ESSENZA E VALORE DELLA MATEMATICA (*)

Un filosofo cinico, passeggiando una volta per le vie di Corinto, si imbattè in una giovane e bella fioraia, la quale, a chi si fermava davanti alle sue ceste, forse più per corteggiare che per comprare, distribuiva, con amabile grazia, fiori, sorrisi e parolette argute.

Con la ben nota mancanza di tatto che è retaggio comune di tutti i fanatici — fanatici della scienza, della religione... o della politica — il nostro filosofo credette che fosse opportuno fermarsi, non per ammirare il gaio spettacolo di grazia armoniosa che gli si offriva, ma per imporre alla fioraia e ai suoi corteggiatori un assai lungo e filosofico discorso sulla caducità e l'inutilità della bellezza fisica, sia essa la fresca e gracile bellezza di un fiore appena reciso, o la viva e palpitante bellezza di una giovane donna.

La fioraia lasciò che il filosofo si sfogasse, a suo beneplacito, tra il muto stupore o gli ironici sogghigni degli astanti; poi trovò, in sua semplice grazia, la risposta più fine.

Prese da una delle sue ceste un mazzolino di fiori, ne aspirò voluttuosamente il profumo e disse:

I fiori sono belli e odorano.

Questo aneddoto mi ricorre alla mente quante volte mi avviene di sentir domandare: *a che serve la matematica?*, e nel tono col quale la domanda viene rivolta apparisce chiara la soddisfazione dell'interrogatore, grossolanamente utilitarista, di aver messo l'interrogato in un grave imbarazzo, perchè non può rispondergli, poniamo, che la matematica serve a far guadagnare molto denaro.

A che serve? vorrei rispondere. *A niente, se così ti piace, se di ciò a cui essa può servire tu mostri di non tenere alcun conto; ma è bella e tanto basta.*

(*) *Esercit. Mat. di Catania,* 1 (1921), pp. 1-25.

[Testo della conferenza tenuta per l'inaugurazione del Circolo Matematico di Catania (1920)].

Pure se questa è risposta opportuna per l'utilitarismo crasso ed ignorante, non è risposta adeguata a chi chieda dell'essenza e del valore della matematica sul terreno della pura speculazione; qui il far ricorso a una *boutade,* spiritosa quanto si voglia, sarebbe cosa inopportuna e vana.

* * *

Ad un matematico, in quanto tale, avviene ben raramente di chiedersi che cosa sia e che valga la scienza che egli coltiva. L'approfondirne i principi, il portarne a più alta perfezione le varie teorie, il crearne, se occorre, delle nuove, è opera così vasta ed affascinante, che è ben difficile resti tempo e voglia al ricercatore solerte di metter da parte i problemi concreti coi quali si imbatte, tanto più gravi e numerosi quanto più elevata è la sua cultura, e porsi a una valutazione esplicita della scienza che lo innamora.

Aggiungasi che più un matematico è conoscitore profondo della sua disciplina, dello spirito che la informa e dei metodi rigorosi e guardinghi dei quali solo essa si vale, e più diffida delle facili generalizzazioni e delle troppo rapide affermazioni.

Ma se i matematici che si fermino a filosofare intorno alla matematica non sono molti, non v'è filosofo, quasi, che della matematica non abbia creduto di poter delimitare nettamente la portata.

Si dirà: *è naturale. Il matematico matematizza; è il filosofo che deve filosofare.*

Ma la cosa non è tanto semplice e naturale.

Se tra la matematica e la filosofia corressero ancora i rapporti di buon vicinato che per secoli sono stati tradizionali; se ciascun filosofo fosse un Platone, un Descartes, un Leibniz, niente di straordinario che egli si sentisse autorizzato ad interloquire sulla matematica; egli ne sarebbe senz'altro un conoscitore profondo.

Ma da un pezzo in qua le cose sono totalmente cambiate. La filosofia ha fatto divorzio, da tempo, dalla matematica e non da questa soltanto, e del divorzio si allegra. Quale competenza hanno oggi i filosofi a filosofare intorno ad essa?

Anche a questo, lo so, c'è una risposta pronta.

Per giudicare del «*procedere matematico*» non occorre, si dice, conoscer tutta quanta la matematica; basta l'aritmetica la più elementare, bastano i primi rudimenti della geometria. A GIAMBATTISTA VICO per decidere che lo studio della geometria è proprio degli ingegni minuti, e quindi non agevole alle menti già fatte universali dalla Metafisica, fu sufficiente non andare oltre la quinta proposizione del primo libro di EUCLIDE.

Il VACCA, logico matematico acuto e sinologo valente, in un suo articolo dell'agosto 1905, pubblicato nel *Leonardo,* la battagliera rivista del PAPINI e del PREZZOLINI, contestava appunto al CROCE la possibilità di studiare le leggi e le limitazioni del pensiero matematico partendo dalla considerazione di triviali eguaglianze numeriche, poniamo, $5+2=7$, $3\times4=12$; o di banali proposizioni geometriche tolte dalle prime pagine dell'opera di EUCLIDE. E nel sostener questa tesi cercava di porre il suo avversario in contradizione con sè stesso, ricordando, con parole di lode, questo saggio ammonimento crociano:

« Molti si imaginano di poter comprendere... l'arte stornando l'esame dai capolavori e dalle opere grandiose per portarlo... sugli sgorbi dei fanciulli o sui graffiti dei selvaggi; nel che non guadagnano mai nulla e solo riescono talvolta a complicare il problema, essendo spesso molto dubbio se i fatti presi in esame siano, e in qual grado, veri e propri fatti estetici; per non dire del peggior caso, in cui viene spezzata un'opera d'arte in particelle dalle quali lo spirito artistico è volato via; donde gli errori gravissimi che menano a concepir l'arte quasi aggregato meccanico ».

Nel fascicolo successivo della stessa Rivista il CROCE rispose:

« Il VACCA vuol far intendere che io di matematica conosco poco; ed in ciò egli ha errato dove forse non immagina; io non ne conosco poco, ma pochissimo; la mia ignoranza della matematica è molto più grande che il VACCA non sospetti. Perciò, appunto, nell'indagarne l'indole universale, io mi son dovuto valere delle operazioni aritmetiche e dei banali teoremi della geometria euclidea. È legittimo questo procedimento? Il VACCA mi mette in contradizione con me stesso citando un mio brano in cui io riprovo la mania etnografica e preistorica, per la quale, volendo stabilire che cosa è l'arte, la gente va a cercare prodotti d'arte rudimentali e spesso equivoci, quando basta fermar l'occhio sui capolavori, dove l'equivoco non è possibile e dove si trova il medesimo che nelle forme meno cospicue d'arte. Ma per poter rivolgere questo mio canone contro di me egli avrebbe dovuto provare che le quattro operazioni e i banali teoremi euclidei *non sono formazioni matematiche,* o sono *dubbie* formazioni matematiche; e che l'indole vera di queste deve perciò desumersi da altre formazioni, di quelle che io ignoro e che presentano indole gnoseologica diversa da quella delle prime. La dimostrazione non è stata data da lui; e non mi sembra possibile ».

