LE ALGEBRE PER OGNUNA DELLE QUALI LA SOTTO-ALGEBRA ECCEZIONALE È POTENZIALE (*)

Alcuni fatti che ho avuto occasione recentemente di rilevare mi avevano portato a presumere che un'algebra, assoggettata alla condizione di possedere come sotto-algebra eccezionale un'algebra (pseudonulla) potenziale, non potesse presentare che una ben circoscritta varietà di aspetti.

È quanto appunto è confermato dal teorema che qui si trova stabilito al n^0 11.

A proposito di che credo opportuno avvertire, che nella stesura primitiva di questa Nota non comparivano le considerazioni raccolte ora nei n^i 1, 2, 3 e 4; esse sono state provocate dal desiderio di penetrare la ragione intima del fatto di cui allora davo la dimostrazione diretta esposta qui nel n^0 5; e, se non mi inganno, non sono prive di interesse, in quanto apportano contributi non inutili alla teoria generale delle algebre.

Così l'estensione di un importante teorema di B. PEIRCE indicata nel n^0 2, con le sue conseguenze, oggetto dei n^i 3 e 4, mi ha permesso di rendere estremamente rapida la determinazione di tutte le possibili algebre del 3^0 ordine che sarà esposta in un lavoro ulteriore.

§ 1. UN CRITERIO DI RIDUCIBILITÀ PER LE ALGEBRE POTENZIALI.

1. Sia P un'algebra potenziale, in un corpo Γ, generata da un elemento v con l'equazione minima

$$\varphi(\xi) = 0.$$

(*) *Atti Reale Acc. di Scienze di Torino*, 70 (1934-35) pp. 26-45.

Vogliamo stabilire un criterio atto a decidere della irriducibilità o meno di P guardando al polinomio $\varphi(\xi)$.

Supponiamo, in primo luogo, che P sia riducibile e poniamo

$$P = P_1 \dot{+} P_2,$$

con P_1 e P_2 algebre convenienti. Sussisterà per v un'eguaglianza (ed una sola) del tipo

$$v = v_1 + v_2,$$

con v_i in $P_i (i = 1, 2)$, e P_i sarà l'algebra potenziale generata da v_i.

Indichiamo con m, m_1, m_2 gli ordini di P, P_1, P_2 e con

$$\varphi_i(\xi) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

l'equazione minima di v_i in P_i.

Per un teorema noto [1] $\varphi(\xi)$ sarà il minimo comune multiplo di $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$; e dunque, se $\chi(\xi)$ è il massimo comune divisore di $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$, sarà

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi_1(\xi)\,\varphi_2(\xi)}{\chi(\xi)}. \tag{1}$$

Se P è dotata di modulo, tali sono pure P_1 e P_2, e, se P è priva di modulo, almeno una delle algebre P_1 e P_2 è tale, quindi sono da distinguere tre casi, secondo che:

a) P, P_1 e P_2 sono tutte e tre dotate di modulo; oppure

b) una sola delle algebre P_1 e P_2, poniamo P_1, è dotata di modulo e P_2 è, come P, priva di modulo; o infine

c) tutte e tre le algebre P, P_1 e P_2 sono prive di modulo.

I gradi dei polinomi φ, φ_1 e φ_2

nell'alternativa *a*) sono m, m_1, m_2;
» *b*) » $m+1, m_1, m_2+1$;
» *c*) » $m+1, m_1+1, m_2+1$;

d'altronde $m = m_1 + m_2$ e per la (1) il grado di φ si ottiene sottraendo quello di χ dalla somma dei gradi di φ_1 e φ_2, dunque nelle

[1] G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 243. Questo volume sarà indicato nel seguito con la sigla *C. N. A.*

alternative a) e b) il grado di χ è zero, e nell'alternativa c) è 1. Aggiungasi che in quest'ultimo caso φ, φ_1 e φ_2 sono tutti divisibili per ξ e che, dunque, quando esso si verifica il massimo comune divisore di φ_1 e φ_2, dovendo essere di 1^0 grado, non può essere che ξ.

Si conclude che, nell'ipotesi fatta, φ_1 e φ_2 o sono due polinomi, a gradi positivi, primi fra loro, o hanno per massimo comune divisore ξ, e in tal caso i loro gradi sono > 1.

Orbene, cerchiamo di invertire il risultato al quale siamo pervenuti e supponiamo che sia

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi)\,\varphi_2(\xi), \tag{2}$$

con φ_1 e φ_2 primi fra loro ed a gradi positivi, oppure

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi_1(\xi)\,\varphi_2(\xi)}{\xi}, \tag{3}$$

con φ_1 e φ_2, a gradi > 1, aventi per massimo comune divisore ξ; di guisa che sarà possibile determinare dei polinomi $\Phi_1(\xi)$ e $\Phi_2(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ e $\Psi_2(\xi)$ pei quali si abbia, nel primo caso,

$$\varphi_1(\xi)\,\Phi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)\,\Phi_2(\xi) = 1, \tag{4}$$

e, nel secondo,

$$\varphi_1(\xi)\,\Psi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)\,\Psi_2(\xi) = \xi. \tag{5}$$

