SULLE ALGEBRE RIDUCIBILI (*)

I teoremi fondamentali sulle algebre riducibili, dovuti allo SCHEFFERS ed allo WEDDERBURN, sono stati dimostrati da quest'ultimo con l'usata semplicità ed eleganza [1]. Ma recentemente mi è venuto fatto di osservare che la trattazione può esser resa ancora più rapida e snella e che il teorema dello WEDDERBURN [2] può essere enunciato in forma più espressiva di quella originale: non credo pertanto che sia del tutto inutile esporre qui le mie considerazioni.

1. Cominciamo col notare che:

α) Se l'algebra A possiede una sotto-algebra invariante B col modulo v, gli elementi di A sono tutti permutabili con v.

Infatti, se a è un qualsiasi elemento di A, i prodotti av e va, attesa l'invarianza di B, appartengono a B; quindi essi hanno un modulo in v ed è

$$av = v.av = va.v = va.$$

(*) *Rend. Sem. Mat. Univ. Roma*, (4), 1 (1937), pp. 186-191.

(1) Cfr. J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, *On hypercomplex numbers* (Proceedings of the London Mathematical Society, s. 2, vol. 6, 1908, pp. 77-117); ed anche G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921, pp. 316-322).

(2) Si allude qui al teorema 10, pag. 86, della memoria già citata, che ivi è espresso in forma difettosa. Per altro è da notare che nella dimostrazione vien fatta esplicitamente l'ipotesi necessaria alla verità del teorema, sicchè l'imperfezione dell'enunciato è da attribuire ad errore di stampa. L'enunciato in forma corretta fu comunicato dallo WEDDERBURN al DICKSON e da questi pubblicato nella sua opera *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich und Leipzig. Orell Fussli, 1927). Qui lo riporteremo nell'annotazione (6).

Di qua discende che:

β) *Se v è un automodulo di A permutabile con A, v è addirittura permutabile coi singoli elementi di A.*

E infatti da $Av = vA$ segue

$$A \cdot vAv = Av \cdot Av = vA \cdot Av = vA^2v \leq vAv,$$

e similmente

$$vAv \cdot A \leq vAv;$$

ma allora vAv è invariante in A, e, poichè vAv ha per modulo v, v è permutabile coi singoli elementi di A.

Notisi infine che:

γ) *Se per le algebre A, B, C è*

$$A = B \dotplus C$$

e B ha per modulo v, ogni elemento c di C è rappresentabile — in più modi — nella forma

$$c = a - av,$$

con a elemento di A.

E infatti, detto b un qualsiasi elemento di B e posto

$$a = b + c,$$

risulta

$$av = bv + cv;$$

ma, per le ipotesi,

$$bv = b \quad \text{e} \quad cv = 0,$$

quindi resta

$$av = b \quad \text{e} \quad c = a - b = a - av.$$

2. Ciò premesso dimostriamo che:

Se l'algebra A possiede una sotto-algebra invariante propria B dotata di modulo, A è riducibile ed è somma diretta di B ed un'algebra ulteriore C, individuata da A e B.

Diciamo v il modulo di B: allora basta guardare a ciò che è detto nel n° 1 in γ) per riconoscere che il teorema sarà pienamente dimostrato quando siasi fatto vedere che, posto

$$c = a - av, \tag{1}$$

con a in A, al variare di a in A l'insieme C descritto da c riesce un'algebra per la quale è

$$A = B \dot{+} C. \tag{2}$$

Ora ciò si stabilisce agevolmente.

In primo luogo C è un sistema, giacchè è chiaro che i suoi elementi si riproducono per somma e per moltiplicazione scalare; e in secondo luogo è $C \neq 0$, perchè se nella (1) al variare di a, c risultasse costantemente nullo, B, contro il supposto, coinciderebbe con A. Intanto, se insieme con c si considera l'elemento c' di C per il quale è

$$c' = a' - a'v, \tag{3}$$

con a' in A, attesa la permutabilità di v con i singoli elementi di A [n⁰ 1, α)], riesce

$$cc' = aa' - aa'.v;$$

dunque gli elementi di C si riproducono anche per prodotto e C è un'algebra.