Ora, certo, nè il VACCA, nè altri può dimostrare che $3 \times 4 = 12$ non sia un'eguaglianza numerica; o che per es. l'affermazione « *tutti gli angoli retti sono eguali* » non sia una proposizione geometrica. Si tratta indubbiamente di fatti matematici.

Ma dieci, cento o mille fatti bruti, meccanicamente giustapposti, non hanno mai costituito una teoria; e non io certo oserei parlare di valore della matematica se essa non fosse che una pura raccolta di problemi, o un nudo formulario. In tal caso io non saprei assegnarle nella scala dei valori un posto molto più elevato di quello che potrebbe toccare, poniamo, a un manuale sul giuoco degli scacchi, o ai modesti libri da cucina delle nostre massaie.

Aggiungasi che valutare criticamente, non dico la matematica, ma anche una sola sua proposizione, non è possibile se di questa non si conosce tutta la portata; e che tale portata necessariamente sfugge a chi non possa desumerla da una solida preparazione e da una vasta cultura specifica.

Per spiegarmi con un esempio: il teorema di PITAGORA per il piccolo alunno di seconda tecnica, che ne ha, si e no, compresa la giustificazione, è il teorema che gli dà una regola pratica per risolvere problemi di un certo determinato tipo e che gli dà modo così di contentare il suo professore e strappargli il famigerato sei; ma già per un buon alunno di liceo è la proposizione che può essere invocata per stabilire l'esistenza di coppie di grandezze fra loro incommensurabili.

Basta già questo perchè il valore di quel teorema apparisca sotto una luce diversa; basta già questo perchè la portata della sua scoperta apparisca subito immensa a chi sia informato della storia della filosofia e della scienza e sappia che cosa abbia significato per quella e per questa la dimostrazione dell'esistenza di coppie di grandezze fra loro incommensurabili.

* * *

« Immensa ?! », dirà un herbartiano. « Immensa la portata della scoperta di coppie di grandezze fra loro incommensurabili, e quindi della teoria degli irrazionali ?. Ma se il concetto dell'irrazionale è contradittorio ! ».

Ecco infatti quanto si legge alla pag. 272 dell'*Introduzione alla filosofia* dello HERBART tradotta dal VIDOSSICH e accolta nell'aurea collana di testi filosofici e di traduzioni edita dal Laterza.

« Il concetto dell'irrazionale è contradittorio come quello del continuo. Il che si appalesa fin nell'aritmetica. Se le radici e i logaritmi debbono crescere continuamente, è impossibile che lo stesso avvenga delle potenze; anzi debbono lasciar liberi degli interstizi, che vengono occupati da numeri, che non hanno nè radici, nè logaritmi. E tuttavia lo si richiede per tutti i numeri senza eccezione. Si faccia che x cresca di dx: e, per pensare esattamente, il differenziale dx non sia una qualche quantità per quanto piccola, già sussistente, ma indichi soltanto che x sta per crescere. Allora x^m non sta per crescere di dx, nè di $x^{m-1}\,dx$, ma di $mx^{m-1}\,dx$.

« Se ora m è un intero positivo, la potenza sta per compiere un salto, cioè oltre a ogni minor quantità di x e di $x^{m-1}\,dx$; ma se m è una frazione vera, la potenza vuol crescere *meno che continuamente,* se x progredisce continuamente. E poichè la matematica, senza questi suoi concetti fondamentali non potrebbe giungere al di là della regola del tre, si vede che questa scienza è un tessuto di contraddizioni. Se ella ne potesse morire, da lunghissimo tempo sarebbe già perita. Ma in realtà per essa è un titolo d'onore l'esser proceduta diritta per la via della sua logica necessaria, senza lasciarsi sgomentare dall'assurdo dei concetti, contro i quali doveva cozzare. Solo occorre conoscerne l'indole e regolarsi a seconda di questa nelle applicazioni al reale ».

A conclusioni analoghe perviene il Croce.

Escluso che i principii matematici siano *a posteriori* ed empirici e riconosciutili come *a priori*, le difficoltà, dice il Croce, « non cessano con questo. L'apriorità di quei principii ha altri caratteri, molto singolari, che li rendono dissimili dalle cognizioni a priori della filosofia, dalla coscienza degli universali e dei valori, e, per es., del valore logico o di quello morale. È infatti impossibile pensare che i concetti del vero e del buono non siano veri; ma è, invece, impossibile pensare che i principii delle matematiche siano veri. Anzi considerati rigorosamente, essi risultano tutti, e del tutto, falsi. La serie numerica si ottiene movendo dall'unità e aggiungendo sempre un'unità; ma, nella realtà, non vi ha nessun fatto, che possa funzionare da capo serie, e nessun fatto è distaccabile dall'altro in modo da generare una serie discontinua. Se la matematica abbandona il discontinuo pel continuo, esce da sè stessa, perchè abbandona la quantità per la qualità, l'irrazionale che è il suo dominio, per il razionale; se resta nel discontinuo, pone qualcosa di irreale e impensabile. Lo spazio viene caratterizzato come costituito da tre o più dimensioni; ma la realtà ci offre, non già questo spazio, così costituito, aggregato di dimensioni: sì bene la spazialità, cioè la pensabilità, l'intuibilità in genere, l'estensione viva ed organica, non meccanica e aggregata, il cui carattere non è di avere tre dimensioni o una o due, ma di essere spazialità, in cui nell'una sono tutte le altre dimensioni, e quindi non vi sono dimensioni distinguibili ed enumerabili. E se impossibili riescono le tre o più dimensioni come attributi dello spazio, e il punto inesteso, e la linea senza superficie, e la superficie senza solidità, impensabili sono anche, di conseguenza, tutti i concetti derivati, come quelli delle figure geometriche, nessuno dei quali ha o può avere realtà; nessun triangolo ha o può avere, la somma degli angoli eguali a due retti, perchè nessun triangolo ha esistenza. Onde, diversamente dai concetti filosofici, che sono tutti in ogni istante e non si esauriscono in nessun istante, quei concetti geometrici non si esauriscono in nessun fatto reale, perchè non sono in nessuno.

Come sono impensabili, così i principii della matematica non sono immaginabili; e perciò malamente sono stati definiti entità immaginarie, nel qual modo cesserebbero, perfino, di aver validità in quanto a priori. Essi sono a priori ma senza carattere di verità; contradizioni organizzate. Se la matematica » — e qui il Croce rimanda appunto al passo dello Herbart che ho riportato — « dovesse morire per le contradizioni di cui è contesta, sarebbe morta da lunga pezza. Ma essa non ne muore, perchè non si prova a pensarle; come un animale velenoso non muore del proprio veleno, perchè non se lo inocula. Se pretendesse pensarle e darle come vere, quelle contradizioni diventerebbero, tutte, falsità ».

E di qua il Croce deduce che la matematica non ha valore teoretico ma pratico, perchè « una funzione che organizzi contradizioni teoretiche, senza pensarle e perciò senza cadere in contradizioni, è una funzione non teoretica, ma pratica ». [1]

* * *

Ora non voglio discutere se dal suo punto di vista il Croce abbia ragione o no di negare alla matematica ogni valore teoretico; nè voglio gravar minimamente la mano sulle inesattezze non piccole e sulle ingenuità molto.... candide di cui formicolano i brani riportati; sarebbe troppo facile — ogni matematico qui presente può farne fede — e non sarebbe generoso. D'altronde io non li ho riprodotti se non per dare un esempio concreto di certi procedimenti critici.

