LA TEORIA DELLE ALGEBRE E LE SUE APPLICAZIONI(*)

Sebbene con difficoltà, ho ceduto alle insistenze del collega SANSONE ed ho accettato di tener questa conferenza sulle algebre, perchè ho pensato che egli non errava, quando sosteneva con me, che mette conto di cercar di attrarre qualche giovane ricercatore allo studio di teorie che da poco più che un paio di lustri a questa parte hanno conseguito sviluppi imponenti, in ispecie fra i tedeschi e gli americani del Nord. E perchè non avvenga che i quaranta o cinquanta minuti in cui vi intratterrò si risolvano..., agli effetti propagandistici, in un completo insuccesso, piuttosto che procedere ad una scorribanda fra una congerie di risultati, per necessità di cose, rapidissima e quindi inintelligibile, credo sia meglio dir poco, ma quel poco presentarlo in maniera che possa esser pienamente inteso anche da chi di questi studi non ha avuto occasione di interessarsi.

Sia dunque ben chiaro che, con quanto dirò, nè pretendo di dar conto dei più recenti sviluppi della teoria delle algebre, che, per la loro stretta connessione con l'alta aritmetica e gli svariati capitoli della così detta *algebra moderna*, non potrebbero essere accennati in maniera succinta che davanti ad un pubblico di specialisti (1); nè quando parlerò delle applicazioni potrò indicarle

(*) *Atti 1º Congr. dell' Un. Mat. Ital.*, (1937), pp. 40-57.

(1) Chi desideri informazioni presso che complete su tutto quanto è stato fatto nella teoria delle algebre fino al 1935 può consultare utilmente la bella monografia del DEURING intitolata *Algebren* ed apparsa nella ben nota Collezione *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* pubblicata dal *Zentralblatt für Mathematik*.

Credo poi utile avvertire che la nomenclatura qui adoperata è, su per giù, quella che io fissai nel mio trattato *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, tutte con sufficiente ampiezza. Così pure non potrò intrattenermi sulle estensioni di teorie classiche cui quella delle algebre ha dato luogo; quali l'aritmetica in un'algebra, inaugurata in maniera sistematica dal DICKSON [2]; lo studio delle funzioni in un'algebra, cui il nostro SPAMPINATO ha contribuito recentemente con memorie e note ricche di risultati notevoli [3]; e l'introduzione, dovuta pure allo SPAMPINATO, degli *spazi ipercomplessi*, con che egli ha dato la massima estensione possibile ad una geniale idea di CORRADO SEGRE ed ha non solo apprestato i mezzi per passare alla costruzione di nuove interessanti geometrie, ma ha anche avuto occasione di apportare contributi non privi di interesse alla teoria generale delle algebre [4].

1921) seguendo più specialmente il CARTAN, e lo WEDDERBURN e allontanandomene solo quando mi parve che ciò mi fosse imposto da ragioni notevoli di opportunità o da esigenze della nostra lingua.

(2) Veggasi DICKSON: *a*) *Algebras and their arithmetics* (Univ. of Chicago Press, 1923); *b*) *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Orell Füssli Verlag, Zürich und Leipzig, 1927); e per i più recenti progressi la citata monografia del DEURING.

(3) N. SPAMPINATO: *a*) *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa dotata di modulo* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 57, pp. 235-272; vol. 58, pp. 105-143; vol. 59, pp. 185-227); *b*) *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. 6ª, vol. XXI, 1935, pp. 621-625 e pp. 683-687); *c*) *Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili* (Ibid. pp. 626-631 e pp. 688-692); *d*) *Estensione nel campo bicomplesso ecc.* (Ibid. s. 6ª, vol. XXII, 1935, pp. 38-43 e pp. 96-102); *e*) *Sulla rappresentazione delle funzioni ecc.* (Annali di matematica, s. IV, vol. XIV, 1936, pp. 305-325).

Interessante è pure, a questo proposito, la memoria di S. CHERUBINO: *Funzioni olomorfe di matrici* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. 2ª, vol. IV, 1937, pp. 41-70).

(4) N. SPAMPINATO: *a*) *Sulla geometria dello spazio rigato considerato come un S_1 ipercomplesso* (Atti della R. Accad. delle Scienze fisiche matematiche e naturali di Napoli, s. 2ª, vol. XX, mem. n⁰. 11); *b*) *Teoria delle caratteristiche in un'algebra dotata di modulo ed S_r ipercomplessi* (Memorie della R. Accademia dei Lincei, classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, s. 6ª, vol. 6⁰, fasc. IV, 1936); *c*) *Sulle varietà iperalgebriche del* SEGRE *nell'S_r complesso o bicomplesso* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, s. II. t. 68, Parte Prima, pp. 189-240).

