SOPRA UNA CERTA ALGEBRA REALE DEL 4° ORDINE (*)

La lettura delle belle Note di L. SOBRERO, recentemente accolte in questi « Rendiconti » (1), mi ha particolarmente interessato, in quanto che, se frequenti sono i casi in cui ricerche matematiche di varia natura conducono alla considerazione di determinate algebre, queste risultano il più spesso semi-semplici e dotate di modulo, cioè prive di elementi eccezionali (2).

Tale non è invece l'algebra che il SOBRERO pone a base del suo studio; e credo che metta conto indicarne rapidamente la netta caratterizzazione dal punto di vista della teoria generale, anche perchè a questo modo verranno ad esser poste in luce le intime ragioni di taluni fatti, di natura puramente algebrica, su cui l'attenzione del SOBRERO è stata richiamata indirettamente dalle esigenze dei suoi sviluppi analitici.

1. L'algebra A considerata dal SOBRERO è quella descritta da

$$z = a_0 + a_1 j + a_2 j^2 + a_3 j^3 \tag{1}$$

al variare delle a nel corpo reale, j essendo un elemento con l'equazione minima (*C. N. A.*, p. 228)

$$j^4 = -2j^2 - 1 ; \tag{2}$$

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei, (6) 19 (1934), pp. 532-535.

(1) L. SOBRERO, *Di una nuova variabile ipercomplessa interessante la teoria dell'elasticità*. Rend. R. Acc. Lincei, fasc. 21 gennaio e 4 febbraio 1934.

(2) Così sono semi-semplici le algebre (complesse) collegate dal FROBENIUS ai gruppi d'ordine finito [veggasi per es., il mio volume *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), p. 437 e segg.], nonchè quelle che càpitano nello studio delle matrici di RIEMANN [SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann* (« Rend. del Circ. Mat. di Palermo », to. 45, 1921]. Nel seguito il volume or ora citato sarà indicato con la sigla *C. N. A.*

essa è dunque un'algebra reale (*C. N. A.*, p. 380) del quart'ordine, potenziale (*ibid.*, p. 223) e quindi, senz'altro, commutativa.

Dalle (1) e (2) si trae

$$z = a_0 + a_1 j + a_2 j^2 + a_3 j^3 ,$$

$$z j = - a_3 + a_0 j + (a_1 - 2a_3) j^2 + a_2 j^3,$$

$$z j^2 = - a_2 - a_3 j + (a_0 - 2a_2) j^2 + (a_1 - 2a_3) j^3,$$

$$z j^3 = (2a_3 - a_1) - a_2 j + (3a_3 - 2a_1) j^2 + (a_0 - 2a_2) j^3 ;$$

per conseguenza il determinante sinistro (e destro) di z — che in ordine a teoremi generali (*C. N. A.*, p. 303) è un *carattere* di z, ossia è indipendente dal sistema di coordinate definito mediante la (1) — è

$$\begin{vmatrix} a_0 , & a_1 , & a_2 , & a_3 \\ -a_3 , & a_0 , & a_1 - 2a_3 , & a_2 \\ -a_2 , & -a_3 , & a_0 - 2a_2 , & a_1 - 2a_3 \\ 2a_3 - a_1 , & -a_2 , & 3a_3 - 2a_1 , & a_0 - 2a_2 \end{vmatrix} = [(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2]^2 ;$$

e gli elementi nulli o divisori dello zero di A sono tutti, e solo, quelli per i quali è $a_0 = a_2$ e $a_1 = a_3$; cioè tutti, e solo, gli elementi dati da

$$(a_0 + a_1 j)(j^2 + 1) ,$$

al variare di a_0 e a_1 nel corpo reale (³).

Attesa la commutatività di A, i prodotti di questi elementi, in base alla (2), che può scriversi

$$(j^2 + 1)^2 = 0 ,$$

sono tutti nulli, dunque gli elementi in discorso costituiscono una sotto-algebra E di A, che è una zero-algebra (*C. N. A.*, p. 206) di

(³) Il Sobrero chiama *modulo* di z la quantità $\varrho = \sqrt{(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2}$.

ordine 2 [4]. Anzi, poichè A è commutativa, e quindi ogni suo elemento pseudonullo è addirittura eccezionale (*C. N. A.*, p. 236), questa zero-algebra è la sotto-algebra eccezionale di A.

