-\xi} \bar{P}_{on}(\xi). \tag{51}$$

Die zu dem Punkte $\xi = \infty$ gehörigen Elemente der Integrale erhält man, wenn man in den Gleichungen (21) $x = \rho_n \xi$ und $|\rho_n| = \infty$ setzt und die constanten Coëfficienten $\rho_n^{-\alpha_s}$ weglässt.

Man erhält:

$$y_{\infty s} = \xi^{-\alpha_s} F(\alpha_s, \alpha_s + 1 - \rho_2, \ldots \alpha_s + 1 - \rho_{n-1}; \alpha_s + 1 - \alpha_1, \ldots \alpha_s + 1 - \alpha_n; -\xi^{-1}) =$$
$$= \xi^{-\alpha_s} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{n-1} |\alpha_s + 1 - \rho_\mu|_\lambda (-\xi)^{-\lambda}}{\prod\limits_{\mu=1}^{n} |\alpha_s + 1 - \alpha_\mu|_\lambda}, \; \rho_1 = 1, s = 1, 2, \ldots n. \tag{52}$$

Die Reihen (52) convergieren in dem ganzen Bereiche des Arguments $|\xi| > 0$.

Die Coëfficienten c_{rs} und c'_{sr} der Uebergangssubstitutionen in den Gleichungen:

$$y_{or} = \sum_{s=1}^{n} c_{rs} y_{\infty s}; \quad r = 1, 2, \ldots n \tag{53}$$

und

$$y_{\infty s} = \sum_{r=1}^{n} c'_{sr} y_{or}, \quad s = 1, 2, \ldots n \tag{54}$$

erhält man aus den Substitutionscoëfficienten a_{rs} (24) und a'_{sr} (25), wenn man erwägt, dass durch die Setzung $x = \rho_n \xi, |\rho_n| = \infty, y_o$ den Coëfficienten $\rho_n^{1-\rho_r}$ für $r = 1, 2, n-1$, y_{on} den Coëfficienten $(-1)^{\sum\limits_{\mu=2}^{n}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu} \cdot \rho_u^{\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\rho_\mu - \sum\limits_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu}$, endlich $y_{\infty s}$ den Coëfficienten $\rho_u^{-\alpha_s}$ bekommt. Dann erhält man nach Berücksichtigung der Relationen (40), (41) und (42):

$$(55)\qquad c_{rs}=e^{-\pi i(\alpha_s+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{s}\frac{\Gamma(\alpha_\mu-\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_\mu+1-\rho_r)}\prod_{\mu=1}^{n-1}{}'_{r}\frac{\Gamma(\rho_\mu+1-\rho_r)}{\Gamma(\rho_\mu-\alpha_s)},\ \rho_1=1,\ \begin{matrix}r=1,2,\ldots n-1\\ s=1,2,\ldots n\end{matrix}\ .$$

$$(56)\qquad c_{ns}=\frac{\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{s}\Gamma(\alpha_\mu-\alpha_s)}{\prod_{\mu=1}^{n-1}\Gamma(\rho_\mu-\alpha_s)},\ \rho_1=1, s=1,2,\ldots n.$$

und

$$(57)\qquad c'_{sr}=\prod_{\mu=1}^{n-1}{}_{r}\frac{\Gamma(\rho_r-\rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s+1-\rho_\mu)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{s}\frac{\Gamma(\alpha_s+1-\alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r-\alpha_\mu)},\ \rho_1=1,\ \begin{matrix}r=1,2,\ldots n-1\\ s=1,2,\ldots n\end{matrix}\ .$$

$$(58)\qquad c'_{sn}=e^{\pi i\left(\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\rho_\mu-\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}^{s\prime}\alpha_\mu\right)}\frac{\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{s}\Gamma(\alpha_s+1-\alpha_\mu)}{\prod_{\mu=1}^{n-1}\Gamma(\alpha_s+1-\rho_\mu)},\ \rho_1=1, s=1,2,\ldots n.$$

Die Substitutionsdeterminante der Coëfficienten c_{rs} ist:

$$(59)\qquad D=\begin{vmatrix}c_{11}, & c_{12}, & \ldots & c_{1n}\\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix}=\frac{\prod(\rho_n-\rho_\nu), \mu<\nu, (\mu,\nu=1,2,\ldots n-1)}{\prod(\alpha_\mu-\alpha_\nu), \mu<\nu, (\mu,\nu=1,2,\ldots n)}$$