§ 1.

DEFINIZIONI PRELIMINARI.

1. Sia Γ un corpo numerico — ad es. per fissare le idee, il corpo dei numeri razionali, quello dei numeri reali, o, infine, quello degli ordinari numeri complessi — ed A un *sistema di ipercomplessi* in Γ, o, come anche diremo, un'*algebra* in Γ; se l'*ordine* di A è n, ed $u_1, \dots, u_n$ sono n suoi elementi indipendenti, l'espressione

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \tag{1}$$

al variare delle λ in Γ, darà tutti gli elementi di A e ciascuno di essi lo darà una volta sola.

In particolare lo *zero* o l'elemento *nullo* di A sarà quello che si ottiene dalla (1) facendovi nulle tutte le λ.

Com'è noto, il *prodotto scalare* αx o $x\alpha$ di un numero α di Γ per l'elemento (1) di A è

$$\alpha x = x\alpha = \alpha\lambda_1 u_1 + \dots + \alpha\lambda_n u_n;$$

la *somma* di (1) e dell'elemento

$$x' = \lambda'_1 u_1 + \dots + \lambda'_n u_n \tag{2}$$

è

$$x + x' = (\lambda_1 + \lambda'_1) u_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n) u_n;$$

e il *prodotto* di (1) e (2) si calcola mediante la formula

$$xx' = \sum_{i,j}^{1\dots n} \lambda_i \lambda'_j u_i u_j,$$

quando sia data la *tavola di moltiplicazione* di A (relativa alla *base* $u_1, \dots, u_n$), cioè siano assegnate le uguaglianze

$$u_i u_j = \sum_{r}^{1\dots n} \gamma_{i,j,r} u_r \qquad (i, j = 1, \dots, n), \tag{3}$$

con le $\gamma_{i,j,r}$ numeri di Γ, che servono ad esprimere i prodotti $u_i u_j$ come combinazioni lineari delle u.

In base alle definizioni ora ricordate, in A la somma gode delle proprietà commutativa ed associativa ed il prodotto gode delle proprietà distributive, sinistra e destra, rispetto alla somma; invece non è detto che il prodotto goda delle proprietà associativa e commutativa.

Si hanno dunque algebre associative o non associative, ed algebre commutative o non commutative; ma nell'uso ormai corrente, che qui sarà seguito, quando si dice *algebra*, senz'altro, si sottintende che si tratti di un'algebra associativa.

Come si vede facilmente, perchè i prodotti di A, definiti mediante la tavola di moltiplicazione (3), godano della proprietà associativa, occorre e basta che le n^3 costanti $\gamma_{i,j,r}$ soddisfacciano alle n^4 relazioni

$$\sum_r^{1\dots n} \gamma_{i,j,r}\,\gamma_{r,l,s} = \sum_r^{1\dots n} \gamma_{j,l,r}\,\gamma_{i,r,s} \qquad (i,j,l,s=1,\dots n). \tag{4}$$

2. E qui giova rilevar subito che per un teorema di esistenza dovuto al FROBENIUS ([5]), ove si sappia che n^3 numeri $\gamma_{i,j,r}$ di Γ soddisfanno alle n^4 relazioni (4), si può senz'altro asserire che esistono in Γ infinite algebre di ordine n ognuna delle quali può supporsi dotata di una tavola di moltiplicazione del tipo (3).

Se di codeste algebre una è quella fin qui indicata con A, un'altra è l'algebra $\overline{A}$, con gli n elementi indipendenti $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ legati fra loro dalla tavola di moltiplicazione

$$\overline{u}_i\,\overline{u}_j = \sum_r^{1\dots n} \gamma_{i,j,r}\,\overline{u}_r \qquad (i,j=1,\dots,n),$$

basta far corrispondere all'elemento x di A dato dalla (1) l'elemento $\overline{x}$ di $\overline{A}$ dato dalla

$$\overline{x} = \lambda_1\,\overline{u}_1 + \dots + \lambda_n\,\overline{u}_n, \tag{5}$$

per ottenere una trasformazione biunivoca di A in $\overline{A}$, per la quale, se agli elementi x, y di A corrispondono gli elementi $\overline{x}, \overline{y}$ di $\overline{A}$, agli elementi

$$\alpha x, \qquad x+y, \qquad xy \qquad (\alpha \text{ numero di } \Gamma)$$

([5]) G. FROBENIUS, *Theorie der hypercomplexen Grössen* (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1903, pp. 504-537), § 2.

di A corrispondono gli elementi

$$\alpha \bar{x}, \quad \bar{x} + \bar{y}, \quad \bar{x}\,\bar{y}$$

di $\bar{A}$.