Se $F(\xi)$ è un polinomio in Γ, ha senso parlare senz'altro dell'elemento $F(v)$ di P, se P è dotata di modulo; se no, si può parlare dell'elemento $F(v)$ solo se $F(\xi)$ è divisibile per ξ. Ebbene, se P è priva di modulo e vale la (2), invece della (4) si consideri l'eguaglianza che se ne ricava moltiplicando per ξ, ossia

$$\xi\varphi_1(\xi)\,\Phi_1(\xi) + \xi\varphi_2(\xi)\,\Phi_2(\xi) = \xi. \tag{4'}$$

Ciò posto, si definiscano due polinomi $\Omega_1(\xi)$ e $\Omega_2(\xi)$ ponendo:

$$\Omega_1(\xi) = \varphi_1(\xi)\,\Phi_1(\xi), \qquad \Omega_2(\xi) = \varphi_2(\xi)\,\Phi_2(\xi),$$

se P è dotata di modulo;

$$\Omega_1(\xi) = \xi\varphi_1(\xi)\,\Phi_1(\xi), \qquad \Omega_2(\xi) = \xi\varphi_2(\xi)\,\Phi_2(\xi),$$

se P è priva di modulo, ma vale la (2), indi la (4′); e infine

$$\Omega_1(\xi) = \varphi_1(\xi)\,\Psi_1(\xi), \qquad \Omega_2(\xi) = \varphi_2(\xi)\,\Psi_2(\xi),$$

se vale la (3), indi P priva di modulo.

In ogni caso avrà senso parlare degli elementi di P definiti dalle uguaglianze

$$v_1 = \Omega_1(v), \qquad v_2 = \Omega_2(v);$$

per questi, in virtù della (4), della (4′) o della (5), sarà

$$v_1 + v_2 = v,$$

e riuscendo sempre $\varphi(\xi)$ un divisore del prodotto $\Omega_1(\xi)\,\Omega_2(\xi)$ sarà pure, in ogni caso,

$$v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0.$$

Ma allora P riesce la somma diretta delle algebre potenziali generate da v_1 e v_2 ed è veramente riducibile.

Raccogliendo le osservazioni fatte si ha che il criterio di cui si andava in cerca è fornito dal seguente teorema ([2]):

Se per il polinomio $\varphi(\xi)$ si ha:

$$\varphi(\xi) = [\psi_1(\xi)]^{r_1}\,[\psi_2(\xi)]^{r_2} \dots [\psi^t(\xi)]^{r_t},$$

con $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t$ polinomi, a gradi positivi, irriducibili in Γ e primi fra loro a due a due, l'algebra P è riducibile o irriducibile secondo che è $t > 1$ o $t = 1$.

Occorre appena avvertire che, se P è priva di modulo, dei polinomi ψ_i uno è eguale a ξ; e che, se $t > 1$, P è spezzabile nella somma diretta di t algebre irriducibili.

Se l'algebra P è pseudonulla, l'equazione minima di v è $\xi^{m+1} = 0$, e dunque:

Un'algebra potenziale pseudonulla è necessariamente irriducibile.

§ 2. Estensione di un teorema di B. Peirce.

2. Il teorema, cui si allude nel titolo di questo paragrafo, è quello ([3]) per il quale si afferma che, se u è un automodulo dell'al-

([2]) Il quale estende la proposizione ben nota esposta nel n° 127 dell'*Appendice* al trattato *C. N. A.* (pag. 429).

([3]) Veggasi, ad es., *C. N. A.*, pag. 271 e sgg.

l'algebra A, A è la somma dei quattro sistemi — in essa complementari — formati dagli elementi che in u hanno:

1) un modulo, oppure
2) un modulo sinistro e un nullifico destro, oppure
3) un nullifico sinistro e un modulo destro, o, infine,
4) un nullifico.

Come è noto, di questi quattro sistemi il primo è, in ogni caso, un'algebra avente per modulo u, il secondo, al pari del terzo, o è zero o è una zero-algebra, e il quarto o è zero o è un'algebra.

Orbene, qui si vuol far vedere che un teorema del tutto simile sussiste per ogni eventuale sotto-algebra invariante di A; si vuol dimostrare, cioè, che:

Se B è una sotto algebra invariante di A e, detto u un qualsiasi automodulo di A, si denotano con B_1, B_2, B_3 e B_4 i sistemi formati dagli elementi di B che in u hanno, rispettivamente,

1) *un modulo, oppure*
2) *un modulo sinistro e un nullifico destro, oppure*
3) *un nullifico sinistro e un modulo destro, o, infine,*
4) *un nullifico,*

si ha

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \tag{6}$$

e i sistemi B_i sono complementari in B.

