A PROPOSITO DI UN RECENTE LAVORO DI A. A. ALBERT (*)

Nel fascicolo degli *Annals of mathematics* pubblicato nel gennaio di quest'anno è apparsa una Nota di A. A. ALBERT (1) alla quale desidero dedicare qualche breve commento.

Ricordato che cosa sia una matrice di RIEMANN ed enunciato il teorema di POINCARÉ sugli integrali abeliani riducibili come una proposizione relativa alle matrici di RIEMANN legate a curve algebriche, l'ALBERT cosi passa a dichiarare lo scopo del suo lavoro:

The above theorem — quello di POINCARÉ — *was generalized to the case where ω is any Riemann matrix by G. Scorza. Scorza used a rather complicated projective geometric method and his proof (as well as all previous proofs) is not very simple. I shall give here an elementary matrix proof of the above theorem and the later Scorza reduction of any impure Riemann matrix to its pure components.*

1. Ora qui vi è luogo a parecchie osservazioni.

In primo luogo che il teorema di POINÇARÉ sia estendibile a qualsiasi matrice di RIEMANN è osservazione di tale immediatezza che proprio non ci terrei a vedermela attribuita anche se fossi stato io ad averla messa in rilievo (2); ma essa trovasi già esplicitamente indicata, e senza darle alcun peso, in una classica Memoria del CASTELNUOVO (3).

In secondo luogo non vedo come possa dirsi che la dimostrazione, trovata — presso che al tempo medesimo è in piena indipen-

(*) *Rend. Reale Accad. dei Lincei,* (6) 21 (1935), pp. 727-732.

(1) Dal titolo: *A note on the Poincaré theorem ou impure Riemann matrices.*

(2) Piuttosto non mi sarebbe dispiaciuto che l'ALBERT avesse trovato modo di avvertire che a me è dovuto il teorema 5 col quale la sua Nota si chiude e col quale fin dal 1917 ho caratterizzato le algebre legate a matrici di RIEMANN. Veggasi G. SCORZA, *Il rango di una matrice di Riemann.* Questi «Rendiconti», ser. 5ª, vol. XXVI, 2º sem. 1917, pp. 177-182.

(3) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Questi «Rendiconti», ser. 5ª, vol. XIV, 1º sem. 1905, pp. 545-556, 593-598, 655-663, p. 596.

za reciproca — da me e dal ROSATI [4] non sia *very simple* ed usi *a rather complicated projective geometric method*, quando essa non richiede che conoscenze di geometria proiettiva assolutamente elementari (le proposizioni di appartenenza e le proprietà dei sistemi nulli che sono conseguenze immediate della loro definizione). E ove pur volesse concedersi che la dimostrazione in discorso non fosse *very simple*, non sarebbe giusto metterla alla pari... per scarsezza di semplicità con tutte le dimostrazioni precedenti; fra le quali quella del POINCARÉ — anche nella forma datale dal WIRTINGER [5] — è viziata da un errore in un punto fondamentale, e quella — elegantissima — del CASTELNUOVO non può certo esser compresa da chi non abbia profonde conoscenze di analisi e geometria algebrica.

2. Ma vi è qualcosa di più strano da osservare: la dimostrazione che l'ALBERT crede nuova è, sotto veste diversa e con modifiche insignificanti, un ragionamento già indicato per via incidentale e per tutt'altro scopo in una mia Memoria del 1919 [6]; ragionamento che piegato a stabilire il teorema di POINCARÉ ne fornisce una dimostrazione niente affatto più semplice di quella cui ed io ed il ROSATI facemmo ricorso

3. Nella detta mia Memoria per dimostrare che, se

$$\omega = \left\| \begin{array}{cccccccc} \omega_{1,1} & , \cdots , & \omega_{1,2q} & , & 0 & , \cdots , & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{q,1} & , \cdots , & \omega_{q,2q} & , & 0 & , \cdots , & 0 \\ \omega_{q+1,1} & , \cdots , & \omega_{q+1,2q} & , & \omega_{q+1,2q+1} & , \cdots , & \omega_{q+1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & , \cdots , & \omega_{p,2q} & , & \omega_{p,2q+1} & , \cdots , & \omega_{p,2p} \end{array} \right\|$$

(4) G. SCORZA, a) *Sugli integrali abeliani riducibili.* Questi « Rendiconti » ser. 5ª, vol. XXIV, 1º sem. 1915, pp. 412-418 e pp. 645-654; b) *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. XLI, 1916, pp. 263-379, p. 297; C. ROSATI, *Sugli integrali abeliani riducibili.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. L, 1914-15, pp. 685-694.