Si esprime codesto fatto dicendo che A ed $\bar{A}$ sono *isomorfe* od *equivalenti*: com'è chiaro, ove differiscano, esse non sono che realizzazioni concrete diverse di un medesimo tipo di algebra astratta.

3. Quando due algebre sono equivalenti, ogni trasformazione dell'una nell'altra, atta a metterne in luce l'equivalenza, si dice un loro *isomorfismo.*

Un'algebra ammette sempre delle trasformazioni in sè stessa che riescono degli isomorfismi, o, come si dice, degli *automorfismi* (si pensi alla trasformazione identica!); il gruppo che esse evidentemente costituiscono, è ciò che si chiama il *gruppo automorfo* dell'algebra.

4. Se le costanti $\gamma_{i j, r}$ soddisfanno alle (4) e si pone

$$\gamma'_{i j, r} = \gamma_{j i, r}$$

si riscontra subito che anche le $\gamma'_{i j, r}$ sono legate da relazioni come le (4).

Ciò significa che, assegnata comunque nel corpo Γ un'algebra A, esistono nello stesso corpo delle algebre tali che, detta A' una qualunque di esse, è possibile stabilire una trasformazione biunivoca A in A' tale che, se per essa agli elementi x, y di A corrispondono gli elementi x', y' di A', agli elementi

$$\alpha x, \quad x + y, \quad xy \qquad (\alpha \text{ numero di } \Gamma)$$

di A corrispondono gli elementi

$$\alpha x', \quad x' + y', \quad y'x'$$

di A'.

Due algebre così fatte si dicono *reciproche.*

Naturalmente algebre reciproche ad una stessa sono fra di loro equivalenti.

5. Esempi di algebre nel corpo dei numeri reali sono dati dagli ordinari numeri complessi e dagli ordinari quaternioni — algebre che risultano del 2º e del 4º ordine rispettivamente.

Un esempio ulteriore e di estrema importanza per la teoria si ottiene considerando tutte le matrici di un determinato ordine p

in un corpo numerico Γ comunque assegnato e operando su di esse nei modi indicati dal così detto *calcolo delle matrici*: l'algebra che così si ottiene risulta naturalmente dell'ordine p^2, e una qualunque algebra che sia ad essa isomorfa si dice un'algebra *regolare* (in Γ, di ordine p^2).

Notisi che un'algebra regolare è reciproca di sè stessa: per accorgersene basta supporla realizzata con matrici e far corrispondere a ciascuna matrice la propria *trasposta*.

6. In un'algebra un prodotto può benissimo esser nullo senza che sia tale alcuno dei suoi *fattori*: in tal caso ciascuno di questi si dice un *divisore dello zero*.

Un elemento si dice poi *pseudonullo*, se è diverso dallo zero, ma è zero una qualche sua *potenza*, cioè un prodotto i cui fattori siano tutti eguali ad esso; e si dice *eccezionale*, se è pseudonullo ed inoltre è nullo o pseudonullo ogni prodotto nel quale esso capiti come fattore.

Può darsi infine che un'algebra A ammetta un elemento u per il quale riesce

$$ux = xu = x\ ,$$

qualunque sia x in A: in tal caso u è unico e si dice il *modulo* di A.

Occorre appena avvertire che gli elementi pseudonulli ed eccezionali sono dei particolari divisori dello zero.

7. Come in un gruppo possono esistere dei sottogruppi, così un'algebra può essere dotata di *sotto-algebra*. Precisamente un insieme B di elementi di un'algebra A si dice una *sotto-algebra* di A, se le operazioni di prodotto scalare, di somma e di prodotto eseguite su elementi di B portano ancora ad elementi di B. E si dice che B è una sotto-algebra *propria* di A, se i suoi elementi non esauriscono quelli di A.

A questo punto, per una prima conferma di un'affermazione precedente (n° 5), ricorderemo che per un bel teorema di C. S. PEIRCE: (6)

Di fronte alla relazione di equivalenza tutte le possibili algebre sono esaurite dalle sotto-algebre di quelle regolari.

(6) Cfr. le *Notes and Addenda* di C. S. PEIRCE alla memoria del padre B. PEIRCE, *Linear associative algebra* (American Journal of Mathematics, vol. IV, 1881, pp. 97-229).

In altri termini:

Ogni possibile tipo di algebra è realizzabile mediante matrici.