Pe accorgersene basta osservare che, se l'uguaglianza (6) sussiste, e per un elemento b di B si ha, in conformità della (6),

$$b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \tag{7}$$

con b_i in B_i, di guisa che riesce

$$\begin{gathered} ub_1 = b_1u = b_1, \quad ub_2 = b_2, \quad b_2u = 0 \\ ub_3 = 0, \quad b_3u = b_3, \quad ub_4 = b_4u = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

dalle (7) e (8) discende

$$ubu = b_1, \quad ub = b_1 + b_2, \quad bu = b_1 + b_3,$$

indi

$$\begin{gathered} b_1 = ubu, \quad b_2 = ub - ubu, \quad b_3 = bu - ubu, \\ b_4 = b - ub - bu + ubu; \end{gathered} \tag{9}$$

e che, inversamente, se si definiscono b_1, b_2, b_3 e b_4 mediante le (9), questi elementi, attesa l'invarianza di B in A, risultano elementi di B appartenenti, rispettivamente, ai sistemi B_1, B_2, B_3, B_4 e aventi per somma b.

Dopo di che la complementarità dei sistemi B_i in B segue dal fatto che, in base alle (9), di eguaglianze come la (7) per b ne sussiste una ed una sola.

Notisi che nel caso attuale di nessuno dei quattro sistemi B_i può garantirsi *a priori* che riescirà *certo* un'algebra; ma, per altro, sta ancora che ognuno di essi o è zero, o è un'algebra e che dei sistemi B_2 e B_3 ognuno che non sia zero è una zero-algebra. Avvertasi, inoltre, che quando B_1 è un'algebra non può dirsi che abbia per modulo u, perchè non è detto che u appartenga a B; ed anzi, perchè il teorema attuale non si riduca a quello di PEIRCE, bisogna supporre che u non stia in B.

Quanto poi ai prodotti dei sistemi B_i si verifica subito, badando alle loro definizioni, che

$$(10)\qquad \begin{array}{llll} B_1^2 \leq B_1 \;, & B_1 B_2 \leq B_2 \;, & B_1 B_3 = 0 \;, & B_1 B_4 = 0, \\ B_2 B_1 = 0 \;, & B_2^2 = 0 \;, & B_2 B_3 \leq B_1 \;, & B_2 B_4 \leq B_2 \,, \\ B_3 B_1 \leq B_3 \,, & B_1 B_2 \leq B_4 \,, & B_3^2 = 0 \;, & B_3 B_4 = 0, \\ B_4 B_1 = 0 \;, & B_4 B_2 = 0 \;, & B_4 B_3 \leq B_3 \;, & B_4^2 \leq B_4 \,. \end{array}$$

3. Dalle (10) si deducono alcune conseguenze interessanti.

Si supponga che gli elementi di B siano permutabili con u. Sarà evidentemente $B_2 = B_3 = 0$, quindi resta $B = B_1 + B_4$, o, più precisamente,

$$(11)\qquad B = B_1 \dot{+} B_4 \,,$$

una volta che l'intersezione di B_1 e B_4 è nulla, al pari dei prodotti $B_1 B_4$ e $B_4 B_1$.

Poichè ciascuno dei sistemi B_i o è zero o è un'algebra, se B è irriducibile, un'eguaglianza come la (11) non può sussistere, se non a patto che dei sistemi B_1 e B_4 uno sia nullo (e l'altro eguagli B); dunque:

Se B è irriducibile e i suoi elementi sono permutabili con u, essi in u o hanno tutti un modulo o hanno tutti un nullifico.

4. Si lasci ora cadere l'ipotesi che u sia permutabile con i singoli elementi di B, ma si supponga che B sia commutativa.

Allora i sistemi B_i saranno a due a due permutabili, la tavola di moltiplicazione indicata dalle (10) dovrà risultare simmetrica e quindi, badando pure che l'intersezione di B_1 e B_4 è nulla, si avrà che, all'infuori eventualmente di B_1^2 e B_4^2, tutti gli altri prodotti del del tipo $B_i B_j$, saranno nulli.

Ma allora la (6) può scriversi più precisamente

$$B = B_1 \dot{+} B_2 \dot{+} B_3 \dot{+} B_4 ,$$

e per conseguenza, se B è irriducibile, dei sistemi B_i uno solo è diverso da zero (ed eguale a B). In altri termini:

Se B è commutativa ed irriducibile, i suoi elementi, in u, o hanno tutti un modulo, o hanno tutti un nullifico, o hanno tutti un modulo sinistro (destro) e un nullifico destro (sinistro).

Ciò accade, in particolare, se B è pseudonulla e potenziale, perchè allora essa è, come si è visto, irriducibile; ma, in tal caso, il teorema può essere ancora meglio precisato.

Infatti si supponga che B sia generata da un elemento v con l'equazione minima $\xi^{m+1} = 0$.

Si vede subito che, se $m > 1$, cioè se B non è una zero-algebra di ordine 1, non può essere al tempo stesso

$$uv = v \text{ e } vu = 0, \tag{12}$$

oppure

$$uv = 0 \text{ e } vu = v, \tag{13}$$

giacchè dalle (12) segue

$$v^2 = v \cdot uv = vu \cdot v = 0,$$

e dalle (13)

$$v^2 = vu \cdot v = v \cdot uv = 0,$$

mentre per $m > 1$ è certo $v^2 \neq 0$. Ma dunque:

Se B è pseudonulla, potenziale e d'ordine > 1, delle quattro alternative previste dall'ultimo enunciato non possono presentarsi che le prime due.