(5) Riprodotta dal KRAZER a p. 495 e sgg. del suo classico *Lehrbuch der Thetafunktionen.* L'errore cui qui sopra si accenna consiste in ciò che nelle dimostrazioni del POINCARÉ e del WIRTINGER si suppone nullo l'indice di singolarità di una matrice riemanniana impura, che, invece, è necessariamente > 0.

(6) G. SCORZA, *Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. XLIII, 1918-19, pp. 213-238.

è una matrice riemanniana, tale è pure la matrice

$$\omega_1 = \begin{Vmatrix} \omega_{q+1,2q+1}, \dots, \omega_{q+1,2p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_{p,2q+1}\ \ , \dots, \omega_{p,2p} \end{Vmatrix}$$

si ragiona nel seguente modo (7).

In uno spazio proiettivo a $2p - 1$ dimensioni nel quale sia stabilito un sistema di coordinate proiettive omogenee con la piramide fondamentale $A_1, \dots, A_{2p}$ siano: Q e Q_1 gli spazi $A_1, \dots, A_{2q}$ e $A_{2q+1}, \dots, A_{2p}$, aventi le dimensioni rispettive $2(q-1)$ e $2(p-q)-1$, τ l'immagine di ω, Q_j il punto di τ che ha per coordinate gli elementi della j^{ma} riga di ω.

Per l'ipotesi i punti $O_1, \dots, O_q$ stanno sullo spazio Q e dunque Q è un'asse di ω ed ω è impura.

I punti $O_{q+1}, \dots, O_p$ determinano in τ un S_{p-q-1} indipendente da Q e quindi sono proiettati da Q su Q_1 in $p-q$ punti $O'_{q+1}, \dots, O'_p$ congiunti da un S_{p-q-1}, α'.

Sia Q' un asse *complementare* a Q e si dica σ un sistema nullo riemanniano di ω, certo esistente, che abbia per asse Q e che subordini su Q' un sistema nullo principale per Q'.

Allora σ è *tagliato* da Q_1 in un sistema nullo razionale non degenere trasformante in sè α' e atto a mostrare che α' è nello spazio Q_1 l'imagine di una matrice riemanniana del genere $p-q$. Ma entro Q_1 le coordinate del punto O'_{q+l} sono gli elementi della l^{ma} riga di ω_1, dunque ω_1 è una matrice di Riemann con l'imagine α'.

4. In questo ragionamento si presuppongono già noti il teorema di Poincaré e la proposizione che garentisce l'esistenza dei sistemi nulli riemanniani degeneri di una matrice riemanniana impura aventi per asse un suo asse comunque assegnato, ma lo si converte subito in un ragionamento atto a dimostrare il teorema di Poincaré e nella forma che a questo teorema dà l'Albert, cioè a provare che ω è isomorfa alla matrice

$$\begin{Vmatrix} \omega_1\ \ , \dots, \omega_{1,2q}, & 0 & , \dots, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_{q,1}, \dots, \omega_{q,2q}, & 0 & , \dots, 0 \\ 0\ \ , \dots, 0\ \ , & \omega_{q+1,2q+1} & , \dots, \omega_{q+1,2p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ \ , \dots, 0\ \ , & \omega_{p,2q+1} & , \dots, \omega_{p,2p} \end{Vmatrix}$$

(7) Loc. ora cit., § 3.

ponendo

a) che Q' sia lo spazio polare di Q in un sistema nullo principale di ω, Σ;

b) che σ sia il sistema nullo degenere di asse Q che porta ciascun punto di Q' nell'iperpiano della stella di centro Q nel quale lo muta Σ;

e imaginando inoltre di eseguire nello spazio ambiente una trasformazione omografica razionale Φ che lasci fermi i singoli punti di Q e subordini fra Q' e Q_1 la prospettività di centro Q.

5. Orbene, la dimostrazione così delineata, è, tradotta in linguaggio algebrico puro, la *elementary matrix proof* dell'ALBERT.

Infatti, se

$$C = \| c_{ij} \|$$

è la matrice dei coefficienti di Σ, lo spazio Q' è l'intersezione degli iperpiani polari dei punti $A_1, \ldots, A_{2q}$ aventi per equazioni

$$\sum_r^{1\ldots 2p} c_{1,r}\, x_r = 0\,, \ldots, \sum_r^{1\ldots 2p} c_{2p,r}\, x_r = 0. \tag{1}$$