[1] Vedi Croce, *Logica come scienza del concetto puro* (Bari, Laterza e figli, 1909), pag. 253 e seg.ti.

Ma se pure essi sono affatto inadeguati a dimostrare il grave assunto da ciascun di essi propostosi, e cioè che la matematica sia un tessuto di contradizioni, è chiaro che una persona colta, anche se non è uno specialista, non si porrebbe una questione di codesto genere, per umiliante che possa sembrare a noi matematici, se non vi fosse stata qualche circostanza atta a provocarla; se alla straordinaria affermazione non vi fosse stato qualche appiglio.

E non è affatto difficile indicare tali circostanze e tali appigli.

Una teoria matematica, al pari di qualsiasi teoria scientifica, non nasce perfetta: non sorge dal pensiero umano armata di tutto punto, come Minerva, secondo la favola, dalla testa di Giove. Ciascuna teoria, che meriti questo nome, è nella sua realtà storica uno *sviluppo*, un *processo*, di cui è ridevole voler cogliere l'esatto punto di partenza ed è vano pensare di poter cogliere il preciso punto di arrivo; nè in alcun momento dello sviluppo, per attenzione che vi si ponga, per cultura di cui uno si armi, per cautele e precauzioni di cui uno si circondi, vi è modo di intenderne a pieno la portata e di intuirne tutte le mire. Vi è sempre qualche cosa che sfugge alla conoscenza consapevole, che si profonda nel subcosciente, che quivi ha le sue radici, quivi il suo fondamento migliore.

Se si volessero prendere, a volta a volta, in parola i fondatori del calcolo infinitesimale, se, per es., si volesse proprio sapere che cosa LEIBNIZ intendesse per infinitesimo o per differenziale, e a ciò si volesse pervenire esaminando le opere del LEIBNIZ e attaccandosi ostinatamente alla lettera, sarebbe falice scoprire inesattezze e contradizioni; a quella stessa guisa che è facile metter su domande imbarazzanti quando, a cominciar da SESTO EMPIRICO e ad arrivare giù giù fino ai filosofi contemporanei, si suppone che la geometria sia rimasta quella che era ai tempi di EUCLIDE e ci si afferra quindi alle definizioni « punto è ciò che non ha parti », « linea è ciò che ha lunghezza e non larghezza » e così via. A quello stesso modo che si grida, con aria di trionfo, « ecco il formalismo dei matematici, ecco la loro ingenua consuetudine di credere di aver creato un concetto, quando non hanno creato che un nome », perchè se ne coglie qualcuno a dire, poniamo, che si introducono come puri enti fittizi, i numeri negativi, per render possibile la sottrazione nel caso che il sottraendo superi il diminuendo, o i numeri imaginari, per render possibile l'estrazione della radice quadrata dai numeri negativi.

Affermazioni queste che effettivamente possono farsi risalire a grandi matematici, ed affermazioni che possono esser volte facilmente in ridicolo. Ma la tranquilla fermezza, facile a scambiare per cocciuta ostinazione, con la quale i matematici non hanno voluto interdirsi l'uso dei numeri imaginari prima di aver dato alla teoria di questi un soddisfacente assetto logico; la famosa esortazione del D'ALEMBERT a chi gli affacciava dubbi sui principi dell'analisi infinitesimale, « *andate, andate avanti e la fede vi verrà* », hanno trovata la loro piena giustificazione nel fatto che oggi l'una e l'altra teoria non sollevano difficoltà maggiori di quelle che possa presentare la teoria delle operazioni sui numeri interi; e indicano in modo, che non si potrebbe desiderar migliore, come alle menti geniali non occorra attendere che le loro profonde intuizioni abbiano raggiunto un alto grado di chiarezza discorsiva per avere il sicuro convincimento che con esse hanno fermamente colto qualche cosa di reale.

Aggiungasi che a taluni rilievi sulla astrattezza della matematica, sulla natura arbitraria dei suoi principi hanno dato origine affermazioni di matematici e di grandi matematici. È stato il POINCARÉ quello che ha definito i postulati della geometria libere creazioni dello spirito umano, convenzioni utili e comode quanto si vuole, ma convenzioni; ed è stato il RUSSELL quello che in una polemica appunto col POINCARÉ, ebbe a definire paradossalmente la matematica come quella scienza in cui non si sa di che si parli, nè si sa se quello che si dice sia vero; definizioni di cui non è possibile cogliere il vero significato, se non si ha modo di trovarne l'adatta dilucidazione e le necessarie limitazioni in una sufficiente preparazione tecnica.

* * *

Vediamo appunto di renderci ragione di ciò che il RUSSELL ha voluto dire con la sua definizione paradossale, perchè così avremo anche l'occasione di procurarci i mezzi necessari per chiarire, nei limiti del possibile, l'essenza e il valore della matematica.

Consideriamo una qualsiasi teoria in cui la deduzione logica trovi applicazione frequente e fruttuosa; ad es., e per fissare le idee e perchè di ciò la matematica pura offre gli esempi migliori, consideriamo la geometria elementare, di cui tutti che ascoltano, matematici o non, sono sufficientemente informati.

La geometria elementare introduce degli enti, punti, rette, piani, triangoli, poligoni, cerchi,..... e studia le proprietà che li collegano.

Di quegli enti cerca, per quanto è possibile, di dar delle definizioni; di queste proprietà cerca, per quanto è possibile, di dar delle dimostrazioni. Dico per quanto è possibile, perchè sarebbe vano domandare alla geometria di definire tutti i sui enti e di dimostrar logicamente tutte le sue proposizioni.

Le definizioni e le dimostrazioni sono processi di riduzione; con quelle si riportano concetti da definire ad altri che si riguardano come già acquisiti, con queste si riconducono le proposizioni da dimostrare ad altre che si riguardano come già stabilite. Se dunque non si vuole ammettere come possibile in questo caso un regresso all'infinito, bisogna pur che la geometria elementare alcuni dei suoi enti non li definisca, ma li assuma, secondo l'espressione dei matematici, come *enti primitivi,* e alcune delle sue proposizioni non le dimostri, ma le presenti come *postulati.*

Come è chiaro *a priori,* e come è confermato *a posteriori* dalla diversità delle varie organizzazioni concrete della geometria elementare in un corpo razionale di dottrine, o, come i matematici dicono, in un sistema ipotetico-deduttivo, effettivamente indicati dai vari geometri o trattatisti, ciò può essere fatto in più modi differenti.

Ma su ciò sarebbe poco utile diffondersi; a noi basti desumere a questo punto, dalle considerazioni fatte, che la struttura generale di quel che si dice un sistema ipotetico deduttivo, e di cui la geometria elementare ci ha fornito un esempio, è questa: si suppongono come noti certi enti, si suppongono come note certe proprietà che li collegano e poi si cerca, come direbbe Galileo, per via di *discorso* di trarne le conseguenze; cioè si cerca di dedurre le proprietà a cui quelle ammesse conducono quando si pongano a raffronto tra di loro col puro sussidio del ragionamento logico.

