SUI SOTTOGRUPPI FONDAMENTALI DI UN GRUPPO, I (*)

Durante la redazione di un trattato *Sulla teoria dei gruppi*, che da qualche tempo in qua vengo preparando, ho avuto occasione di rilevare che alle belle ricerche del prof. CIPOLLA *Sulla struttura dei gruppi di ordine finito* pubblicate nel «Rendiconto» e negli «Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche» di Napoli ([1]) possono essere apportati alcuni utili complementi.

Poichè la pubblicazione del trattato non potrà che tardare, indico in questa e in una Nota successiva quelle delle mie osservazioni che mi paiono più notevoli; nel far che, ritengo opportuno attenermi alle ipotesi e alla nomenclatura del prof. CIPOLLA, sebbene nel trattato, per ragioni metodiche, l'ipotesi che il gruppo sia d'ordine finito venga lasciata cadere e alla detta nomenclatura siano apportate delle leggere modificazioni.

1. Sia H un gruppo non abeliano e di ordine finito, di tipo τ, col centrale J_0, e sia G un suo sottogruppo fondamentale col centrale J. Inoltre sia I il sistema fondamentale di H costituito dagli elementi invarianti proprii di G, o, come diremo, il sistema fondamentale *corrispondente a* G.

Indichiamo:

con λ il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G;

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei, (6) 6 (1927), pp. 361--365.

([1]) Dei lavori, cui qui si allude, sono pubblicati nel detto «Rendiconto»:

a) *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*, Nota I (gennaio-febbraio 1909), Nota II (maggio-luglio 1909), Nota III (maggio-giugno 1911), Nota IV (gennaio-febbraio 1912);

b) *I gruppi finiti dei primi tre tipi*, Nota I (luglio-ottobre 1914), Nota II (*ibid.*), Nota III (*ibid.*); è pubblicata invece negli «Atti» l'elegantissima Memoria: *I sottogruppi fondamentali dei gruppi di Hölder* (vol. XVII, serie 2ª).

con λ' il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenenti G;

con λ'' quello dei sottogruppi fondamentali di H contenuti in G.

Naturalmente λ' sarà pure il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in J [loc. cit. *a*), I, n. 6]; e dei λ'' sistemi fondamentali corrispondenti ai sottogruppi fondamentali di H contenuti in G, uno sarà I, indi contenuto in G e in J, mentre i rimanenti $\lambda'' - 1$ (se $\lambda'' > 1$) saranno bensì contenuti in G, ma non in J. Quindi è chiaro che sarà

$$(1) \qquad \lambda \geq \lambda' + \lambda'' - 1.$$

2. Adesso si indichi con τ' il tipo di G, se G non è abeliano; in caso contrario si ponga $\tau' = -2$.

Dico che in ogni caso è

$$(2) \qquad \tau' \leq \lambda - \lambda' - 2.$$

Ciò è evidente, se G è abeliano, perchè allora $\tau' = -2$ e $\lambda = \lambda'$; supponiamo dunque che ciò non sia.

Allora il numero dei sistemi fondamentali *di* H contenuti in G, ma non in J, è $\lambda - \lambda'$, e il numero dei sistemi fondamentali *di* G è $\tau' + 2$. Ma ciascuno di questi sistemi, o è uno di quelli, o risulta dalla riunione di due o più di quelli, dunque è $\tau' + 2 \leq \lambda - \lambda'$, cioè sussiste la (2).

3. Sistemi fondamentali di H contenuti in G, ma non in J, ve ne sono, come abbiamo detto, $\lambda - \lambda'$. Fra di essi ve ne sono $\lambda'' - 1$, cui corrispondono sottogruppi fondamentali di H contenuti *propriamente* in G; quindi, se G non è abeliano, codesti $\lambda'' - 1$ sottogruppi fondamentali di H coincidono con altrettanti sottogruppi fondamentali di G, e se G è abeliano, è necessariamente $\lambda'' = 1$. Ora, nella prima alternativa il numero dei sottogruppi fondamentali di G è $\tau' + 2$, nella seconda alternativa è $\tau' = -2$; dunque nella prima è $\tau' + 2 \geq \lambda'' - 1$, nella seconda $\tau' + 2 = \lambda'' - 1$, ossia in entrambe

$$(3) \qquad \tau' \geq \lambda'' - 3;$$

e in ogni caso esistono

$$(\tau' + 2) - (\lambda'' - 1) = \tau' - \lambda'' + 3$$

sistemi fondamentali di G per ognun dei quali il corrispondente sottogruppo fondamentale di G *non* è un sottogruppo fondamentale di H contenuto in G.

Sia ξ un elemento di uno qualunque dei $\tau' - \lambda'' + 3$ sistemi in discorso, ed x un elemento di I. Poichè x appartiene al centrale di G, ξ e ξx appartengono ad un medesimo sistema fondamentale di G [loc. cit. *a*), I, n. 1]; ma dico che essi non appartengono certo ad un medesimo sistema fondamentale di H.

E infatti, se ciò non fosse, ogni elemento di H permutabile con ξ sarebbe permutabile anche con ξx, indi con x; e il sottogruppo fondamentale di H, costituito dagli elementi permutabili con ξ, sarebbe contenuto in quello costituito dagli elementi permutabili con x, cioè in G; mentre per ipotesi quel sottogruppo *non* è contenuto in G.