In base alla (1) è, evidentemente,

$$A = B + C,$$

quindi resta soltanto a far vedere che

$$BC = CB = 0 \quad \text{e} \quad B \wedge C = 0.$$

Per questo basta osservare che, se b è un qualsiasi elemento di B, la (1) dà

$$bc = ba - bav = ba - b.va = ba - bv.a = ba - ba = 0$$

e

$$cb = ab - av.b = ab - a.vb = ab - ab = 0;$$

e che, se nella (1) c appartiene anche a B, indi ha un modulo in v, risulta

$$c = cv = av - av^2 = av - av = 0\ (^3).$$

(3) La dimostrazione del testo, sebbene sia più semplice, non differisce sostanzialmente da quella data dal Dickson (loc. cit., pag. 87). Il Dickson per altro non rileva che l'algebra C è individuata da A e B.

3. Ponendo a raffronto il teorema ora dimostrato con quanto è detto al n^0 1 in β) si ha subito che:

Un'algebra A, la quale possegga un automodulo v, diverso, eventualmente, dal modulo e permutabile con tutti i suoi elementi, è riducibile ed è somma diretta di vAv e di un'algebra ulteriore individuata da A e v.

Ma è ben noto che se un'algebra A, somma diretta di due altre B e C, è dotata di modulo, B e C sono (invarianti in A e sono) anch'esse dotate di modulo, dunque:

Perchè un'algebra dotata di modulo sia riducibile occorre e basta che possegga un automodulo diverso dal modulo e permutabile (con essa, o, ciò che fa lo stesso) con ogni suo elemento [4].

Se un'algebra è commutativa, ogni suo eventuale automodulo è senz'altro permutabile con tutti i suoi elementi, dunque:

Un'algebra commutativa non pseudonulla è irriducibile quando, e solo quando, è a modulo primitivo.

4. Qui vi è luogo ad osservazioni ulteriori.

Sia C un'algebra commutativa non pseudonulla e riducibile e sia

$$C = C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} \dots \dot{+} C_t$$

uno spezzamento di C in una somma diretta di algebre irriducibili.

Per quanto or ora è stato detto, ognuna delle C_i, essendo commutativa al pari di C, o è a modulo primitivo o è pseudonulla; e fra di esse ve n'è certo qualcuna per cui si verifica la prima alternativa, perchè altrimenti C sarebbe pseudonulla.

Supponiamo per fissar le idee che $C_1, \dots, C_\tau$ $(1 \leq \tau \leq t)$ siano a modulo primitivo e che, se $\tau < t$, $C_{\tau+1}, \dots, C_t$ siano pseudonulle. Posto

$$\Gamma = C_{\tau+1} \dot{+} \dots \dot{+} C_t \quad \text{o} \quad \Gamma = 0$$

secondo che è $\tau < t$ o $\tau = t$ (ossia, secondo che C è priva o no di modulo), sarà

$$C = C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} \dots \dot{+} C_\tau \dot{+} \Gamma \tag{4}$$

Giacchè per teoremi noti gli automoduli primitivi di C sono quelli delle algebre C_i, si ha, in primo luogo, che gli automoduli

[4] È questo il così detto *criterio di* SCHEFFERS per la riducibilità delle algebre con modulo.

primitivi di C sono tutti e solo i moduli $v_1, \ldots, v_\tau$ di $C_1, \ldots, C_\tau$, e, in secondo luogo, che ogni automodulo di C o coincide con uno dei moduli $v_1, \ldots, v_\tau$ o è somma di alcuni essi, di guisa che gli automoduli di C sono in tutto

$$\tau + \binom{\tau}{2} + \ldots + \binom{\tau}{\tau} = 2^\tau - 1 .$$

Intanto C_j $(1 \leq j \leq \tau)$ non è che l'insieme degli elementi di C aventi per modulo v_j, dunque nella (4) le algebre $C_1, \ldots, C_\tau$ sono individuate da C, e dopo ciò anche Γ è individuato da C, una volta che Γ, per quanto è detto nel n^0 2 è individuato da C e $C_1 \dot{+} C_2 \dot{+} \ldots \dot{+} C_\tau$.

Da quanto siamo venuti dicendo si raccoglie il teorema:

L'insieme degli automoduli di un'algebra commutativa non pseudonulla è, in ogni caso, finito, ed il loro numero complessivo è $2^\tau - 1$, *se* τ *è il numero di quelli primitivi* [5].