Se questo è stato fatto con pieno rigore, tolti gli enti primitivi tutti gli altri che si considerano debbono esser definiti nominalmente mediante quelli, e tolte le proposizioni che sono postulate, tutte le altre debbono esser dedotte logicamente da quelle, cioè debbono essere, con linguaggio tecnico, dei teoremi.

Di qua subito un'osservazione che importa mettere in rilievo.

Per tornar al nostro esempio concreto prendiamo a considerare un trattato di geometria elementare.

Noi troviamo per es. che i punti, le rette e i piani non sono definiti, nè è definito che cosa significhi che due segmenti o due angoli sono eguali e così via (è quello che realmente accade nei testi di geometria ispirati alle idee dello HILBERT); anche troviamo che non sono dimostrate le proposizioni « una retta contiene infiniti punti » ; « per una retta passano infiniti piani », « segmenti eguali a uno stesso sono eguali fra di loro », ecc. ecc.; ma dopo ciò si definisce chiaramente, per es., che cosa sia un triangolo o una circonferenza, che cosa significhi il dire che due triangoli sono eguali, e si dimostra formalmente, per es., che per ogni segmento esiste un punto che lo divide in due parti eguali.

Ora, certo, le rappresentazioni grossolane che ciascuno di noi si fa dei punti, delle rette o dei piani partendo dalle imagini visive di un granellino di sabbia, di un filo teso o della superficie libera di un liquido in quiete, e delle coppie di segmenti eguali partendo da coppie di regoli a spigoli sovrapponibili, sono assai utili a dare un qualche senso agli enti che nel nostro trattato vengono assunti come primitivi e alle proposizioni che a proposito di essi vengono assunte senz'altro come vere, e sono anche assai utili a dare una qualche garanzia della compatibilità logica di tutto ciò che dal detto trattato ci viene chiesto di concedere come conosciuto — sulla quale ultima circostanza avremo occasione di ritornare; — ma è chiaro che nè esse, nè altre debbono intervenire mai attivamente nelle deduzioni successive. Queste han da essere deduzioni logiche, e non sarebbero tali se, apertamente o surrettiziamente, ricorressero a qualche principio non contenuto fra i principi esplicitamente richiesti come postulati, ma desunto da questa o quella rappresentazione che degli enti geometrici uno può formarsi.

Agli effetti dunque — mi si passi la frase burocratica — delle deduzioni successive di cui or ora si diceva, ogni senso concreto che possa attribuirsi alle parole punto, retta, piano ecc., e quindi a tutte le proposizioni che le involgono, è affatto irrilevante. A quegli effetti si può imaginare, volendo, che i punti, le rette, i piani ecc., siano, non proprio quel che ordinariamente si intende significare con queste parole, ma, come direbbe lo HILBERT, delle qualunque *cose* per le quali abbiano significato e sussistano i principi ammessi come veri.

Alla luce di questa osservazione si scorge intanto in qual senso possa essere accolta la prima parte della definizione del RUSSEL; « la matematica è quella scienza in cui non si sa di che si parli ». Essa è pienamente legittima se si considera come un'energica affermazione della necessità di non fare intervenire nelle deduzioni logiche il significato concreto che possa essere, da questo o quello, attribuito agli enti primitivi; e non è niente affatto più paradossale dell'affermazione di chi dicesse: « Nella casistica legale non si sa di chi si parli, perchè i soliti Tizio, Caio e Sempronio di cui in essa si discorre non sono persone realmente esistenti o realmente esistite ».

Ma ad essa si può collegare anche una considerazione che ci sarà utile fra poco.

Chi afferma che dati gli enti $a, b, c, \ldots$ legati fra loro da certe relazioni espresse dalle proposizioni $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, se le ulteriori relazioni fra di essi espresse dalle proposizioni $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sono conseguenze necessarie, puramente logiche, di quelle significate da $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, nella deduzione di $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, è irrivelante tener conto di ciò che quegli enti realmente siano, e quindi di ciò che realmente significhino e le proposizioni $a, \beta, \gamma, \ldots$ e le proposizioni $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, non fa se non esprimere sotto altra forma questo fecondo principio logico: se due classi di enti $a, b, c, \ldots$ e $a', b', c', \ldots$ sono tali che per la classe $a', b', c', \ldots$ valgono le proposizioni $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ ricavate dalle proposizioni $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, valide per $a, b, c, \ldots$, ponendo nell'enunciato di queste $a', b', c', \ldots$, al posto di $a, b. c, \ldots$, tutte le proposizioni $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ che sussistono per $a, b, c, \ldots$ e che sono conseguenze logiche di $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dànno luogo ad altrettante proposizioni $\lambda', \mu', \nu', \ldots$ valide per $a', b', c', \ldots$, quando nei loro enunciati ad $a, b, c, \ldots$ si sostituiscano $a', b', c', \ldots$.

Per spiegarci con un esempio estremamente banale, se è vero che la proposizione « Socrate è mortale » è conseguenza logica delle due altre « ogni uomo è mortale » e « Socrate è un uomo », possiamo dedurre senz'altro che « Platone è mortale » appena avremo constatato che « Platone è un uomo »: possiamo cioè sostituire Platone a Socrate nella conclusione, se ci è lecito sostituire Platone a Socrate nelle premesse.

La banalità di questo esempio non è certo adatto a porre in rilievo l'importanza e la fecondità del principio; nè a farle rilevare sarebbe opportuno diffondersi ora lungamente, perchè questo ci allontanerebbe dallo scopo cui miriamo: basti soltanto ricordare che su di esso è fondata la straordinaria ricchezza di applicazioni della geometria iperspaziale; di esso si valse il Beltrami per dimostrare in modo altrettanto semplice quanto geniale la coerenza logica del sistema geometrico lobacefschiano, con un tipo di procedimento di cui avremo occasione tra poco di parlare; ad esso si fa utile ricorso per dare alla matematica moderna una sempre maggior saldezza organica, e, per ciò stesso, una sempre più ammirevole semplicità di linee, una sempre più alta eleganza.

Piuttosto giova fermarsi un momento a chiarire mediante quel che è stato detto una nozione assai importante.

Si supponga nel principio or ora enunciato che $a, b, c, \ldots$ siano gli enti primitivi, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i postulati e $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ i teoremi di un sistema ipotetico-deduttivo; allora $a', b', c', \ldots$, $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, e $\lambda', \mu', \nu', \ldots$ saranno rispettivamente gli enti primitivi, i postulati e i teoremi di un altro sistema ipotetico-deduttivo, differente dal primo per la natura degli enti cui si riferisce, ma identico a quello per quanto ha tratto alla sua struttura logica o formale.

Ebbene due tali sistemi si dicono due interpretazioni concrete diverse di uno stesso sistema ipotetico-deduttivo astratto, questo ottenendosi da uno qualunque di quelli considerandovi gli enti primitivi come enti, soggetti sì alla condizione di soddisfare i postulati, ma per il resto al tutto indeterminati.