5. A quest'ultima proposizione si può anche pervenire direttamente al modo che segue.

Attesa l'invarianza di B in A il prodotto uv è in B al pari di v, quindi sussiste per uv un'eguaglianza ed una sola del tipo

$$uv = \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \dots + \alpha_{m-1} v^{m-1} + \alpha_m v^m, \tag{14}$$

con le α numeri del corpo in cui A è definita.

Dalla (14), moltiplicando successivamente, a destra, per $v, v^2, \dots$ $\dots, v^{m-1}$, ed, a sinistra, per u, si deduce:

$$\begin{aligned} uv^2 &= \alpha_1 v^2 + \alpha_2 v^3 + \dots + \alpha_{m-1} v^m, \\ uv^3 &= \alpha_1 v^3 + \dots + \alpha_{m-2} v^m, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ uv^m &= \alpha_1 v^m, \end{aligned} \tag{15}$$

e

$$u^2 v = \alpha_1 uv + \alpha_2 uv^2 + \dots + \alpha_{m-1} uv^{m-1} + \alpha_m uv^m; \tag{16}$$

dopo di che, tenendo conto delle (14) e (15), la (16) diventa

$$\begin{aligned} u^2 v = \alpha_1^2 v + 2\alpha_1 \alpha_2 v^2 + (2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2) v^3 + (2\alpha_1 \alpha_4 + 2\alpha_2 \alpha_3) v^4 + \\ \dots + (2\alpha_1 \alpha_m + 2\alpha_2 \alpha_{m-1} + \dots) v^m, \end{aligned} \tag{17}$$

dove l'ultimo addendo del coefficiente di v^m (e qualcosa di simile dicasi per le altre potenze di v) è $2\alpha_h \alpha_{h+1}$, oppure α_{h+1}^2, secondo che è $m = 2h$, oppure $m = 2h + 1$.

D'altronde, poichè u è un automodulo, si ha pure $u^2 v = uv$, dunque dal confronto delle (14) e (17) si desume che dev'essere

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_1^2, \quad \alpha_2 = 2\alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_3 = 2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2, \\ \alpha_4 = 2\alpha_1 \alpha_4 + 2\alpha_2 \alpha_3, \dots \end{aligned} \tag{18}$$

La prima delle (18) fornisce $\alpha_1 = 0$, oppure $\alpha_1 = 1$; ma, nell'un caso e nell'altro, le rimanenti dànno successivamente

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \dots, \quad \alpha_m = 0,$$

dunque resta che è

$$uv = 0, \quad \text{oppure} \quad uv = v.$$

In maniera simile si prova che è

$$vu = 0, \quad \text{oppure} \quad vu = v,$$

dopo di che si vede, come più sopra, che, se $m > 1$, i prodotti uv e vu sono entrambi nulli o entrambi eguali a v.

Intanto u si comporta rispetto a ciascun elemento di B come rispetto a v, quindi, ecc.

§ 3. Le algebre per ognuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale.

6. Sia A un'algebra nel corpo numerico Γ, la quale abbia per sotto-algebra eccezionale E un'algebra (pseudonulla) potenziale d'ordine m generata da un elemento v con l'equazione minima $\xi^{m+1} = 0$; e supponiamo inoltre che A non coincida addirittura con E, di guisa che A sarà certo dotata di automoduli.

Sia u un automodulo principale di A. Per teoremi noti ([4]) sarà

$$A = uAu + S \tag{19}$$

con $S \leq E$ ed uAu, S complementari in A.

Dico che:

Il sistema S o coincide con E, o è zero.

E infatti, se $S < E$, l'ordine di A, che è la somma degli ordini di uAu ed S è minore della somma di quelli di uAu ed E, quindi uAu ed E hanno certo qualche elemento comune non nullo e per questo elemento u riesce un modulo. Ma allora (n^0 4) u è un modulo per ogni elemento di E, E sta nell'algebra uAu, essendo questa l'insieme degli elementi di A aventi un modulo in u, ed $S = 0$.

Occorre appena avvertire che A è priva, o dotata, di modulo, secondo che riesce $S = E$ o $S = 0$.

Consideriamo separatamente le due alternative; e per la chiarezza dell'esposizione distinguiamo pure il caso in cui è $m > 1$ da quello in cui è $m = 1$.

7. *Il caso* $m > 1$.

Supponiamo, in primo luogo, che sia $S = E$, di guisa che sarà

$$A = uAu + E \tag{20}$$

e l'intersezione di uAu ed E sarà nulla.

([4]) *C. N. A.*, p. 277.

Essendo u un automodulo principale di A gli eventuali elementi eccezionali di uAu sono tali anche per A ([5]); ma quelli di A sono esauriti dagli elementi non nulli di E, dunque uAu è priva di elementi eccezionali, ossia è un'algebra semi-semplice.

Nelle ipotesi attuali u non è un modulo per v ed $m > 1$; quindi, a norma delle considerazioni precedenti, u è per v un nullifico.