Die zu den Elementen c_{rs} gehörigen Unterdeterminanten sind:

$$C_{rs}=(-1)^{r+s}\prod_{\mu=1}^{n-s}{}'_{r}\frac{\Gamma(\rho_r+1-\rho_\mu)}{\Gamma(\alpha_s+1-\rho_\mu)}\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{s}\frac{\Gamma(\alpha_s-\alpha_\mu)}{\Gamma(\rho_r-\alpha_\mu)}\,\frac{\prod'_{r}(\rho_\mu-\rho_\nu), \mu<\nu, (\mu,=1,2,\ldots n-1)}{\prod'_{s}(\alpha_\mu-\alpha_\nu), \mu<\nu, (\mu,=1,2,\ldots n)}$$

$$(60)\qquad \rho_1=1,\ \begin{matrix}r=1,2,\ldots n-1\\ s=1,2,\ldots n.\end{matrix}$$

und

$$C_{ns}=(-1)^{n+s}e^{-\pi i\left(\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}^{s\prime}\alpha_\mu+n-1-\sum\limits_{\mu=1}^{n-1}\rho_\mu\right)}\cdot\frac{\prod_{\mu=1}^{n}{}'_{s}\ \Gamma(\alpha_s-\alpha_\mu)}{\prod_{\mu=1}^{n-}\Gamma(\alpha_s+1-\rho_\mu)}\,.$$

$$(61)\qquad \cdot\frac{\prod(\rho_\mu-\rho_\nu)\ \mu<\nu, (\mu,\nu=1,2,\ldots n-1)}{\prod'_{s}(\alpha_\mu-\alpha_\nu), \mu<\nu, (\mu,\nu=1,2,\ldots n)}$$

$$\rho_1=1,\ \ s=1,2,\ldots n.$$

und der Ausdruck $\frac{C_{rs}}{D}$ $(r,s=1,2,\ldots n)$ giebt c'_{sr} in der Form (57) beziehungsweise (58).

---

44. M. E. BANDROWSKI et M. A. PROKOPECZKO présentent leur travail: **O działaniu chlorowodoru na dwufenyloparazofenylen.** *(Ueber die Wirkung des Chlorwasserstoffes auf Biphenylparazophenylen). (Sur l'action de l'acide chlorhydrique sur lebiphénylparazophénylène).*

Die Verfasser haben das Verhalten des Diphenylparazophenylens Chlorwasserstoff gegenüber untersucht in der Hoffnung, dass das Azophenylen, welches. wie bekannt, in mancher Beziehung dem Chinon ähnelt[1]), bei dieser Reaction analog verändert wird. Das Experiment hat die Analogie vollständig bestätigt.

Die Reaction wurde in der Weise angestellt, dass trockner Chlorwasserstoff in eine kalte Benzollösung bis zur Sättigung eingeführt wurde. Die ersten Partien von Chlorwasserstoff werden absorbiert, gleichzeitig tritt ein schleimiger, gewöhnlich dunkelblauer Niederschlag auf, der bei weiterer Einwirkung zuletzt als grauer krystallinischer Niederschlag am Boden des Gefässes abgesetzt wird. Es unterliegt somit keinem Zweifel, dass die Reaction in mehreren Phasen verläuft, und zuerst wurden ihre letzten Phasen untersucht. Der krystallinische von der Mutterlauge abfiltrierte Niederschlag bestand aus Chloriden, welche durch Kochen mit Wasser leicht in ein Basengemisch verwandelt werden konnten, das sich nicht einheitlich erwies, dagegen Chlor bis zu 6% enthielt. In der Mutterlauge setzte sich nach einiger Zeit ein weisser krystallinischer Niederschlag ab, der bei näherer Untersuchung auch als ein nicht nur durch Wasser, aber auch durch Kochen mit Benzol zersetzliches Chlorid sich erwies; dasselbe sollte somit auch in dem ursprünglichen Chloridgemenge vorhanden gewesen und durch Kochen mit Benzol als Base abscheidbar sein. Zu dem Zwecke wurde der Niederschlag mit Benzol in einem Strome von Chlorwasserstoff erwärmt und der nicht gelöste Rückstand von der Mutterlauge abfiltriert. Der Rückstand erwies sich als Diphenylparaphenylendiaminchlorhydrat (es wurde als freie Base und als das aus ihr durch Oxydation mittels Hg O erhältliche Diphenylparazophenylen identificiert). Die Benzollösung wurde zum grossen Theile abdestilliert, und aus dem Reste durch Einleiten von Chlorwasserstoff ein Niederschlag ausgefällt, durch Kochen mit Wasser zersetzt und aus Weingeist umkrystallisiert. Auf diese Weise konnten leicht zwei Körper abgetrennt werden,

[1]) Anzeiger der Ak. d. Wiss. Krakau 1893.