In modo conciso e suggestivo possiamo dire dunque che ogni sistema ipotetico-deduttivo concreto vuotato del suo contenuto intuitivo dà luogo a un sistema ipotetico-deduttivo astratto; e ciascuno di questi sistemi astratti dà luogo a tanti di quei sistemi concreti, quante sono le varie interpretazioni intuitive di cui è suscettibile.

* * *

E veniamo ora ad una questione fondamentale.

Sta bene, si dirà al matematico, che ci presenta un determinato sistema ipotetico-deduttivo astratto, sufficientemente ampio e saldamente costruito; quando noi ti abbiamo concesso i postulati che tu ci chiedi, le conseguenze che ne deduci sono necessarie; ma chi ci assicura che in tutto quello che ti abbiamo concesso non si annidi qualche contradizione? Il fatto che durante il tuo processo deduttivo contradizioni non si siano manifestate, non ostante l'ampiezza dello sviluppo, non è, a questo proposito, garenzia sufficiente: dimostraci che i postulati da cui parti sono compatibili.

Errerebbe chi credesse che appunto a questa domanda il Russell volesse sottrarsi con la seconda parte della sua definizione già ricordata, o con quest'altra dichiarazione estratta dai suoi *Principles of Mathematics* (2):

« In matematica noi continuamente affermiamo che se una certa asserzione p è vera per un certo ente x, o per un certo gruppo di enti $x, y, z, ...$ allora è vera per quello o per questi anche una qualche altra asserzione q; ma non affermiamo separatamente nè p nè q ».

Con tutto ciò il Russell ha voluto semplicemente significare che egli riguarda la matematica come un insieme di sistemi ipotetico-deduttivi astratti: non ha voluto certo sostenere che la matematica si riserba, se occorre, il diritto di contradirsi.

(2) B. Russell, *The Principles of Mathematics* (Cambridge, University Press, 1903), pag. 5.

Alla domanda ora posta, nè il RUSSELL, nè alcun altro matematico intende di sfuggire. Ad essa, anzi è stata data una risposta che è, dal punto di vista filosofico, uno dei maggiori risultati della profonda critica a cui i matematici hanno sottoposto i principi della loro scienza.

Vediamo di chiarirla in qualche modo.

In primo luogo è chiaro che la domanda:

Dimostratemi che queste proposizioni sono fra loro compatibili, non può esser rivolta indifferentemente per qualunque gruppo di proposizioni che possa essere escogitato.

Nessuna persona ragionevole può esigere che gli si dimostri la compatibilità dei principi logici fondamentali; esiger questo sarebbe esiger cosa priva di senso.

Una dimostrazione di tale compatibilità, dico dimostrazione nel senso preciso in cui noi matematici adoperiamo questa parola — l'avvertenza non parrà inutile a chi rifletta che cosa siano per es. le dimostrazioni delle leggi di KEPLERO addotte dallo HEGEL e che egli osa presentare come preferibili a quelle di NEWTON (3) — è evidentemente impossibile, una volta che per tentarla bisognerebbe pure far ricorso a quei principi la cui compatibilità sarebbe in questione.

Resta dunque fissato che la compatibilità di qualche gruppo di proposizioni deve esser concessa quando si chiede la dimostrazione della compatibilità di qualche altro; e che tra le proposizioni concesse come non contradittorie debbono comparire le leggi fondamentali del pensiero discorsivo.

Ebbene imaginiamo concesse queste e queste soltanto (e mi si permetta di non fermarmi a chiarire questa affermazione per toglierle quel che di vago che in essa rimane — quante e quali sono le proposizioni concesse? — ; la cosa potrebbe esser messa facilmente in termini netti e precisi): si domanda ai matematici: « adesso siete in grado di dimostrare la compatibilità delle vostre singole teorie? »

Se la logica si intende al modo ordinario e quindi si escludono da essa tutte le proposizioni esistenziali, la risposta non può essere evidentemente che negativa; ma si può dedurre dall'opera del RUSSELL, ed è stato esplicitamente osservato dal PEANO (4) che basta

(3) G. G. F. HEGEL., *Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio* (trad. di B. Croce, Bari, Laterza e figli, 1907), pp. 227-233.

(4) G. PEANO, *Super theorema de Cantor-Bernstein,* Rev. de Math., VIII, p. 141.

ammettere la proposizione: « Esiste almeno una classe infinita », perchè la consistenza logica di ogni teoria matematica, ossia la compatibilità dei suoi postulati, possa essere apoditticamente dimostrata.

Non è quì il caso di fermarsi troppo minutamente sullo sviluppo effettivo della dimostrazione cui ora si è alluso; basti indicare la linea generale del procedimento, per mostrare come in esso soccorra l'ordine di considerazioni più avanti indicato.

Un sistema ipotetico-deduttivo concreto e il corrispondente sistema astratto sono evidentemente insieme coerenti, o insieme contradittori. Ebbene per dimostrare, per es., che l'ordinaria teoria dei numeri interi svolta nelle nostre aritmetiche ragionate a partir da questo o quel gruppo di postulati è logicamente coerente, si fa vedere che quanto è stato concesso basta a dimostrar l'esistenza, e quindi la coerenza logica, di un sistema ipotetico-deduttivo concreto che, insieme con quello costituito dalla teoria dei numeri interi, risponde a uno stesso sistema astratto. Dopo ciò la coerenza logica di quel sistema concreto porta con sè la coerenza logica di questo sistema astratto e quindi della teoria dei numeri interi.

Allo stesso modo, supposta già giustificata la teoria dei numeri interi, e, quindi, dei numeri razionali e reali a quel modo che è indicato nei nostri trattati migliori, si dimostra la compatibilità dei postulati della geometria elementare, costruendo con la totalità delle terne ordinate di numeri reali quel che si dice lo spazio numerico reale ordinario a tre dimensioni, e mostrando che per questo spazio vale una teoria, che può considerarsi come un'interpretazione concreta dello stesso sistema ipotetico-deduttivo astratto, di cui un'altra interpretazione concreta è data dalla geometria elementare.

* * *

È bene diffondersi un momento sul risultato a cui siamo pervenuti per un triplice ordine di considerazioni.

In primo luogo se un matematico è pronto oggi a concedere la proposizione: « Esiste una classe infinita, almeno », non altrettanto pronto è qualche filosofo.

Concedere l'esistenza di una classe infinita ?!, dirà qualcuno di questi. Ma ciò equivale a concedere l'infinito attuale e il concetto di infinito attuale è contradittorio! Diamine: questa è osservazione molto vecchia. Ecco provato, cari matematici, con quello stesso che voi ci venite dicendo, che la vostra scienza è un tessuto di contradizioni.

Per intendere chiaro il valore di questa obiezione prendiamo a considerare uno degli argomenti a cui si fa ricorso per dimostrare la contradittorietà del concetto di classe infinita.

Concediamo, si dice, come data la serie infinita dei numeri naturali

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Consideriamo entro di essa la serie dei numeri pari

$$2, 4, 6, 8, \dots;$$

anche questa sarà data come quella. A ciascun elemento della prima facciamo corrispondere quello della seconda che rappresenta il suo doppio, all'1 il 2, al 2 il 4, al 3 il 6 e così via. In questo modo a ciascun elemento di ciascuna serie viene collegato uno ed un solo elemento dell'altra.