Segue che

$$uAu \cdot E = uA \cdot uE = 0\,, \quad E \cdot uAu = Eu \cdot Au = 0\,;$$

d'altronde uAu ed E sono complementari in A, dunque:

Nelle ipotesi fatte A è la somma diretta di un'algebra semi-semplice e di E.

8. Supponiamo, in secondo luogo, che nella (19) sia $S = 0$, ossia che A abbia per modulo u.

Indichiamo con $(p_1, p_2, \dots, p_t)$ la segnatura di A ([6]) e supponiamo dapprima che sia $t = 1$.

Allora A è il prodotto diretto di un'algebra B a modulo primitivo per un'algebra regolare C di ordine p_1^2 e la sotto-algebra eccezionale E di A è il prodotto diretto della sotto-algebra eccezionale E_1 di B per C ([7]); di guisa che, se l'ordine di E_1 si indica con m_1, sarà:

$$m = m_1 p_1^2\,.$$

Ora da

$$E = E_1 \times C$$

si deduce, per ogni valore dell'intero positivo s,

$$E^s = E_1^s \times C^s = E_1^s \times C,$$

quindi l'indice di E_1 è quello di E, ossia $m + 1$. Ma l'indice di un'algebra pseudonulla non può superarne l'ordine aumentato di un'unità ([8]), dunque è $m + 1 \leq m_1 + 1$, ossia $m_1 p_1 \leq m_1$. Ciò implica che sia $p_1 = 1$, e si conclude intanto che A è a modulo primitivo,

([5]) G. Scorza, *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, agosto 1934), n° 1.

([6]) Per questa nozione cfr. *C. N. A.*, pag. 352 e sgg.

([7]) *C. N. A.*, pag. 370 e 371.

([8]) *C. N. A.*, pag. 322.

ossia che l'algebra $A - E$, complementare di E rispetto ad A, è primitiva.

Dico che *$A - E$ è di ordine* 1.

Infatti sia x un qualsiasi elemento di A, $[x]$ la classe mod. E da esso determinata, di guisa che $[x]$ sarà un elemento di $A - E$, e

$$\varphi(\xi) = \xi^\varrho + \alpha_1 \xi^{\varrho-1} \dots + \alpha_\varrho = 0$$

l'equazione minima di $[x]$. Sarà nulla la classe mod. E individuata da

$$x^\varrho + \alpha_1 x^{\varrho-1} + \dots + \alpha_\varrho u$$

e quindi si avrà

$$x^\varrho + \alpha_1 x^{\varrho-1} + \dots + \alpha_\varrho u = e, \tag{21}$$

con e elemento conveniente di E.

Essendo E potenziale di ordine m, l'algebra E^m è del 1^0 ordine, e, per conseguenza, se e' è un qualsiasi elemento non nullo di E^m ogni altro elemento di E^m non sarà che un multiplo scalare di e'.

L'algebra E^m è, al pari di E, invariante in A, quindi il prodotto xe' è in E^m e, come tale, è del tipo $\lambda e'$, con λ numero di Γ.

Da $xe' = \lambda e'$ segue

$$x^2 e' = x \cdot xe' = \lambda x e' = \lambda^2 e', \quad x^3 e' = \lambda^3 e', \dots$$

quindi moltiplicando membro a membro la (21) per e', badando che ee' è in E^{m+1}, indi nullo, e tenendo conto delle uguaglianze or ora scritte, si deduce

$$(\lambda^\varrho + \alpha_1 \lambda^{\varrho-1} + \dots + \alpha_\varrho)\, e' = 0.$$

Ma $e' \neq 0$, dunque è

$$\lambda^\varrho + \alpha_1 \lambda^{\varrho-1} + \dots + \alpha_\varrho = 0,$$

ossia λ è una radice dell'equazione $\varphi(\xi) = 0$. Ma, essendo $A - E$ un'algebra primitiva, $\varphi(\xi)$ è un polinomio irriducibile in Γ, dunque è $\varrho = 1$ e l'elemento $[x]$, che è un qualsiasi elemento di $A - E$, è del rango 1, ossia è un multiplo scalare del modulo di $A - E$ (che è la classe mod. E individuata da u). Segue, come volevasi, che $A - E$ è del 1^0 ordine, ossia che A è dell'ordine $m + 1$ ed è la somma (non diretta) di E e dell'algebra generata da u.

Badando che un'algebra a modulo primitivo è necessariamente irriducibile si conclude che:

Nelle ipotesi attuali A è irriducibile ed è somma (non diretta) di E e dell'algebra generata dal modulo.

Supponiamo, infine, che sia $t > 1$.

Per un teorema noto [9] sarà

$$A = H + N, \quad \text{con} \quad H \wedge N = 0, \quad N \leq E$$

ed

$$H = H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_t$$

con H_j algebra di segnatura (p_j) dotata di modulo; di guisa che, se u_j è il modulo di H_j, sarà

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_t\,,$$

e $u_1, u_2, \dots, u_t$ saranno automoduli a due a due mutuamente nullifici.