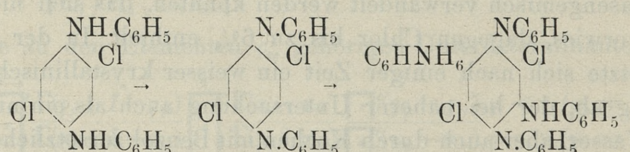
der eine von Schmpkt. 157°, der andere vom Schmpkt. 106°. Beide besitzen die Formel $C_{18}\,H_{14}\,Cl_2\,N_2$, so dass man die Einwirkung von Chlorwasserstoff auf Diphenylparazophenylen durch folgende Gleichung angeben kann:

$$2\,C_6H_4(N.C_6H_5)_2 + 6\,HCl = C_6H_4(NHC_6H_5HCl)_2 + C_{18}H_{14}Cl_2N_2\,2\,HCl.$$

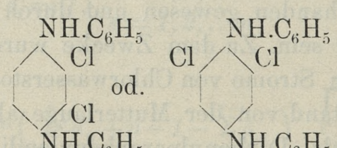
Die Körper $C_{18}H_{14}Cl_2N_2$ stellen zwei isomere Diphenylchlorparaphenylendiamine vor, indem beide über Nitrosoderivate in zwei isomere Diphenyldichlorazophenylene:

$$C_6H_2Cl_2\begin{cases}NHC_6H_5\\NHC_6H_5\end{cases} \rightarrow C_6H_2Cl_2\begin{cases}N(NO)C_6H_5\\N(NO)C_6H_5\end{cases} \rightarrow C_6H_2Cl_2\begin{cases}N.C_6H_5\\N.C_6H_5\end{cases}$$

übergeführt werden können. Beide Dichlorazophenylene bilden prachtvoll rothe, sehr gut krystallisierte Körper und schmelzen bei etwa 220°; das Azophenylen vom Diphenyldichlorphenylendiamin vom Schmpt. 157° gibt mit Anilin das entsprechende Azophenin $C_6Cl_2(NHC_6H_5)_2\,(NC_6H_5)_2$. Das Diamin besitzt demnach noch zwei freie Parastellungen im Molecül, welche dem Diamin vom Schmpkt. 106° fehlen. Die Constitution der Dichloramine und Azophenylene ist demnach folgende:



Diamin Schmpt. 157° Azophenylen Azophenin



Diamin Schmpt. 102°.

Es wurde die weitere Einwirkung vom HCl auf die beiden Dichlorazophenylene untersucht. Dieselbe verläuft ähnlich der vorigen, gibt jedoch zu unerquicklichen Nebenproducten Anlass, die das quantitative Ergebnis der normalen Producte stark beeinflussen. Als solches erscheint neben den Chloriden der entsprechenden Dichlordiamine in beiden Fällen dasselbe Tetrachlordipenylparaphenylendiamin $C_{18}H_{12}Cl_4N_2$, so dass die Reaction wie früher in folgender Weise verläuft:

$$2\,C_6H_2Cl_2(NHC_6H_5)_2 + 6\,HCl = C_6H_2Cl_2(NHC_6H_5HCl)_2 + \\ + C_6Cl_4(NHC_6H_5HCl)_2$$

Das Tetrachlordiamin bildet weisse in gewöhnlichen Solventien wenig lösliche Krystalle von sehr wenig ausgesprochenem Basencharakter. Die Ueberführung in das entsprechende Azophenylen konnte nicht bewirkt werden.

Auf Grund obiger Resultate kommen die Verfasser zum Schlusse, dass das Diphenylparazophenylen dem Chlorwasserstoff gegenüber sich dem Chinon analog verhält [1]) und vermuthen, dass auf Grund dieser Analogie die Anfangsstadien der Einwirkung vielleicht in der Bildung des entsprechenden Azochinhydrons bestehen mögen:

$$2\,C_6H_4O_2 + 2\,HCl = C_{12}H_{10}O_4 + Cl_2$$
$$C_{12}H_{10}O_4 + 2\,HCl = 2\,C_6H_6O_2 + Cl_2 = 2\,C_6H_5ClO_2 + 2\,HCl$$
$$2\,C_{18}H_{14}N_2 + 2\,HCl = C_{36}H_{30}N_4 + Cl_2$$
$$C_{36}H_{30}N_4 + 2HCl = 2\,C_{18}H_{15}N_2 + Cl_2$$
$$2\,C_{18}H_{15}N_2 + 2\,Cl_2 = C_{18}H_{14}Cl_2N_2 + C_{18}H_{16}N_3.\,2\,HCl \text{ etc.}$$

Es konnte jedoch diese Vermuthung experimentell nicht begründet werden.

---

45. M. K. Kostanecki présente le travail de M. A. ROSNER: **O powstawaniu ciąży bliźniaczej monochorialnej.** ***(Sur la génèse de la grossesse gémellaire monochoriale).*** *(Ueber die Enstehungsweise der monochorialen Zwillingsschwangerschaft).*

L'auteur a partagé son travail en trois chapitres. Dans le premier il examine rapidement les principaux travaux relatifs à cette question. Presque tous les auteurs admettent que les jumeaux monochoriaux proviennent d'un seul oeuf, d'où le nom généralement admis de „grossesse gémellaire monoovulaire“ (Eineiige Zwillingsschwangerschaft).