2. Dalle (1) e (2) si deduce

$$z^2 = (a_0^2 - a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1 a_3) + 2(a_0 a_1 - a_2 a_3) j +$$
$$+ (a_1^2 - 2a_2^2 + 3a_3^2 + 2a_0 a_2 - 4a_1 a_3) j^2 +$$
$$+ 2(a_0 a_3 + a_1 a_2 - 2a_2 a_3) j^3,$$

quindi riesce $z^2 = z$ quando, e solo quando, è

$$(3)\qquad \begin{cases} a_0^2 - a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1 a_3 = a_0\,, \\ 2(a_0 a_1 - a_2 a_3) = a_1\,, \\ a_1^2 - 2a_2^2 + 3a_3^2 + 2a_0 a_2 - 4a_1 a_3 = a_2\,, \\ 2(a_0 a_3 + a_1 a_2 - 2a_2 a_3) = a_3\,. \end{cases}$$

Combinando per sottrazione la prima e la terza, o la seconda e la quarta di queste eguaglianze, si trae

$$(a_0 - a_2)^2 - (a_1 - a_3)^2 = a_0 - a_2\,,$$

$$2(a_0 - a_2)(a_1 - a_3) = a_1 - a_3\,,$$

e queste dànno:

(α) o $a_1 - a_3 \neq 0$, indi $a_0 - a_2 = \dfrac{1}{2}$ e $(a_1 - a_3)^2 = -\dfrac{1}{4}$;

(β) o $a_1 - a_3 = 0$, indi $a_0 - a_2 = 0$, oppure $a_0 - a_2 = 1$.

[4] Di qua la proposizione osservata dal Sobrero: *condizione necessaria e sufficiente perchè un prodotto sia nullo è che almeno uno dei fattori sia nullo o che ambo i fattori (abbiano modulo nullo, cioè) siano divisori dello zero;* proposizione valida per tutte, *e solo,* le algebre non primitive per ognuna delle quali gli elementi nulli o divisori dello zero costituiscono una zero-algebra. Infatti, se B è un'algebra dotata di tale proprietà e z', z'' sono suoi divisori dello zero, riuscendo in base all'ipotesi $(z' + z'')z' = z'^2 + z''z' = 0$, $z' + z''$ o è nullo o è un divisore dello zero; ma allora gli elementi nulli o divisori dello zero di B costituiscono una sotto-algebra, e questa è una zero-algebra.

Poichè le a sono numeri reali, l'alternativa (α) è da escludere; inoltre le (3) per $a_1 - a_3 = 0$ e $a_0 - a_2 = 0$ dànno $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, e per $a_1 - a_3 = 0$ e $a_0 - a_2 = 1$, la seconda e la prima delle (3) forniscono, ordinatamente, $a_1 = a_3 = 0$ e $a_0 = 1$, $a_2 = 0$; dunque non riesce $z^2 = z$, se non a patto che sia $z = 0$ oppure $z = 1$.

Si conclude che il modulo è l'unico automodulo (*C. N. A.*, p. 189) di A e che pertanto l'algebra complementare di E rispetto ad A è un'algebra reale, semi-semplice di ordine 2, con un solo automodulo, indi primitiva (*C. N. A.*, p. 284) ed equivalente all'algebra degli ordinari numeri complessi.

Dal fatto che A non possiede automoduli diversi dal modulo potrebbe esser dedotto di nuovo che ogni suo divisore dello zero è addirittura un suo elemento eccezionale (*C. N. A.*, p. 264).