Essendo $m > 1$, v in ciascuno degli automoduli u_j ha un modulo o un nullifico; ma in u esso ha un modulo, quindi almeno uno degli automoduli u_j, e sia u_1, è un modulo per v (indi per ciascun elemento di E). Dopo ciò si vede subito che ciascuno dei rimanenti automoduli u_j è per v un nullifico, perchè per $j \neq 1$ è

$$vu_j = vu_1 \cdot u_j = v \cdot u_1 u_j = 0,$$

e

$$u_j v = u_j \cdot u_1 v = u_j u_1 \cdot v = 0.$$

Ora, essendo, come è noto,

$$H_j = u_j A u_j \qquad (j = 1, 2, \dots, t),$$

H_1 è l'insieme degli elementi di A aventi u_1 come modulo, dunque E è contenuta in H_1 ed è la sotto-algebra eccezionale di H_1, giacchè è noto che ogni eventuale elemento eccezionale di una delle algebre H_j è tale anche per A.

Poichè H ed N, ossia $H_1, H_2, \dots, H_t$, N sono complementari in A e poichè $N \leq E$, dal fatto che H_1 contiene E segue che è $N = 0$, sicchè resta:

$$A = H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_t\,,$$

[9] *C. N. A.*, pag. 373 e sgg.

dove H_1 è un'algebra irriducibile del tipo or ora incontrato — di guisa che $p_1 = 1$ —, ed $H_2, \dots, H_t$ sono algebre, per una ragione or ora addotta, prive di elementi eccezionali, indi semplici. Ma allora si conclude che:

Nelle ipotesi ora prese in esame A è la somma diretta di un'algebra semi-semplice con modulo e di un'algebra irriducibile di ordine $m+1$, somma di E e dell'algebra generata da u_1.

9. *Il caso $m = 1$.*

Anche qui supponiamo in primo luogo che sia $S = E$. Sarà

$$A = uAu + E,$$

ed uAu, per ragioni addotte, sarà un'algebra semi-semplice; però, essendo $m = 1$, dal fatto che u non è modulo per v segue non già che u è per v necessariamente un nullifico; bensì che u è per v:

1) un nullifico, oppure
2) un modulo sinistro e un nullifico destro, oppure
3) un modulo destro e un nullifico sinistro.

Nell'alternativa 1) si conclude come precedentemente che A è la somma diretta di uAu ed E; supponiamo pertanto che si verifichi la 2).

Sia $(p_1, p_2, \dots, p_t)$ la segnatura di uAu, o, ciò che è lo stesso, di A, una volta che uAu è equivalente all'algebra $A - E$; e sia dapprima $t = 1$.

Allora uAu è semplice; ma dico che *essa è addirittura (primitiva e) di ordine* 1.

Infatti, poichè uAu è semplice, essa è il prodotto diretto di un'algebra primitiva P e un'algebra regolare R, di ordine p_1^2, aventi entrambe per modulo u; quindi sarà dimostrato l'asserto non appena sia fatto vedere che nè l'ordine di P, nè quello di R può essere > 1.

Se è possibile, sia P d'ordine > 1. Esisterà in P almeno un elemento y con l'equazione minima

$$\varphi(\xi) = \xi^\varrho + \alpha_1 \xi^{\varrho-1} + \dots + \alpha_\varrho = 0$$

di grado $\varrho > 1$.

Il prodotto yv è al pari di v un elemento eccezionale di A; ma qui è $m = 1$, dunque è $yv = \lambda v$, con λ numero di Γ.

Segue, come più sopra,

$$y^2 v = \lambda^2 u, \quad y^3 v = \lambda^3 v, \ldots$$

Ora è

$$y^\varrho + \alpha_1 y^{\varrho-1} + \ldots + \alpha_\varrho u = 0,$$

indi

$$y^\varrho v + \alpha_1 y^{\varrho-1} v + \ldots + \alpha_\varrho v = 0$$

e

$$(\lambda^\varrho + \alpha_1 \lambda^{\varrho-1} + \ldots + \alpha_\varrho) v = 0;$$

dunque si ha

$$\lambda^\varrho + \alpha_1 \lambda^{\varrho-1} + \ldots + \alpha_\varrho = 0$$

e l'equazione $\varphi(\xi) = 0$ ammette la radice λ. Ma ciò è assurdo, perchè $\varphi(\xi) = 0$ è di grado > 1 ed, essendo P primitiva, è irriducibile; dunque, come volevasi, l'algebra P è del 1^0 ordine.

Adesso, se è possibile, sia R d'ordine > 1, cioè sia $p_1 > 1$, e si indichino con le $c_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, p_1)$ p_1^2 unità di R, per le quali la tavola di moltiplicazione sia:

$$c_{i,j}\, c_{h,k} = \begin{cases} 0, \text{ se } j \neq h \\ c_{i,k}, \text{ se } j = h \end{cases} \qquad (i, j, h, k = 1, \ldots p_1). \tag{22}$$

Le $c_{i,i}$ saranno p_1 automoduli (primitivi di R e) di A (mutuamente nullifici) e sarà

$$u = c_{1,1} + c_{2,2} + \ldots + c_{p_1,p_1}.$$

Poichè u è per v un modulo sinistro lo stesso accadrà per almeno una delle $c_{i,i}$ (indi, come ormai è chiaro, per una soltanto); supponiamo che sia $c_{1,1} v = v$.