[1]) Ann. Lieb. 210.

L'auteur cite toutes les hypothèses, par lesquelles différents savants tâchent d'expliquer la genèse de ces jumeaux, d'un seul ovule. Il est d'avis que ces hypothèses ne répondent nullement aux idées actuelles sur la fécondation et l'évolution de l'ovule fécondé. Ainsi l'auteur critique l'hypothèse d'Ahlfeld, qui tâche d'expliquer la genèse des jumeaux par la scission de la tâche germinative, développée après la fécondation normale d'un ovule normal.

Il examine ensuite la théorie de Fol se basant sur la bispermie, que l'auteur considère comme impossible, surtout dans les ovules normaux. Dans le cas même où un semblable ovule pourrait être fécondé par deux spermatozoïdes, son évolution ultérieure ne pourrait être normale et ne pourrait donner dans aucun cas, par cette voie, des jumeaux. L'auteur mentionne encore l'hypothèse dans laquelle on considère comme cause de la production de cette espèce de jumeaux un oeuf „à deux jaunes" et il prouve que cette dénomination est en désaccord avec les principes de l'embryologie.

L'auteur examine un peu plus longuement la théorie de Schultze. Selon cette théorie, les jumeaux monochoriaux proviendraient du développement d'un ovule possédant deux noyaux avant la fécondation. L'auteur arrive à la conclusion qu'un tel ovule devrait, pour pouvoir donner deux embryons — être fécondé par deux spermatozoïdes. Le trait caractéristique de l'évolution monoovulaire étant précisément dans la fécondation d'un seul noyau féminin par un seul noyau masculin, il ne pourrait s'agir ici d'évolution monoovulaire, dans le sens exact du mot, puisque deux noyaux féminins seraient fécondés par deux noyaux masculins. Comme on a cherché, dans les ovules à deux noyaux, la cause de la formation non seulement des jumeaux monochoriaux, mais aussi de celle des monstres doubles, l'auteur considère comme dénuée de fondement l'affirmation à priori que les jumeaux monochoriaux et les monstres doubles ont une genèse commune. L'auteur ne traite que de la question des jumeaux.

En comparant toutes ces théories, l'auteur se demande si elles tiennent suffisamment compte des données anatomiques, à savoir de la structure des membranes foetales des jumeaux monochoriaux. Toutes ces hypothèses concordent sur un point, savoir: les deux tâches germinatives se forment sur une seule vésicule blastodermique; elles diffèrent seulement quant à l'explication de la cause de la formation des deux tâches germinatives. L'opinion qu'il n'y a primitivement qu'une seule vésicule blastodermique, est démentie, selon l'auteur, par le fait que nous trouvons dans les membranes foetales de ces jumeaux deux vésicules ombilicales. Pour expliquer l'existence des deux vésicules ombilicales, certains auteurs ont tâché de prouver qu'une seule vésicule ombilicale initiale s'est scindée, au cours de l'évolution, en deux parties. L'auteur, au contraire, est d'avis que si nous étions réellement en présence d'une seule vésicule ombilicale, elle persisterait comme telle jusqu'à la fin de la grossesse. Nous n'avons donc pas le droit d'admettre ce partage. Le fait que les membranes foetales contiennent deux vésicules ombilicales prouve, au contraire, que les deux foetus se sont développés de deux vésicules blastodermiques distinctes.

Demandons nous quelle est l'origine de ces deux vésicules blastodermiques? L'auteur discute ici la question des ovules à deux noyaux, et il émet l'opinion que si un tel ovule pouvait être fécondé par deux spermatozoïdes, il devrait présenter dans son développement ultérieur deux centres d'évolution, c'est à dire deux morulas et plus tard deux vésicules blastodermiques. Ce processus ne différerait en rien, en principe, de l'évolution de deux ovules distincts. En effet, en laissant de côté la question de savoir si l'ovule à deux noyaux est le produit de la réunion de deux ovules normaux, ou bien si les deux noyaux sont le résultat d'un partage commencé, mais non accompli, de la cellule ovulaire, cet ovule possède, dans tous les cas, la valeur physiologique de deux cellules distinctes.

Ensuite l'auteur émet l'hypothèse, que les deux vésicules blastodermiques pourraient provenir d'un seul ovule normal, fécondé par un seul spermatozoïde, par le fait, que les deux premières blastomères sont devenues indépendantes et ont formé deux centres d'évolution. A cette occasion, l'auteur discute les nombreux travaux sur cette question et se demande si, par analogie avec les résultats des expériences faites sur les oeufs des animaux inférieurs, on peut admettre la possibilité de l'évolution indépendante des deux premières blastomères de l'oeuf humain.