Ed ecco l'assurdo, si dice; ecco che la totalità dei numeri naturali, di cui quella dei numeri pari è soltanto una parte, è riferibile biunivocamente a questa sua parte. E ciò è assurdo, perchè è verità assiomatica che il tutto è maggiore della parte.

La risposta dei matematici è oggi assai semplice; e dico, oggi, perchè non son mancati, qualche tempo fa, dei matematici che all'argomentazione ora addotta hanno prestato, più o meno esplicitamente, il proprio assenso. Nessun dubbio, essi dicono, che se si ha un cesto di 50 mele e una scatola di fiammiferi, si può collegare a ciascuna mela del cesto uno ed un solo fiammifero della scatola e a ciascuno di questi fiammiferi una ed una sola di quelle mele, quando, e solo quando, la scatola contiene precisamente 50 fiammiferi; nessun dubbio dunque che la serie dei primi 50 numeri naturali, e lo stesso dicasi per i casi analoghi, non può riferirsi biunivocamente a una sua parte. Ma non si ha alcun diritto di gridare all'assurdo perchè si trova che non vale per la serie di tutti i numeri naturali, quanto vale per ciascuna sua parte finita. Qui non vi è luogo a parlare di assurdo; qui vi è luogo semplicemente a distinguer classi finite da classi infinite, ed a rivelare che alcune affermazioni valide per quelle classi valgono anche per queste, mentre vi sono pure delle affermazioni per cui ciò non sussiste. Che se la classe A è contenuta nella classe B e questa a sua volta è contenuta nella classe C, anche A sta in C; ecco questa è una proposizione che è valida qualunque siano le classi A, B, C; ma che se tra le classi A e B intercede una corrispondenza biunivoca non può intercedere una tal corrispondenza tra A e una sotto-classe propria di B, ecco questa è un'affermazione, valida per classi finite, che, come mostra appunto l'argomentazione addotta, non è valida per classi infinite.

Non ignoro che la difficoltà a concedere l'esistenza di classi infinite è collegata per molti filosofi a vedute che per essi sono di importanza vitale. Per es., non può concederla, e in fatto non la concede, un fenomenista, come il prof. GUASTELLA dell'Università di Palermo; il quale non vuole accordare a JULES TANNERY che « dopo ciascun numero intero ve ne ha qualche altro » ; ma soltanto che « per ogni numero dato sono dabili dei numeri più alti » (5). Ma, come ebbe ad osservare per una occasione consimile il LEIBNIZ, si illude chi crede d'essersi liberato dall'infinito attuale perchè afferma che è soltanto dabile ciò che altri ritiene come dato, poichè appunto nella garanzia che ci si dà che per ogni numero dato è dabile qualche numero più alto, si annida quell'infinito attuale che si credeva di aver cacciato via; nè d'altronde un matematico può accettare che i risultati della sua critica debbano sottostare a vedute fondate su considerazioni che non hanno affatto la cristallina chiarezza, la scrupolosa precisione, la coerenza logica dei suoi procedimenti. Il matematico che si sente condannare, in nome di questa o quella filosofia, poniamo, la teoria degli insiemi, creazione immortale di GIORGIO CANTOR, e che la condanna vede poggiata o su argomentazioni di cui egli ha riconosciuto da un pezzo il nessun valore, o su vedute che mal si prestano a una vera e propria utilizzazione discorsiva, ha tutto il diritto di dedurre, caso mai, non da queste vedute l'inficiamento delle sue teorie, ma dalle sue teorie il rigetto di quelle vedute.

*
* *

Qui veramente non tutti i matematici sarebbero disposti a consentire. Molti di essi, e vengo con questo al secondo punto che mi proponevo di illustrare, non vogliono saperne di aver a che fare con la filosofia; per essi non solo le teorie matematiche possono esser presentate sotto forma di sistemi ipotetico-deduttivi astratti, ma *sono* addirittura dei tali sistemi. Dimostrata, per es., la coerenza logica della geometria elementare astratta essi riguardano come esaurito il loro compito: la geometria elementare concreta, in quanto scienza dello spazio, nel senso che ordinariamente si dà a questa parola, la considerano come qualcosa che, in quanto matematici, non li riguarda.

(5) GUASTELLA, *Filosofia teoretica* (Corso litografato, 1912), pag. 596.

La valutazione di questa essi la abbandonano volentieri ai filosofi. Per essi la matematica non è scienza del reale, ma del possibile.

E pare a questi che, vuotando le teorie quanto più è possibile di contenuto intuitivo si raggiunga anche lo scopo di dare alla loro scienza, di fronte alle scienze fisiche e naturali, un valor superiore, una maggior certezza, quasi un posto d'onore.

Se si scruta a fondo l'atteggiamento del Poincaré, per il quale i principî della geometria non sono che convenzioni e libere creazioni dello spirito umano, si vede che ad esso non è estraneo il desiderio di poter concludere, come nel fatto conclude, che la geometria è assolutamente vera.

Strano atteggiamento questo che conduce a isolare la matematica dal cerchio vitale della filosofia naturale (uso questa denominazione nel senso classico newtoniano), a privarla di qualsiasi verità concreta e positiva, per attribuirle una vuota e insignificante verità assoluta astratta.

Niun dubbio che il matematico, in quanto tecnico — sopratutto in quanto riorganizzatore della scienza già fatta — possa prescindere dalle interpretazioni concrete delle sue teorie, e, se occorre, proprio da quelle interpretazioni concrete che le hanno fatto sorgere: ma la matematica ha da uscire dalla torre di avorio in cui, come tecnica, potrebbe fino a un certo punto rinchiudersi, se vuole che si discorra del suo valore.

E allora la geometria elementare, per es., si riguarderà non più, col Russell, come un sistema ipotetico-deduttivo astratto ma, col Klein e con l'Enriques, come un capitolo della fisica. Con che essa non viene diminuita, ma elevata.

Non è un diminuirla il comporla con la fisica in un più vasto insieme di conoscenze; non è un diminuire la matematica il darle un posto nella filosofia naturale, quando un tal posto è, come tutti sanno, di regina, di regolatrice suprema. *Nessuna umana investigazione*, ebbe a dire il nostro Leonardo, *si può dimandare vera scienza, s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni;* ed è famosa la sentenza di Kant: *Io affermo che in ciascuna teoria della natura tanto vi è di veramente scientifico, quanto vi è di matematico.*

* * *

E passiamo a considerare in terzo luogo l'obbiezione più radicale che può essere mossa a quanto siamo venuti dicendo e che, per quanto è stato detto, è effettivamente mossa dal Croce. Il quale ben lungi dal concedere l'esistenza di una qualche classe infinita, e, nel caso suo, della classe dei numeri naturali, nega che questa sia pensabile perchè nessun fatto può esser distaccato dagli altri, nessun fatto può essere invocato ad assumer le funzioni di capo-serie.