Il prodotto $c_{2,1} v$ è eccezionale ed $m = 1$, dunque, indicando con μ un numero opportuno, è

$$c_{2,1} v = \mu v \quad \text{e} \quad c_{2,1}^2 v = \mu^2 v.$$

Intanto per le (22) è $c_{2,1}^2 = 0$, dunque è $\mu = 0$ e

$$c_{2,1} v = 0.$$

Ma da tutto ciò segue

$$v = c_{1,1} \cdot v = c_{1,2}\, c_{2,1} \cdot v = c_{1,2} \cdot c_{2,1} v = 0$$

e questo è assurdo; dunque è $p_1 = 1$.

Si conclude che *nelle ipotesi ora fatte A è l'algebra del 2^0 ordine con la tavola di moltiplicazione*

$$u^2 = u, \quad uv = v, \quad vu = 0, \quad v^2 = 0. \tag{23}$$

Supponiamo ora che sia $t > 1$.

Allora uAu è un'algebra semi-semplice somma diretta di t algebre semplici $A_1, A_2, \ldots, A_t$ e l'automodulo u è la somma dei moduli mutuamente nullifici $u_1, u_2, \ldots, u_t$ delle algebre $A_1, A_2, \ldots, A_t$.

Si vede, come più sopra, che per v (indi per ciascun elemento di E) degli automoduli u_i uno, poniamo u_1, è un modulo sinistro e un nullifico destro, mentre ogni altro è un nullifico; quindi per $i = 1, 2, \ldots, t$ è

$$EA_i = E \cdot u_iAu_i = Eu_i \cdot Au_i = 0,$$

per $i = 2, \ldots, t$

$$A_iE = u_iAu_i \cdot E = u_iA \cdot u_iE = 0,$$

e per conseguenza:

$$A = (A_1 + E) \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_t.$$

In quest'uguaglianza

$$A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_t$$

è un'algebra semi-semplice ed $A_1 + E$, che è un'algebra, perchè

$$(A_1 + E)^2 = A_1^2 + A_1E + EA_1 + E^2 = A_1 + E,$$

è un'algebra di segnatura (p_1) del tipo or ora considerato, dunque è $p_1 = 1$ ed $A_1 + E$ è l'algebra del 2^0 ordine con la tavola di moltiplicazione (23).

Considerazioni perfettamente analoghe possono istituirsi quando si verifichi l'alternativa 3); solo che, allora, al posto dell'algebra del 2^0 ordine definita dalle (23), si presenterà quella definita dalle

$$u^2 = u, \quad uv = 0, \quad vu = v, \quad v^2 = 0. \tag{24}$$

Raccogliendo le osservazioni fatte si ha che:

Quando si verifica l'alternativa 2) *o* 3) *sussiste per* A *una eguaglianza della forma*

$$A = A^{(1)} \dotplus A^{(2)},$$

dove $A^{(1)}$ *o è zero o è un'algebra semi-semplice ed* $A^{(2)}$ *è un'algebra del* 2^0 *ordine del tipo* (23) *o* (24).

10. Supponiamo in secondo luogo che sia $S = 0$, cioè che A abbia per modulo u.

Se la segnatura di A è $(p_1, p_2, \ldots, p_t)$ ed è $t = 1$, nulla vi è da mutare in quanto è stato detto per l'ipotesi analoga del caso $m > 1$ (n^0 8); quindi si troverà, d'accordo col caso $m > 1$, che se $t = 1$ è $p_1 = 1$ ed A è l'algebra irriducibile del 2^0 ordine, somma (non diretta) dell'algebra generata da u e della zero algebra E, cioè l'algebra definita dalla tavola di moltiplicazione

$$u^2 = u, \quad uv = vu = v, \quad v^2 = 0. \tag{25}$$

Supponiamo allora che sia $t > 1$, e, per conseguenza,

$$A = H + N, \quad \text{con } H \wedge N = 0, \quad N \leq E$$

ed

$$H = H_1 \dotplus H_2 \dotplus \ldots \dotplus H_t,$$

con H_j algebra di segnatura (p_j) dotata di modulo, e con

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_t,$$

se u_j è il modulo di H_j.

Dal fatto che v ha un modulo in u segue che v o ha un modulo in uno degli automoduli u_j e in ciascuno dei rimanenti un nullifico, oppure ha in uno di essi, poniamo u_1, un modulo sinistro e un nullifico destro, in un altro, poniamo u_2, un nullifico sinistro e un modulo destro e in ciascuno dei rimanenti un nullifico.

Se si verificasse la prima alternativa si troverebbe, ragionando come nel n^0 8 e d'accordo col caso $m > 1$, che A è somma diretta di un'algebra semi-semplice e di un'algebra irriducibile del 2^0 ordine del tipo (25); giova dunque supporre che valga la seconda.