Enfin l'auteur se demande si les deux vésicules blastodermiques qui donnent naissance aux jumeaux monochoriaux ne proviendraient pas tout simplement de deux ovules distincts. C'est un fait bien connu que deux ovules distincts donnent souvent naissance chez l'homme à une grossesse gémellaire bichoriale, qui diffère essentiellement de la grossesse monochoriale. La différence consiste d'abord, comme la dénomination l'indique, dans le nombre de chorions. Dans la grossesse monochoriale, un chorion commun entoure deux amnios; dans la grossesse bichoriale, chaque foetus a son chorion distinct. De plus, dans la grossesse monochoriale. nous sommes en présence de foetus homologues, c'est à dire du même sexe et d'une ressemblance frappante; dans la grossesse bichoriale. les foetus peuvent ne pas se ressembler et être de sexe différent. Quant aux chorions, il est hors de doute que leur nombre doit répondre à celui des vésicules blastodermiques ayant donné naissance aux jumeaux, car le chorion se forme de l'ectoderme et d'un feuillet du mésoderme de la vésicule blastodermique. En considérant que, d'une part, le nombre de vésicules ombilicales nous force à admettre que les jumeaux proviennent de deux vésicules blastodermiques et que, d'autre part, le fait de l'existence d'un chorion commun aux deux foetus ne peut s'acorder avec cette hypothèse et tendrait au contraire à prouver que les jumeaux se sont formés d'une seule vésicule blastodermique, on arrive à la conclusion suivante: ou bien la vésicule ombilicale s'est partagée en deux parties, ou bien les deux chorions se sont confondus pour n'en former qu'un seul. Plus haut, l'auteur a démontré l'impossibilité du partage de la vésicule ombilicale, ici il ne discute donc que la question de savoir si les deux chorions d'abord distincts peuvent se souder au cours de l'évolution et il arrive à la conclusion que ce fait peut avoir lieu dans certains cas, par la disparition de lacloison choriale. En se basant sur les descriptions des oeufs humains très jeunes, l'auteur arrive à la conclusion que le chorion et la caduque (decidua capsularis, reflexa), se développent chez l'homme de très bonne heure, et que le contact immédiat du chorion jeune, non encore vascularisé, avec la caduque, qui le nourrit, est la condition indispensable de sa persistance. S'il n'y a pas contact, la nutrition du chorion est insuffisante, ce qui doit amener peu à peu sa disparition. Si donc deux vésicules blastodermiques s'entourent d'une caduque commune, les parties choriales qui se touchent et forment la cloison, ne sont pas en contact immédiat avec la caduque nourricière et sont destinées à disparaître. Quant à l'objection que cette disparition devrait laisser des traces durables l'auteur répond que, ce fait se produisant de très bonne heure, il ne peut laisser aucune trace. Comme Ahlfeld nie en principe que le chorion puisse être résorbé, l'auteur donne une série d'exemples, empruntés à l'histoire de l'évolution de l'homme et des mammifères, qui prouvent que, au contraire, le chorion s'atrophie souvent. Ainsi l'auteur arrive à la conclusion que les jumeaux monochoriaux proviennent du développement de deux vésicules blastodermiques (le fait de l'existence des deux vésicules ombilicales dans les membranes en est la preuve), entourées dans l'utérus d'une caduque commune (l'existence d'un chorion commun le prouve).

Il s'agit maintenant de savoir dans quel cas les deux vésicules blastodermiques s'entoureront d'une caduque commune. Evidemment cela arrivera lorsque les deux vésicules seront très proches l'une de l'autre dans la carité utérine, ce qui a lieu, lorsque de façon ou d'autre elles dérivent d'un seul oeuf.

Il peut encore arriver que deux ovules distincts soient très proches l'un de l'autre s'il proviennent tous deux de la même vésicule de Graaf, et que accolés l'un à l'autre par les cellules du disque proligère ils aient cheminé ensemble vers l'utérus. Ici l'auteur discute les travaux concernant les vésicules à deux ou plusieurs ovules et arrive à la conclusion que ces vésicules existent indubitablement dans les ovaires des mammifères et de l'homme. Ces vésicules se rencontrent, comme on le sait, plus souvent dans les ovaires foetaux, que dans ceux d'une femme adulte. L'auteur, contrairement aux opinions généralement admises, l'explique par le fait que, comme l'ovaire foetal contient beaucoup plus de vésicules qu'un ovaire adulte, il en résulte qu'il est beaucoup plus facile de trouver dans ce grand nombre, une vésicule de ce genre.