Ecco: che i fatti, nella realtà viva di cui ciascuno di noi è spettatore ed artefice si colleghino fra loro in un'unica trama continua e coerente, è proposizione a cui nessuna persona ragionevole può negare, nè intende negare, il suo consenso; e lo stesso dicasi dell'affermazione che la realtà non si risolve in un aggregato meccanico di fatti. Poco fa abbiamo pure avuto occasione di osservare qualche cosa di simile. Ma da questo ad asserire *sic et sempliciter* che dunque nessun fatto può esser tolto a funzionar da capo-serie ci corre. Se in omaggio a quella osservazione non si deve poter parlare di *un* fatto singolo, quale significato ha il venire a dire che i fatti si collegano in un tutto?

L'obbiezione del CROCE, e non del CROCE soltanto, spinta alle sue ultime conseguenze, porta nientemeno a negare che si possa discorrere di oggetti distinguibili del pensiero; e in questo non so quanti potrebbero convenire. Se si ha da ragionare di A e di B per vedere di decidere se A sia o non sia B, bisogna pur supporre che durante tutto il corso del ragionamento e A e B rappresentino ciascuno qualche cosa di invariabile; il famoso principio di identità, di che tanto si discorre nella logica, $A=A$, se non ha da essere una pura tautologia, se non ha da essere occasione di interminabili giochi di parole, o di esercitazioni paradossali di un gusto alquanto dubbio, non può essere interpretato se non appunto come l'affermazione dell'invarianza degli oggetti del pensiero di fronte al processo discorsivo ([6]).

Si vuol negare tutto ciò? Si vuol sostenere che quando si parla di oggetti del pensiero nel senso che ora ho detto si è nel campo dell'astratto, non del pensiero pensante, ma del pensiero pensato? e quindi fuori della filosofia, perchè filosofia, è scienza dello spirito e spirito è pensiero in atto, in quanto è in atto?

Si faccia pure. Ma se alla logica dell'astratto, alla logica aristotelica, diventata oggi la logica matematica, si deve guardare con l'aria di benevolo compatimento col quale chi è giunto alla virilità guarda alle ingenuità del bambino, e se anzi non si deve risparmiarle nè frizzi nè sarcasmi, si procuri di far questo con un poco di coe-

([6]) Cfr. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza* (Zanichelli, Bologna, 1906) p. 194.

renza: si rinunzi puramente e semplicemente a ragionare — ripeto, a ragionare, nel senso in cui noi matematici, assai prudenti passatisti di fronte a certi audaci futuristi usiamo intendere questa parola.

Chi discute, chi crede che discutendo faccia qualche cosa di diverso da quel che fa quando nell'ora della siesta segue con gli occhi semi-chiusi le volute del fumo dalla sua sigaretta e su di ciò fantastica, senza la consapevolezza del suo fantasticare, chi crede che quando si discute vi sia luogo a distinguere tra l'atto della discussione e l'argomento di cui si discute, è perciò stesso entrato nel campo dell'astratto, del pensiero pensato, della natura, o, per dirla con una suggestiva frase gentiliana, della massiccia fissità dell'essere.

Se in tale massiccia fissità non vuole rinchiudersi — e il rinchiudervisi non porterebbe affatto, sia detto incidentalmente, alle gravi conseguenze che taluno mostra di paventare — egli è ben padrone di farlo; ma non cerchi di dimostrarci che non è possibile far diversamente. Per dimostrarlo egli dovrebbe valersi di uno strumento che ha già sdegnosamente gittato via come privo di qualsiasi valore.

*
* *

Con quanto ora ho accennato ho implicitamente alluso alla difficoltà più grave che per me vi è a concedere adesione piena all'ampio movimento filosofico che ha culminato nell'idealismo attuale del nostro GENTILE, e in fondo al quale mi par di intravedere un poco seducente nullismo.

Ma questo non significa che io non apprezzi, e altamente, talune delle sue maggiori conquiste; che io non senta, poniamo, l'altissimo *pathos* dei libri del GENTILE, grande scrittore nostro, di cui è indicibile il fascino tra la maschia robustezza dello stile, la fervida spontaneità dell'espressione, l'acceso lirismo che mai non posa; che il mio animo resti muto, poniamo, di fronte alla bella opera di didattica e d'arte che sono le *Lezioni* del nostro LOMBARDO RADICE.

Per esempio io mi trovo proprio sopra una delle direttive dell'idealismo quando, col *Voss* (7), credo che il valore educativo della matematica, il suo miglior titolo ad essere inclusa tra le materie d'insegnamento delle nostre scuole, debba essere cercato non tanto sul terreno logico, quanto sul terreno etico.

(7) A. VOSS, *Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart* (in *Die Kultur der Gegenwart*, herausgegeben von Paul Hinneberg, B. G. Teubner, 1914), pag. 42.

Che una vasta cultura matematica porti con sè un sicuro possesso dello strumento logico, e una grande capacità a rappresentarsi chiaramente nel suo insieme un lungo processo deduttivo, che una buona educazione matematica dia l'attitudine a tener desta l'attenzione per un non lieve intervallo di tempo senza grave stanchezza, è fuori dubbio; ma non risiede in questo il più alto valore dell'insegnamento matematico.

Chi ha intesa una dimostrazione matematica, chi è riuscito a rendersene esatto conto, a penetrarne gli intimi congegni, a *vedere* la ferma trama della sua struttura, ha vivo il senso di aver raggiunto una verità con assoluta pienezza di persuasione; ha la gioiosa consapevolezza di non avere prestato il suo consenso ad altra autorità che a quella del suo pensiero; di aver conquistato una verità eterna con un suo autonomo processo spirituale, col suo proprio lavoro.

Ogni materia di insegnamento nelle mani di un maestro, che senta la nobiltà del suo officio, che non sia un meccanico ripetitore, ma un artistico ricreatore di quanto ha da insegnare, che sappia far dell'anima sua un'anima sola con quelle dei suoi scolari, diventa altissimo mezzo di elevazione morale; ma poche credo si prestano a questo altrettanto bene come la matematica. Qui la valentia del maestro non è più tanto necessaria, perchè opera l'indole stessa della materia.

La traduzione di un'ode di Orazio o di un coro di Sofocle, sotto la guida amorosa di un insegnante che abbia anima di artista, quale festa per una scolaresca intelligente! Ma fate che si intiepidisca appena l'ardenza di chi insegna, e che cosa diventa una traduzione? Qua, in un passo oscuro, un rompicapo poco divertente con tre o quattro spiegazioni possibili, tra cui si finisce per decidersi alla bell' e meglio, tanto per uscirne; là, in un passo che non offra difficoltà, un meccanico lavorio di sostituzione di vocaboli, che quando è finito non lascia desiderio di approfondimenti ulteriori, non dà appigli a proseguimenti autonomi.

Ma fate che anche un modesto professore di matematica faccia vedere con chiarezza ai suoi alunni come si estrae una radice quadrata, come si possa eseguir rapidamente, con la tavola dei logaritmi, il colcolo del valore di una complicata espressione numerica — e si osservi che non solo suppongo la mediocrità del professore, ma anche, *ad abundiantiam*, la piatta aridità degli argomenti — ; e guardate quanti sono i ragazzi *che da sè si pongono a saggiare la fruttuosità delle regole apprese sullo sviluppo di un esempio.*

Il valore educativo dell'insegnamento è nei due casi ben diverso!

