SUGLI AUTOMODULI PRINCIPALI DI UN'ALGEBRA (*)

Sia u un automodulo principale di un'algebra (non pseudonulla) [1] e sia

$$(1) \qquad u = u_1 + \ldots + u_p\,,$$

con $u_1, \ldots, u_p$ automoduli primitivi, e con

$$u_i u_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, p\,;\; i \neq j)$$

se $p > 1$.

Decomposizioni per u del tipo (1) possono aversene più di una; e automoduli principali nell'algebra possono esservene anche più di uno.

Ma *l'intero p è, in ogni caso univocamente determinato dall'algebra;* o, ciò che è lo stesso, *è un suo carattere.*

È questo il teorema che qui si vuol dimostrare per algebre *definite in un corpo qualunque* e che finora era noto solo per le algebre *complesse* [2] — nel qual caso è implicitamente contenuto in un risultato classico del CARTAN [3] — e per alcuni tipi di algebre *razionali* o *reali* [4].

(*) *Note e Mem. di Mat.*, Catania, 1 (1921), pp. 19-23.

(1) Per tutta la nomenclatura quivi adoperata rimandiamo alla nostra Memoria: *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di* RIEMANN (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLV (1921), pp. 1-204).

(2) Loc. cit. (1), Parte I, n. 129.

(3) Loc. cit. (1), Parte I, n. 136.

(4) Cfr. loc. cit. (1), Parte II, n. 19, ove il teorema che qui si dimostra in generale si trova già stabilito per le algebre razionali connesse con matrici riemanniane; e viene quindi illuminata la sua stretta relazione con la teoria delle matrici riemanniane dotate di assi, cioè, in particolare, con le varietà algebriche dotate di sistemi regolari di integrali semplici di 1a specie riducibili e con i corpi di funzioni abeliane *riducibili* o *impuri*.

Le sue conseguenze e una sua notevole generalizzazione saranno sviluppate in un volume di prossima pubblicazione.

*
* *

1. Cominciamo dallo stabilire che:

Se l'algebra A è il prodotto diretto di un'algebra primitiva C di ordine r per un algebra regolare B di ordine p^2 (5), *rp è il minimo della caratteristica sinistra (destra) di un elemento non nullo di A.*

Si indichi con $c_1, \dots, c_r$ un aggregato di unità di C e siano le $a_{i,j}\,(i, j = 1, \dots, p)$ p^2 unità di B per le quali sia

$$a_{i,j}\, a_{l,m} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \neq l\,, \\ a_{i,m}\,, & \text{se } j = l\,; \end{cases}$$

gli rp^2 elementi

$$c_k\, a_{i,j} \qquad (k = 1, \dots, r\,;\ i, j = 1, \dots, p)$$

costituiranno un aggregato di unità di A.

Se v ed u sono i moduli di C e B, per modo che $vu = uv$ (6) è il modulo di A, A è non solo il prodotto diretto di C e B, ma anche di $uC = Cu$ e $vB = Bv$, ed uC e vB sono algebre, l'una primitiva di ordine r, l'altra regolare di ordine p^2, dotate dello stesso modulo di A, dunque possiamo supporre, senza venir meno alla generalità, che C, B ed A abbiano tutte lo stesso modulo.

Ciò posto, sia x un elemento non nullo di A.

I prodotti

$$x c_k\, a_{i,j}$$

non possono essere tutti nulli, perchè A, essendo dotata di modulo, non ammette nullifici sinistri; dunque fra di essi ne esiste almeno uno, e sia

$$x c_h\, a_{l,m}\,,$$

che è diverso da zero.

(5) Cosicchè A è, per un bel teorema dello WEDDERBURN, un'algebra semplice. Loc. cit. (1), Parte I, n. 84.

(6) Si ricordi che, per la definizione stessa di prodotto diretto, ciascun elemento di C è permutabile con ciascun elemento di B.

Ma allora se ne indicano subito rp che sono (diversi da zero e) indipendenti fra loro. Essi sono gli elementi

$$xc_k\, a_{l,j} \qquad (k = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, p). \tag{2}$$

Infatti sia

$$\sum_k^{1..r} \sum_j^{1..p} \lambda_{k,j}\, xc_k\, a_{l,j} = 0\,,$$

con le λ numeri del corpo in cui è definita A.