Dans le second chapitre, l'auteur émet l'opinion que la genèse de jumeaux monochoriaux pourrait être résolue, s'il existait un animal qui mît toujours bas plusieurs foetus homologues, c'est à dire ayant le même sexe et entourés d'un chorion commun. Ces animaux existent; ce sont: le Praopus hybridus et le Tatou à neuf bandes appartenant aux Edentés. Il résulte des travaux de v. Ihering sur le praopus et de ceux de Kölliker, Milne Edwards, Dugès et v. Ihering sur le Tatou, que le praopus met bas généralement huit foetus, qui sont toujours du même sexe et possèdent un chorion commun, tandis que le Tatou à neuf bandes a d'habitude quatre foetus à chorion commun et, selon v. Ihering, du même sexe. L'auteur a résolu d'étudier les ovaires du Dasypus novemcinctus (Tatou) et dans ce but il a écrit à M. v. Ihering à Sao-Paulo (Brésil). M. v. Ihering a eu la bonté de lui expédier les organes génitaux de deux femelles enceintes. L'auteur a pu se convaincre que, dans les deux cas, il y avait quatre foetus de sexe féminin et que les chorions étaient communes à tous les foetus. L'étude histologique des ovaires n'a pu être faite que chez une femelle, ceux de l'autre étant mal conservés. De plus l'auteur a pu étudier à Berlin les ovaires foetaux du Dasypus qui lui ont été grâcieusement offerts par M. Waldeyer; il a fait de tous ces ovaires des séries complètes de coupes; il décrit d'une façon très détaillée les résultats de ces études: dans les deux ovaires de l'animal adulte, il a trouvé 52 vésicules de Graaf, ayant toutes leurs parties constituantes bien développées, entre autres le liquor folliculi. De ces 52 vésicules, 22 contenaient plus d'un ovule, savoir: 11 à deux ovules, 7 à trois, 2 à quatre, 1 à cinq et 1 à sept. En mesurant le diamètre des vésicules, l'auteur a remarqué que les deux les plus développées, mesurant l'une 1770 μ l'autre 2940 μ de diamètre contenaient chacune 4 oeufs, c'est à dire justement le nombre correspondant à la quantité de foetus que met habituellement bas la femelle du Dasypus.

L'auteur a remarqué aussi que les follicules primordiaux ne possèdent qu'un seul ovule, aussi bien dans les ovaires foetaux que dans les ovaires adultes. En discutant la question de savoir de quelle façon les vésicules primordiales uniovulaires peuvent devenir polyovulaires, l'auteur arrive à la conclusion que cela a lieu par le mécanisme suivant: plusieurs vésicules monoovulaires dans l'ovaire se confondent pour en former une seule contenant plusieurs ovules. Ce dernier processus est décrit avec beaucoup de détails sur une série de vésicules. L'auteur donne en outre une série de dessins des coupes microscopiques.

Les études sur les ovaires du Tatou amènent l'auteur à la conclusion que les quatre foetus de cet animal proviennent chacun d'un ovule fécondé par un spermatozoïde. Ces quatre ovules étaient contenus dans la même vésicule de Graaf. Puisque ces foetus ont dans l'utérus un chorion commun et que chaque oeuf devait posséder au début son chorion propre, il en résulte évidemment que les cloisons choriales ont disparu. Cette hypothèse est d'autant plus justifiée que le Dasypus appartient aux animaux à caduque, comme l'a prouvé Kölliker. Le fait que les foetus quoique provenant d'oeufs séparés soient toujours du même sexe, comme les jumeaux humains monochoriaux, est des plus intéressants. L'auteur ne veut pas trancher la question; il émet cependant l'hypothèse que l'identité des conditions dans lesquelles se trouvent les foetus dans l'utérus, peut être même le sang commun, comme chez les jumeaux humains monochoriaux, soit la cause de l'évolution homologue; ou que peut-être la question du sexe est déjà décidée dans l'ovaire, et que les ovules, évoluant dans la même vésicule, ne peuvent fournir que des foetus unisexués.

Dans le troisième chapitre, l'auteur donne les conclusions de ces études. Ce sont les suivantes:

1) Les jumeaux humains monochoriaux ne proviennent certainement pas d'une seule vésicule blastodermique.

2) La grossesse gémellaire monochoriale chez l'homme provient très vraisemblablement de deux ovules contenus dans la même vésicule de Graaf.

3) On ne peut pas affirmer qu'il soit impossible que des jumeaux monochoriaux chez l'homme ne puissent se former d'un seul oeuf. Dans ce cas les deux premières blastomères se développeraient d'une façon indépendante.

4) Rien ne nous autorise à admettre que les jumeaux monochoriaux se forment soi-disant par la fécondation d'un ovule normal par deux spermatozoïdes, ou même d'un ovule à deux noyaux.

5) Ces jumeaux sont contenus dans un chorion commun, car la cloison choriale, séparant les deux oeufs n'étant pas en contact avec la caduque s'est atrophiée par manque de nutrition.

6) Nous ne sommes pas aujourd'hui en état d'expliquer pourquoi ces jumeaux sont homologues, c'est-à-dire d'une ressemblance frappante et de sexe commun.

7) La grossesse chez le Tatou à neuf bandes (Dasypus novemcinctus) est absolument analogue à la grossesse gémellaire monochoriale de l'homme.