Un punto esterno a Q dello spazio proiettante O_{q+l} da Q ha le coordinate del tipo

$$-\lambda_{l,1} + \omega_{q+l,1}\,, \ldots, -\lambda_{l,2q} + \omega_{q+l,2q}\,, \quad \omega_{q+l,2q+1}\,, \ldots, \omega_{q+l,2p} \tag{2}$$

quindi sta nello spazio Q', se per le λ si ha

$$\left\{\begin{array}{l} -\sum\limits_j^{1\ldots 2q} c_{1,j}\, \lambda_{l,j} + \sum\limits_r^{1\ldots 2p} c_{1,r}\, \omega_{q+l,r} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\sum\limits_j^{1\ldots 2q} c_{2q,j}\, \lambda_{l,j} + \sum\limits_r^{1\ldots 2p} c_{2q,r}\, \omega_{q+l,r} = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

ossia

$$\lambda_{l,j} = \omega_{q+l,j} + \sum_i^{1\ldots 2q} \sum_s^{1\ldots 2(p-q)} \gamma_{i,j}\, c_{i,2q+s}\, \omega_{q+l,2q+s} \quad \begin{pmatrix} l=1,2,\ldots,p-q \\ j=1,2,\ldots,2p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

dove con $\gamma_{i,j}$ si è indicato il reciproco di $c_{i,j}$, nel minore principale di C d'ordine $2q$ contenuto nelle prime $2q$ righe.

Ciò porta che O_{q+l} è proiettato da Q su Q' nel punto O''_{q+l} di coordinate

$$\sum_i^{1\dots 2q}\sum_s^{1\dots 2(p-q)} \gamma_{i,1}\, c_{2q+s,i}\, \omega_{q+l,2q+s}\,, \dots, \sum_i^{1\dots 2q}\sum_s^{1\dots 2(p-q)} \gamma_{i,2q}\, c_{2q+s,i}\, \omega_{q+l,2q+s}\,,$$

$$\omega_{q+l,2q+1}\,, \dots, \omega_{q+l,2p}\,,$$

punto che naturalmente appartiene a τ. Ma allora la matrice ω è isomorfa all'altra Ω che ha per righe le coordinate dei punti $O_1, \dots, O_q, O''_{q+1}, \dots, O''_p$ e questa è isomorfa a quella che ha per righe le coordinate dei punti $O_1, \dots, O_q, O'_{q+1}, \dots, O'_p$ giacchè l'omografia Φ lascia fermi i punti $O_1, \dots, O_q$ e porta $O''_{q+1}, \dots, O''_p$ in $O'_{q+1}, \dots, O'_p$.

Ora le matrici $\alpha\omega$ ed A che compariscono nella dimostrazione dell'ALBERT sono precisamente la matrice quivi indicata con Ω e la trasposta della matrice dei coefficienti dell'omografia Φ.

Concludendo:

*La dimostrazione dell'*ALBERT*, tradotta in linguaggio geometrico, si muta in quella or ora indicata, visibilmente assai meno semplice della dimostrazione del teorema di* POINCARÉ *data da me e* ROSATI. *E dunque quest'ultima, dal punto di vista concettuale, resta ancora la più semplice tra quelle finora conosciute.*

Ma, lasciando pur da parte il punto di vista concettuale, contesto che il linguaggio puramente algebrico, cui ha voluto attenersi l'ALBERT, per le questioni riguardanti le matrici di RIEMANN agitate nel lavoro che qui si esamina sia il più conveniente ed opportuno.

Il lettore, che sia padrone dei due linguaggi, voglia considerare:

a) che la dimostrazione, di cui fin qua si è discorso, perde ogni spontaneità e luminosità quando sia spogliata della sua veste geometrica;

b) che il lemma 1 dell'ALBERT, quando si adotti la rappresentazione geometrica da me indicata, si enuncia nel modo che segue:

Se Σ è un sistema nullo principale della matrice riemanniana ω con l'imagine τ, r punti, che siano coniugati in Σ a ciascun punto di τ, appartengono necessariamente a τ;

cioè si converte in un'osservazione ... ingenua, giacchè dire che Σ è un sistema nullo di ω (non occorre nemmeno che sia principale) significa che τ, concepito come luogo di punti, è mutato da Σ in sè, concepito come stella di iperpiani (8);

c) che qualcosa di simile può dirsi del teorema 3 dell'ALBERT, cioè del teorema:

Matrici riemanniane pure o non sono vincolate o sono isomorfe.

A proposito del quale egli sembra ignorare che mi appartiene (9).

(8) Lo ZARISKI nel suo recente volume *Algebraic surfaces* (Berlin, Springer, 1935) per dimostrare il teorema di POINCARÉ riproduce con lievi modificazioni il ragionamento algebrico dell'ALBERT e naturalmente comincia dallo stabilire il lemma di cui qui sopra si discorre. Lemma cui lo ZARISKI, per non ripetere quella dell'ALBERT, dedica una dimostrazione in due tempi!

(9) Loc. cit. (5) *b*), p. 296.