Moltiplicando a destra per $a_{i,i}$ si trae

$$\sum_k^{1..r} \lambda_{k,i}\, xc_k\, a_{l,i} = 0\,,$$

cioè, attesa la permutabilità di ciascuna delle c con ciascuna delle a,

$$xa_{l,i} \cdot \sum_k^{1..r} \lambda_{k,i}\, c_k = 0\,.$$

Ora, essendo

$$0 \neq xc_h\, a_{l,m} = xa_{l,i}\, a_{i,m}\, c_h\,,$$

è necessariamente

$$xa_{l,i} \neq 0\,;$$

dunque

$$\sum_k^{1..r} \lambda_{k,i}\, c_k$$

o è zero, o è per A un divisore dello zero. Ma A e C hanno lo stesso modulo, e C è primitiva (⁷), quindi è

$$\sum_k^{1..r} \lambda_{k,i}\, c_k = 0\,,$$

ossia

$$\lambda_{1,i} = \lambda_{2,i} = \dots = \lambda_{r,i} = 0\,.$$

Questo sta qualunque sia i nella serie $1, \dots, p$; dunque gli elementi (2) sono veramente indipendenti, e la caratteristica sinistra di x è $\geq rp$.

(⁷) Cfr. il principio del ragionamento che si trova al n. 47 (Parte I) della Memoria citata in (¹).

Intanto, essendo $a_{i,i}B$ la sotto-algebra di B generata dalle unità $a_{i,k_1}, \ldots, a_{i,p}$, $a_{i,i}B$ è dell'ordine p, e quindi

$$a_{i,i}A = a_{i,i}B \times C$$

è dell'ordine rp; dunque la caratteristica sinistra di $a_{i,i}$ è eguale ad rp, ed rp è il *minimo* della caratteristica sinistra di un elemento non nullo di A.

Allo stesso modo si dimostra il teorema per il caso della caratteristica destra.

2. Adesso sia A un'algebra semplice non pseudonulla e quindi dotata di modulo.

Quando un'algebra è dotata di modulo, questo è il suo unico automodulo principale; dunque per il caso attuale il teorema da dimostrare è il seguente:

Se u è il modulo di A ed è

$$u = u_1 + \ldots + u_p$$
$$u = v_1 + \ldots + v_q$$

con le u_i e le v_l automoduli primitivi e con

$$u_i u_j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, p;\ i \neq j),$$

se $p > 1$, e

$$v_l v_m = 0 \qquad (l, m = 1, \ldots, q;\ l \neq m),$$

se $q > 1$, si ha necessariamente

$$p = q.$$

Si indichino con r ed s gli ordini delle algebre primitive [8] $u_1 A u_1$ e $v_1 A v_1$.

Allora, per ragionamenti noti, A può considerarsi e come prodotto diretto di un'algebra primitiva di ordine r per un'algebra regolare di ordine p^2, e come prodotto diretto di un'algebra primitiva di ordine s per un'algebra regolare di ordine q^2; quindi i prodotti rp^2 ed sq^2 sono eguali, perchè entrambi eguali all'ordine di A, e i prodotti rp ed sq sono eguali, perchè entrambi eguali al mi-

[8] Per questo e per il ragionamento che segue si tengano presenti i n.i 99 e seg.ti (Parte I) del loc. cit. in [1].

nimo della caratteristica sinistra o destra di un elemento non nullo di A. Segue che è $p = q$; e quindi anche $r = s$.

3. Un'algebra semi-semplice (non pseudo-nulla) che non sia semplice è somma diretta di algebre semplici (dotate, ciascuna, di modulo) (9); il suo modulo è la somma dei moduli di queste algebre semplici, e i suoi automoduli primitivi sono tutti e soli gli automoduli primitivi di queste algebre semplici (10); dunque il teorema enunciato nell'introduzione è vero anche per algebre semi-semplici, una volta che è stato già dimostrato vero per algebre semplici.

Dopo ciò per estendere il teorema alle algebre non pseudonulle e non semi-semplici, basta, da una parte, ricordare che ogni tale algebra è dotata di una sotto-algebra eccezionale e che questa ha rispetto a quella per algebra complementare un'algebra semi-semplice non pseudonulla; dall'altra, utilizzare le relazioni che passano tra gli automoduli di quest'algebra complementare e gli automoduli dell'algebra data (11).

(9) Loc. cit. (1), Parte I, n. 96.

(10) Loc. cit. (1), Parte I, n. 74 *i*).

(11) Per queste relazioni vedi loc. cit. (1), Parte I, n.i 93, 94 e 95.