8) Les quatre foetus de Dasypus proviennent des quatre oeufs contenus dans une seule vésicule de Graaf.

9) Les vésicules de Graaf à plusieurs ovules se rencontrent très souvent dans les ovaires du Dasypus et sont formées par la réunion des follicules uniovulaires.

10) L'étude de l'ovaire du Dasypus nous permet de supposer que, chez l'homme aussi, la grossesse gémellaire monochoriale pro-

vient du développement de deux ovules contenus dans la même vésicule de Graaf.

11) La dénomination „grossesse gémellaire uniovulaire" n'est pas justifiée et devrait être abandonnée.

Description des planches.

Fig. 1. Zeiss. Apochr. 16 mm. ocul. comp. 4. Deux follicules de Graaf de l'ovaire du Dasypus novemcinctus. Cet ovaire ne contenait pas le corps jaune. Les deux follicules sont très voisins dans l'ovaire. Le tissu conjonctif, qui les entoure, forme encore une cloison mince, qui les sépare. Le reste du tissu conjonctif est déjà commun pour les deux follicules. Le diamètre de ces deux follicules est 450 μ. et 630 μ.

Fig. 2. Zeiss. Apochr. 16 oc. comp. 4. Un follicule à trois oeufs de l'ovaire du Dasypus novemcinctus. Cet ovaire ne contenait pas le corps jaune. On voit nettement qu'ici trois follicules monoovulaires se sont confondus, pour en former qu'un seul à trois ovules. On distingue encore, le reste de la cloison, qui séparait les follicules. Le diamètre du follicule est 990 μ.

Fig. 3. Zeiss. Apochr. 8 mm. oc. comp. 4. Un follicule à deux ovules de l'ovaire du Dasypus novemcinctus. Cet ovaire était le siège du corps jaune. On aperçoit sur cette coupe le reste tout-à-fait mince d'une cloison, qui séparait les follicules monoovulaires.

Fig. 4. Zeiss. Apochr. 16 mm. oc. comp. 4. Un follicule à deux ovules de l'ovaire du Dasypus novemcinctus. Cet ovaire ne contenait pas le corps jaune. Le *liquor* folliculi est déjà commun, quoique la forme de la membrane conjonctive qui entoure le follicule, indique qu'ici deux follicules distincts se sont réunis pour n'en former qu'un seul à deux ovules. Le diamètre du follicule est 390 μ.

Fig. 5. Zeiss. Apochr. 8 mm. oc. comp. 4. Un follicule à trois ovules d'un ovaire du Dasypus, qui ne contenait pas le corps jaune. Ce follicule, qui contient trois ovules normaux est petit, son diamètre est 360. Rien n'indique que ce follicule se soit formé par la réunion de trois follicules distincts. Les cloisons conjonctives ont complètement disparu.

Fig. 6. Zeiss. Apochr. 16 mm. oc. comp. 4. La forme externe du même follicule à trois ovules dont le dessin (fig. 5) représente une coupe microscopique. (Reconstruction des 12 coupes microscopiques). On distingue nettement qu'ici trois follicules distincts se sont confondus, quoique la coupe représentée dans la fig. 5 n'indique aucune trace de cette réunion.

Fig. 7. Zeiss. Apochr. 16 mm. oc. comp. 4. Deux follicules de l'ovaire du Dasypus, qui était le siège du corps jaune. (Dessin par reconstruction de coupes microscopiques). a) On voit au fond d'un grand follicule ouvert 7 ovules normaux. chaque ovule sur son disque propre; b) La forme externe d'un autre follicule. On voit qu'il s'est formé par la réunion de plusieurs follicules.

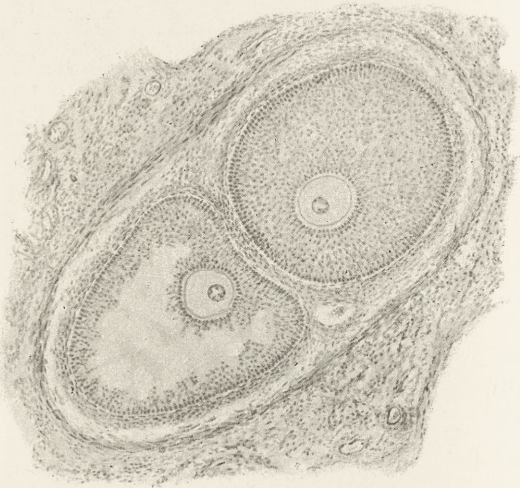


Fig. 1.