3. Una discussione simile a quella compiuta nel numero precedente mostra che è $z^2 = -1$ quando, e solo quando, sia

$$z = \pm \frac{3j + j^3}{2};$$

e allora basta assumere in A come unità fondamentali $1, \frac{3j + j^3}{2}$, e le due unità $j^2 + 1$ e $j(j^2 + 1)$ di E per ottenere che l'elemento corrente di A, d'accordo con un teorema dello WEDDERBURN [5],

[5] Il teorema dello WEDDERBURN, cui qui si allude è il seguente:

Ogni algebra definita in un corpo, il cui sottocorpo fondamentale sia isomorfo al corpo razionale, o è pseudonulla, o è semi-semplice o è la somma (in generale non diretta) di un'algebra semi-semplice e della sua sotto-algebra eccezionale.

Veramente lo WEDDERBURN quando pubblicò questo teorema nella sua Memoria: *On hypercomplex numbers* (« Proc. of the London Math. Soc. », vol. 6, 1905) lo enunciò come valido per ogni e qualsiasi algebra; ma la sua dimostrazione non era conclusiva. Ciò spiega perchè esso non apparisca nel mio trattato *C.N.A.* del 1921.

L'enunciato che qui si riporta comparve per la prima volta nel libro del DICKSON: *Algebras and their arithmetics* (Chicago, « The Univ. of Chic. Press », 1923) e la nuova dimostrazione che ivi se ne dette fu comunicata al DICKSON dallo WEDDERBURN.

Che l'enunciato primitivo dello WEDDERBURN fosse diverso da quello attuale il DICKSON non l'ha mai fatto rilevare — e non ho alcuna intenzione di fargliene colpa —; che invece la prova datane nel 1906 fosse incompleta il DICKSON non l'ha fatto rilevare che nella prefazione al suo libro: *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich und Leipzig, Orell-Füssli-Verlag, 1927). Però, se nella prefazione al testo del 1923 il DICKSON si contentava di dire che: « SCORZA *in his book* ...

possa mettersi nella forma

$$x + y\,\frac{3j + j^3}{2} + (u + vj)\,(j^2 + 1)\,,$$

con x, y, u, e v numeri reali; cioè, nella forma cui il SOBRERO è stato condotto dagli sviluppi delle funzioni in A, esponenziale e logaritmica, da lui introdotte.

omitted ... the principal theorem on linear algebras. An outline of a new simpler proof was placed at the disposal of the author by Wedderburn», in quella che precede il testo del 1927 ha preferito dire: «*Sein Beweis*» — cioè la dimostrazione dello WEDDERBURN del 1905 — «*des Hauptsatzes über Algebren war unvollständig; anderseits war dieser Satz* SCORZA *in seinem Buch von* 1921 *unbekannt*».

Ancora: nel 1923 francamente si riconosceva «*Scorza's book has been of material assistance to the author*» — del che può persuadersi chiunque ponga a raffronto, per tacere di frequentissimi passi più brevi, le pp. 236-237, 283-285 e 333-336 del mio testo con le pp. 46-47, 80-81 e 73-76 di quello del DICKSON —, nel 1927 SCORZA non si nominava che per affermare che il teorema dello WEDDERBURN gli era sconosciuto.

E poichè l'occasione si presenta mi sia permesso far rilevare che dei due teoremi fondamentali sulla struttura di un'algebra semplice con modulo, quello che stabilisce ogni tale algebra essere il prodotto diretto di un'algebra primitiva e un'algebra regolare è dovuto allo WEDDERBURN; ma quello per il quale si asserisce che, di fronte alla relazione di equivalenza, la decomposizione di una tale algebra in un prodotto diretto così fatto è unica, è dovuto, non già allo WEDDERBURN, bensì a me. La mia priorità è stata riconosciuta dallo WEDDERBURN («Bull. of the Amer. Math. Soc.», 1925, p. 523), e dal DICKSON nel libro già citato dal 1927 (p. 120); ma forse perchè il DICKSON nel testo inglese del 1923 (p. 78) si esprimeva in maniera da far pensare che il teorema fosse dovuto allo WEDDERBURN, a questi lo vedo attribuito continuamente, da vari anni a questa parte, dalla fiorente scuola di algebristi sorta in Germania.