Ma non basta. A chi insegni matematica non è perciò interdetta, come taluno si compiace di pensare, la possibilità di suscitar negli scolari il senso della bellezza, di eccitarne la fantasia creatrice.

Io ebbi nel liceo, a Firenze, come insegnante di italiano una assai cara persona, un degno poeta, un valente filosofo e un didatta insigne. Come ancora ho nitido il ricordo di certe sue vive interpretazioni, di certi suoi commossi commenti, di certe rapide, nervose, precise caratterizzazioni delle maggiori personalità della nostra letteratura. L'introduzione allo studio della Divina Commedia, la lettura dell'ode a Silvia del Leopardi: ecco per es., due lezioni di cui in me non si cancellerà mai il ricordo. Ancora sento l'ardore raccolto, e per ciò stesso più affascinante, del nostro venerato maestro, il P. Giuseppe Manni delle Scuole Pie, ancora vedo i volti accesi di noi suoi scolari, con le anime negli occhi.

Ma quale fascino pure nelle lezioni del nostro prof. Bianchi all'Università di Pisa, di geometria analitica o di matematiche superiori! Quale chiarezza nella posizione delle questioni; quale signorilità nel possesso sicuro delle più diverse teorie, nel saperle piegare a comporsi con perfetta spontaneità in un tutto armonioso; quale rapidità elegante, quale disinvolta semplicità di procedimenti! E quale attenzione da parte nostra riverente e commossa! Commossa, dico; e del tipo di commozione più elevato e più fine. La pura, la nuda, la vera commozione estetica, senza mistura di passioni, senza inquinamenti sentimentali.

E se l'accesa fantasia di un grande poeta non può non eccitare quella di chi ne rivive le pagine immortali, le teorie matematiche, per la molteplicità dei legami che le vincolano insieme, per la inesauribile possibilità di riscontri e di confronti che esse offrono, per la potente suggestività che da esse, appunto per questo, si sprigiona sono particolarmente adatte a far sorgere, in chi amorosamente le studi, o a rafforzare, a rendere più agile e più sicura di sè, se è già sorta, la fantasia creatrice, ed a munirla nel tempo stesso, come di fermo regolatore, di un acuto senso critico.

Nè alcuna disciplina più della matematica è atta a dare il senso, a chi la possegga, di possedere un indistruttibile tesoro spirituale, un insieme di conoscenze salde, che possano, sì, essere affinate ed approfondite, possono, sì, esser viste oggi sotto luce migliore che ieri, domani sotto luce migliore che oggi; ma che mai potranno rivelarsi come sostanzialmente errate. Per il filosofo d'oggi, lo so bene, Aristotile e Platone, San Tomaso e Sant' Anselmo, Car-

TESIO e SPINOZA e LEIBNIZ e KANT ed HEGEL non sono stati invano; da ognuno di essi egli ripete una qualche parte delle sue idee, in ognuno di essi egli per qualche lineamento si riconosce. Ma il matematico di oggi in EUCLIDE o in ARCHIMEDE, in APOLLONIO, o in TOLOMEO, nella geometria di CARTESIO o nel calcolo di NEWTON e LEIBNIZ trova ben altro che *qualcuna* delle sue idee; se qua ha da scartare una definizione o da correggere qualche dimostrazione, se là può procedere per via diversa e più rapida, perchè possiede concetti più generali e per ciò stesso suscettibili di più larghe applicazioni, per ciò stesso più duttili, più proteiformi, nella sostanza delle cose egli ha ben poco da mutare. Qui l'organica, la forte, la salda continuità dell'opera dello spirito umano risplende con insuperabile vivezza, con solenne magnificenza.

* * *

Ed ora sia permesso a chi non vive che della scuola e per la scuola di esprimere il suo più alto compiacimento per la bella iniziativa dei giovani fondatori del novello Circolo Matematico, per l'ardimentoso entusiasmo che li anima, per la simpatica disinvolta rapidità con la quale procedono.

Nella grave ora che volge, in così grande difficoltà e tristizia di tempi, di fronte ai tanti insani tentativi di chi per instaurare una presunta superior forma di vita si dispone a far *tabula rasa* dei tesori di civiltà accumulati da secoli, di fronte all'indegno spettacolo di gente che non si perita di porre in gioco la salute del proprio paese per l'impossibile realizzazione di sogni di menti malate, di fronte all'ignavia di chi per deplorevole sfiducia assiste inerte a certe infami manomissioni dei diritti più alti e più sacri, va salutato con gioia ogni fatto che indichi la ferma volontà della gioventù italiana di non disperdere i frutti delle maggiori conquiste ideali compiute dai nostri padri, ma di conservarli e di accrescerli.

È fuori dell'umanità chi pensa che la salute sia nel rinnegare quel che ci è stato tramandato dalle generazioni trascorse; chi pensa che queste non ci abbiano consegnata, *quasi cursores,* secondo la bella immagine di Lucrezio, l'accesa lampada della vita, ma attoscati stromenti di morte.

È fuori dell'umanità chi pensa che possa riorganizzarsi *ex novo* l'assetto sociale secondo programmi arbitrari escogitati da menti fredde, da cuori impregnati di odio, e imposti con violenze brutali; chi crede di non aver da indicare al mondo moderno miglior schema di organizzazione che quello che può essere offerto da un convento di frati.

Eh no, vivaddio: i secoli e secoli di civiltà che ci gravano sulle spalle hanno dato alle nostre anime una complessità che sfugge alle piccole teste dei fanatici, di cui non si sa se deplorare più la cotennosa ignoranza o l'insofferibile presunzione.

Nelle nostre anime parla una mite voce pacata le dolci suasive parole della fede e dell'amore; e gridano concitati, orgogliosi, asciutti comandi di imperio le più intime energie della vita; e non più soltanto dalla maestà grave della natura, dalle vaste luminose giornate primaverili, dalla divina bellezza, risplenda essa in un vago sorriso di cieli o negli occhi ignari e stupiti dei bimbi, in una sovrana opera d'arte o in una profonda intuizione filosofica, sale a noi il fatidico grido:

Salute o genti umane affaticate.
Tutto trapassa e nulla può morir.
Noi troppo odiammo e sofferimmo. Amate.
Il mondo è bello e santo è l'avvenir:

ma nel cuore di ogni italiano che, nepote non indegno dell' Alighieri, figlio non degenere di Mazzini o di Cavour, operi con fede animosa, guardando fiso, tra i due occhi, fabbro del proprio destino, la muta sfinge dell'avvenire, si avviva la speranza di dare alla Patria l'alto posto che le spetta, di compiere con le opere della pace l'aspra fatica di chi con la vita o col sangue le ha dato la Vittoria; e, tra il sano riconoscimento del lavoro fornito con gioia, prorompe spontaneo il saluto augurale alla nova Italia, l' Italia

de' liberi e forti;
l' Italia che vive nel sole,
che vuole i suoi rischi e i suoi vanti,
le marre e le trombe, le scuole
pensose e i cantieri sonanti;
l' Italia che spera e s' adopra
concorde al suo lucido fine,
foggiando il suo fato, là, sopra
le incudini delle officine;
l' Italia che già si disserra
nel grande avvenire il suo varco,
e avanti; sia pace o sia guerra;
San Giorgio o San Marco.