Segue che ciascuno dei suddetti $\tau' - \lambda'' + 3$ sistemi fondamentali di G si spezza in almeno due sistemi fondamentali di H, e G contiene almeno

$$\lambda'' - 1 + 2(\tau' - \lambda'' + 3) = 2\tau' - \lambda'' + 5$$

sistemi fondamentali di H esterni a J; indi, in tutto, almeno

$$2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 5$$

sistemi fondamentali di H. Ma allora è

$$\lambda \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 5, \tag{4}$$

e

$$\tau' \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' - 5). \tag{5}$$

4. Dalla (1) discende che λ'' non può superare $\lambda - \lambda' + 1$; ma, quando è $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, le (3) e (5) non possono coesistere, se non supponendo $\tau' = \lambda - \lambda' - 2$; dunque:

Allorchè $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, *è* $\tau' = \lambda - \lambda' - 2$.

Ebbene supponiamo che sia $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, indi $\tau' = \lambda - \lambda' - 2$.

I sistemi fondamentali di G sono $\tau' + 2$, quelli di H, contenuti in G, ma non in J, sono $\lambda - \lambda'$. Ma qui $\tau' + 2 = \lambda - \lambda'$, dunque quei sistemi coincidono con questi, e i sottogruppi fondamentali di G sono i sottogruppi fondamentali di H contenuti propriamente in G.

Si decomponga G in sistemi laterali rispetto a J e si ponga

$$G = J\alpha_1 + J\alpha_2 + \dots + J\alpha_k,$$

dove α_1 è l'elemento identico e k è l'indice di J in G.

Dico che, se z è un elemento di H esterno a G, dei prodotti

$$z\alpha_1\,, z\alpha_2\,, \dots, z\alpha_k$$

(esterni a G) mai due potranno appartenere a un medesimo sistema fondamentale di H.

E infatti supponiamo, se è possibile, che $z\alpha_i$ e $z\alpha_j$, con $i \neq j$, appartengano ad un medesimo tal sistema, I', e sia G' il sottogruppo fondamentale di H ad esso corrispondente. Il prodotto $(z\alpha_i)^{-1}\, z\alpha_j = \alpha_i^{-1}\, \alpha_j$ apparterrebbe a G' e G, quindi anche alla loro intersezione. Ma G' non può contenere alcun sistema fondamentale di H contenuto in G, ma non in J, perchè altrimenti il sottogruppo fondamentale corrispondente a tal sistema — sottogruppo che, per quanto precede, è contenuto in G — dovrebbe contenere il sistema I', mentre I', al pari dei suoi elementi $z\alpha_i$ e $z\alpha_j$, è esterno a G; duque l'intersezione di G' e G è contenuta in J, ed $\alpha_i^{-1}\, \alpha_j$ sarebbe un elemento di J, cioè sarebbe, contro l'ipotesi, $J\alpha_i = J\alpha_j$.

Segue che l'indice k di J in G non supera il numero dei sistemi fondamentali di H esterni a G. Ma questo numero è $(\tau + 2) - \lambda$, dunque

$$\tau - \lambda + 2 \geq k.$$

Si osservi che, fra i sistemi fondamentali di H contenuti in J, quello cui corrisponde G, ossia I, non è certo contenuto in un sottogruppo fondamentale che corrisponda ad un sistema fondamentale di H esterno a G; dunque, se

$$J = J_0 + I,$$

cioè, se non esiste alcun sottogruppo fondamentale di H contenente propriamente G, o, come anche diremo, se G è *massimo*, l'intersezione di G con un sottogruppo fondamentale di H che corrisponda a un sistema fondamentale che sia esterno a G è contenuta in J_0. Allora nel ragionamento precedente si può sostituire J_0 a J e viene

$$\tau - \lambda + 2 \geq \text{indice di } J_0 \text{ in } G.$$

Ora sia G di genere ϱ e, in conformità di ciò, sia

$$G^{(1)} = G, G^{(2)}, \dots, G^{(\varrho)}$$

una successione di sottogruppi fondamentali di H ognuno dei quali, diverso dal primo, sia contenuto propriamente in quello che lo precede. Se $J^{(i)}$ è il centrale di $G^{(i)}$ (indi $J^{(1)} = J$), nella successione

$$G^{(1)} = G, G^{(2)}, \dots, G^{(\varrho)}, J^{(\varrho)}, J^{(\varrho-1)}, \dots, J^{(2)}, J^{(1)} = J$$

ciascun sottogruppo diverso dal primo è contenuto in quello che lo precede, e vi è anzi contenuto certo propriamente, se esso è inoltre diverso da $J^{(\varrho)}$.

Ma allora l'indice di J in G è almeno $2^{2\varrho-2}$, e per conseguenza quello di J_0 in G almeno $2^{2\varrho-1}$, e si può enunciare il seguente teorema:

Se è

(6) $$\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$$

e G è di genere ϱ, si ha

(7) $$\tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\varrho-2};$$

e se G è inoltre massimo, si ha più precisamente

(8) $$\tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\varrho-1}.$$