Allora ciascuna H_j è priva di elementi eccezionali, perchè, se, per es., H_j ne avesse, essendo E del 1^0 ordine, tutta E starebbe in H_j e v avrebbe un modulo in u_j, cioè si verificherebbe, non la seconda, ma la prima alternativa; dunque è $N = E$ ed

$$A = H_1 \dot{+} H_2 \dot{+} \dots \dot{+} H_t + E.$$

Consideriamo il sistema $H_1 \dot{+} H_2 + E$ (che, naturalmente esaurisce A, se $t = 2$). Essendo

$$(H_1 \dot{+} H_2 + E)^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_1 E + E H_2 = H_1 \dot{+} H_2 + E,$$

esso è un'algebra; inoltre si riscontra subito che codesta algebra ha per modulo $u_1 + u_2$. Ma le cose possono essere assai meglio precisate.

Le algebre H_1 e H_2 sono semplici, quindi ciascuna di esse è il prodotto diretto di un'algebra primitiva per un'algebra regolare; ora, ragionando come nel n⁰ 9, si riconosce che queste algebre primitive e regolari sono tutte del 1⁰ ordine, dunque H_1 e H_2 sono le algebre generate da u_1 e u_2 ed $H_1 \dot{+} H_2 + E$ è quella del 3⁰ ordine con la tavola di moltiplicazione

(26)

	u_1	u_2	v
u_1	u_1	0	v
u_2	0	u_2	0
v	0	v	0

Notisi che *quest'algebra è irriducibile.* E infatti, se essa fosse la somma diretta di due algebre B_1 e B_2, l'algebra E, essendo del 1⁰ ordine, dovrebbe essere tutta situata in una delle due algebre B_1 e B_2. Posto che essa stia in B_1, v avrà per modulo il modulo di B_1 e per nullifico quello di B_2. Ora gli automoduli dell'algebra (26) (fra i quali si troverebbe il modulo di B_2), come subito si riscontra, sono dati tutti da

$$u_1 + \lambda v, \quad u_2 + \mu v, \quad u_1 + u_2,$$

al variare di λ e μ in Γ, e nessuno di questi è un nullifico per v, dunque, ecc.

Si conclude che:

Nelle ipotesi attuali sussiste per A un'eguaglianza del tipo

$$A = A^{(1)} + A^{(2)},$$

dove $A^{(1)}$ è zero o un'algebra semi-semplice ed $A^{(2)}$ è un'algebra irriducibile, la quale o è del 2⁰ ordine e del tipo (25), *o è del 3⁰ ordine e del tipo* (26).

11. È utile raccogliere nel seguente enunciato complessivo le proposizioni via via stabilite in questo paragrafo.

Se A è un'algebra, la quale abbia per sotto-algebra eccezionale (propria od impropria) un'algebra (pseudonulla) potenziale E di ordine m, è

$$A = A^{(1)} + A^{(2)},$$

dove $A^{(1)}$ o è zero o è un'algebra semi-semplice con modulo, ed $A^{(2)}$ è un'algebva irriducibile che, quando $m > 1$, o

1) *è priva di modulo e coincide con E, o*

2) *è dotata di modulo ed è somma (non diretta) di E e dell'algebra generata dal modulo;*

mentre quando $m = 1$, ossia quando E è una zero-algebra di ordine 1, o ha la struttura descritta in 1) o 2), o

3) *è un'algebra del 2^0 ordine del tipo (23) o (24), o*

4) *è un'algebra del 3^0 ordine del tipo (26).*

Naturalmente nel caso 3) $A^{(2)}$ è dotata soltanto di moduli sinistri o soltanto di moduli destri; nel caso 4) è dotata di modulo.

12. Al teorema ora enunciato si riattacca un'osservazione che mette conto di rilevare.

In una Nota recente ([10]) ho fatto vedere che, se il corpo, entro il quale un'algebra è data, è infinito, ma a sottocorpo fondamentale finito, non può asserirsi senz'altro che essa sia o pseudonulla, o semi-semplice o somma di un'algebra semi-semplice e della sua sotto-algebra eccezionale, come potrebbe essere invece affermato, se il corpo non fosse di quella natura. Ebbene il teorema qui stabilito mostra che, però, *quando la sotto-algebra eccezionale di un'algebra A è potenziale, può sempre asserirsi che A, se non è pseudonulla, è una somma del tipo ora detto, qualunque sia il corpo nel quale essa è definita* ([11]).

([10]) Loc. cit. 5.

([11]) (*Aggiunta durante la correzione delle bozze*). Giova rilevare che, soltanto per le zero-algebre del 1^0 ordine, il penultimo enunciato del n^0 4 non può essere precisato nel modo che nel testo è fatto per le algebre pseudonulle potenziali d'ordine > 1.

Infatti, se B è commutativa irriducibile e d'ordine > 1, esisteranno in essa due elementi b e b' per i quali sia $bb' \neq 0$; quindi, se, per es., fosse, nel tempo stesso,

$$ub = b \text{ e } bu = 0, \quad ub' = b' \text{ e } b'u = 0,$$

si avrebbe l'assurdo:

$$0 \neq b.b' = b.ub' = bu.b' = 0.$$