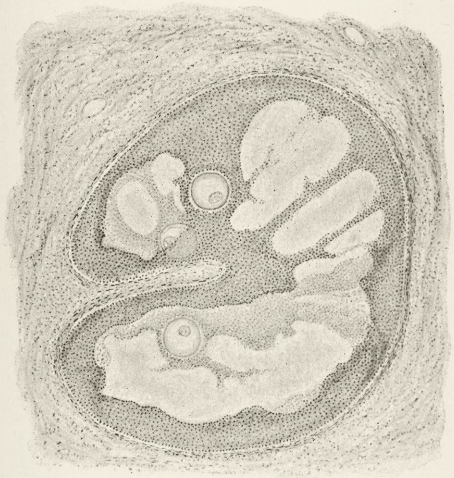


Fig. 2.

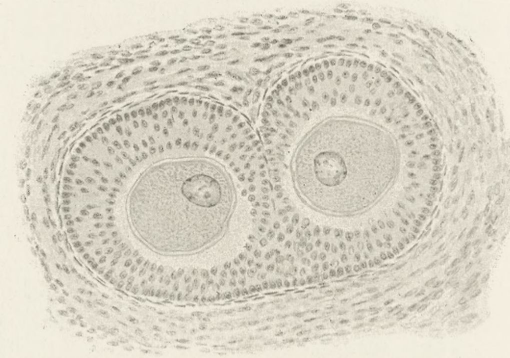


Fig. 3.

Fig. 6.

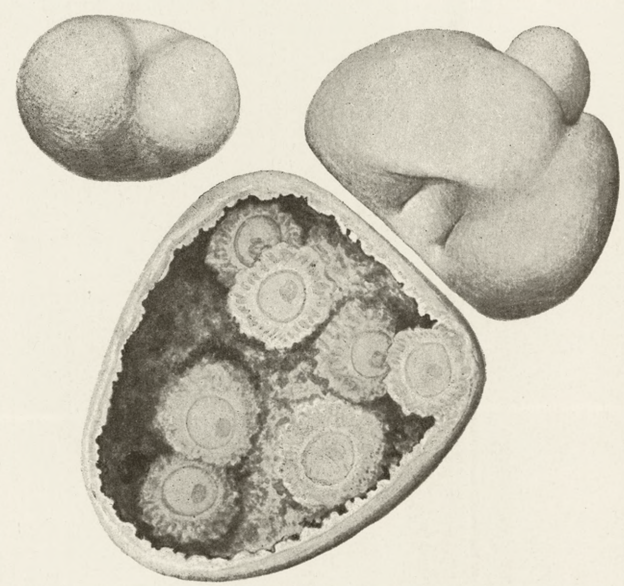


Fig. 4.

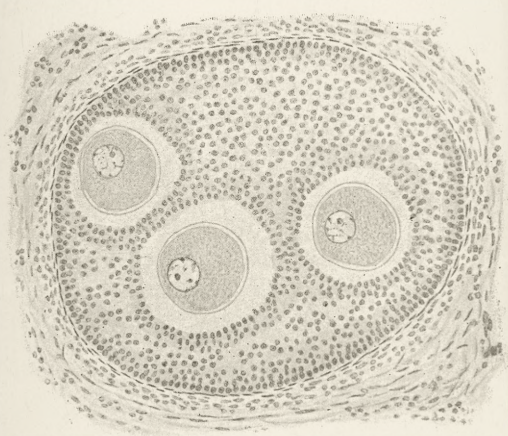


Fig. 5.

Fig. 7

A. Rosner.

46. PUBLICATIONS DE LA CLASSE.

Le Secrétaire dépose sur le bureau la dernières publications de la Classe:

E. Godlewski (jun.). „Rozwój tkanki mięsnej w mięśniach szkieletowych i w sercu zwierząt ssących". *(Développement du tissu musculaire des muscles du corps et du coeur des mammifères, 8-o, p. 49). — Die Entwicklung des Skelet- und Herzmuskelgewebes der Säugethiere, 8-o, S. 49).*

L. Marchlewski i J. Sosnowski. „O kumarofenazynach. Część II." *(La Cumarophénasine et ses dérivés. Seconde partie, 8-o, p. 10). — Cumarophenasin und Derivate. Zweiter Theil, 8-o, S. 10).*

J. Sosnowski. „Badania nad oporem nerwów. I. Mierzenie oporu metodą elektrometryczną". *(Sur la résistance électrique des nerfs. I. Mesure de la résistance par la méthode électrométrique, 8-o, p. 7). — Untersuchungen über den Nervenwiderstand. I. Widerstandsmessungen mittels der elektrometrischen Methode, 8-o, S. 7).*

S. Zaremba. „O teoryi równania Laplacea i o metodach Neumanna i Robina". *(Sur la théorie de l'équation de Laplace et sur les méthodes de Neumann et de Robin, 8-o, p. 57). — (Ueber die Laplace'sche Gleichung und die Methoden von Neumann und Robin, 8-o, S. 57).*

Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcyą Sekretarza Wydziału matem.-przyr. Dra Józefa Rostafińskiego.

Kraków, 1901. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

31 Grudnia 1901.