Se l'algebra è irriducibile, è $\tau = 1$ *e l'unico suo automodulo (primitivo) è il suo modulo; se invece è riducibile, ogni suo spezzamento in una somma diretta di algebre irriducibili contiene* τ *algebre dotate di modulo e da essa individuate. Se queste si denotano con* $C_1, \ldots, C_\tau$, *l'algebra data* C, *o è dotata di modulo ed allora è esaurita dalla somma (diretta) delle* C_j, *o è priva di modulo ed allora è somma diretta delle* C_j *e di un'algebra ulteriore pseudonulla* Γ, *irriducibile o no, ma in ogni caso individuata da* C.

5. Supponiamo ora che A sia un'algebra riducibile e che posto

$$A = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_t \tag{5}$$

con le A_i irriducibili, fra queste ve ne sia almeno una dotata di modulo.

Supponiamo, per fissar le idee, che fra di esse quelle dotate di modulo siano $A_1, \ldots, A_\tau$ $(1 \leq \tau \leq t)$, e che, se $\tau < t$, $A_{\tau+1}, \ldots, A$ ne siano prive.

Posto

$$D = A_{\tau+1} \dot{+} \ldots \dot{+} A_t \text{ oppure } D = 0$$

secondo che è $\tau < t$ o $\tau = t$, sarà

$$A = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_\tau \dot{+} D.$$

[5] Per il caso delle algebre commutative con modulo l'osservazione trovasi già fatta alla pag. 322 del mio libro già citato.

Ognuna delle algebre $A_1, \ldots, A_\tau$, essendo dotata di modulo, possiedo certo una sotto-algebra centrale; ma dunque anche A possiede una tale sotto-algebra e, se questa si indica con C, sarà

$$C = C_1 \dot{+} \ldots \dot{+} C_\tau \dot{+} \Gamma,$$

ove si intenda che $C_j\,(1 \leq j \leq \tau)$ sia la sotto-algebra centrale di A_j e Γ sia la sotto-algebra centrale di D o lo zero, secondo che tale ultima sotto-algebra esiste o non.

Dico ora che Γ, *se non è zero, è un'algebra pseudonulla.*

Ed infatti, se ciò non fosse, Γ conterrebbe almeno un automodulo, questo sarebbe un automodulo di D permutabile con ciascun elemento di quest'algebra, ed essendo

$$D = A_{\tau+1} \dot{+} \ldots \dot{+} A_t$$

almeno una di queste A_l conterrebbe un automodulo permutabile con ogni suo elemento. Ma allora una tale A_l, essendo priva di modulo, sarebbe riducibile, in contrasto con l'ipotesi che nella (5) le algebre a secondo membro siano tutte irriducibili.

Segue che τ è il numero degli automoduli primitivi di C; che le $A_1, \ldots, A_\tau$ sono individuate da A, in quanto ognuna di esse non è che l'insieme degli elementi di A aventi per modulo un automodulo primitivo di C; e che infine anche D è individuata da A.

Si conclude che:

Se un'algebra A è riducibile e se, spezzata in una somma diretta di algebre irriducibili, fra le componenti compariscono algebre dotate di modulo, ognuna di queste algebre — al pari della somma delle (eventuali) componenti prive di modulo — è individuata dall'algebra A.

Inoltre il numero delle componenti dotate di modulo è il numero degli automoduli primitivi della sotto-algebra centrale.

In particolare si ha che:

Se un'algebra dotata di modulo è riducibile, essa non può essere spezzata in una somma di algebre irriducibili che in un modo solo [6].

[6] Teorema dovuto allo SCHEFFERS. Per le algebre prive di modulo l'enunciato dello WEDDERBURN è il seguente:

Se un'algebra A è priva di modulo, ma possiede sotto-algebre invarianti dotate di di modulo, A può essere espressa — in un modo solo — come somma diretta di un'algebra B con modulo e di un'algebra C priva di modulo e di sotto-algebre invarianti dotate di modulo.

Cfr. DICKSON, *loc. cit.*, pag. 268.

Notisi infine che, per quanto siamo venuti dicendo:

Se la sotto-algebra centrale di un'algebra A non è pseudonulla e τ è il numero dei suoi automoduli primitivi, il numero delle sotto-algebre invarianti di A dotate di modulo (compresa, eventualmente, la stessa algebra A) è $2^\tau - 1$.

Roma, 20 dicembre 1936.