8. Fra i sottogruppi di un gruppo godono, com'è noto, importanza precipua quelli che alcuni dicono *invarianti*, altri *eccezionali* o *normali*: ebbene anche fra le sotto-algebre di un'algebra quelle che sopratutto interessa considerare sono le sotto-algebre *invarianti*. Con definizione, del tutto analoga a quella introdotta dal DEDEKIND per gli ideali nella teoria degli interi algebrici, si dice che B è una sotto algebra *invariante* di A, se appartengono a B tutti i prodotti del tipo ab o ba, con a in A e b in B.

9. Se un'algebra A è dotata di modulo e questo si indica con u, si dimostra che per ogni elemento a di A che non sia un divisore dello zero esiste un (unico) elemento a' per il quale riesce

$$aa' = u.$$

Ebbene a' è ciò che si dice l'*inverso* di a, e poichè da $aa' = u$ discende $a'a = u$, la relazione intercedente fra a ed a' è simmetrica.

La considerazione dell'inverso di un elemento che non sia un divisore dello zero permette di definire per quest'ultimo, al modo solito, le *potenze* con esponenti *negativi*: ma su ciò non ci occorre di insistere. Piuttosto noteremo che, mantenute per A, a ed a' le ipotesi or ora enunciate, la trasformazione di A in sè stessa che porta l'elemento corrente x di A nell'elemento $a'xa$ è un automorfismo.

Un tale automorfismo, in conformità di una nomenclatura ben nota della teoria dei gruppi, si dice *interno*.

Si verifica subito che:

In un'algebra dotata di modulo gli automorfismi interni costituiscono un sottogruppo normale del gruppo automorfo.

§ 2.

CLASSIFICAZIONE DELLE ALGEBRE

10. Ciò premesso, cerchiamo di dare un'idea precisa dei vari tipi possibili di algebre e dei teoremi fondamentali che li riguardano: se non mi inganno, quanto sarà detto sarà sufficiente per far vedere quali profonde armonie soggiacciono a questo mondo delle algebre a prima vista così turbolento.

Una prima classificazione delle algebre si ottiene badando alla presenza o meno di elementi eccezionali.

Può darsi in primo luogo che tutti gli elementi di un'algebra siano eccezionali; per il che, evidentemente, occorre e basta che essi siano tutti pseudonulli. In tal caso l'algebra si dice *pseudonulla*.

Per esempio si verifica subito che l'insieme delle matrici del tipo

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

con λ, μ, ν, variabili comunque in un corpo assegnato, è un'algebra pseudonulla, giacchè esse si riproducono per somma, per prodotto scalare e per prodotto, e inoltre, qualunque sia x, si ha $x^3 = 0$.

Può darsi come secondo caso estremo, che l'algebra sia addirittura priva di elementi eccezionali; ed allora, con denominazione che il Cartan ha trasportata in questa teoria da quella dei gruppi continui, l'algebra si dice *semi-semplice* e riesce certo — giova rilevarlo — dotata di modulo.

Può darsi infine che l'algebra non sia nè pseudonulla, nè semisemplice, cioè che possegga degli elementi eccezionali, ma che questi non la esauriscono. In tal caso, gli elementi eccezionali, insieme con lo zero, costituiscono una sotto-algebra pseudonulla invariante propria, che si dice la *sotto-algebra eccezionale.*

11. Delle tre classi di tipi ora enumerate la più importante per le applicazioni e quella più profondamente conosciuta è la seconda; giova dunque fermarsi un momento su di essa, per indicare l'ulteriore classificazione che la riguarda.

Se un'algebra possiede sotto-algebre invarianti pseudonulle, gli elementi di queste sono, per essa, tutti eccezionali; quindi un'algebra semi-semplice è certo priva di sotto-algebre invarianti pseudonulle. Non è detto per altro che essa non possa esser dotata di sotto-algebre invarianti proprie non pseudonulle; ma, in caso che anche di queste sia priva essa si dice *semplice.*

Se un'algebra possiede sotto-algebre invarianti proprie, gli elementi di queste sono per essa dei divisori dello zero; ma dunque, se un'algebra non possiede divisori dello zero, ossia è, come si dice, *primitiva,* essa è priva non solo di sotto-algebre invarianti pseudonulle, ma anche di sotto-algebre invarianti proprie; quindi è non solo semi-semplice, ma addirittura semplice.

Un altro esempio di algebre semplici è fornito dalle algebre regolari; e, come sarà mostrato fra poco da un importante teorema dello WEDDERBURN, mediante le algebre primitive e le algebre regolari possono esser costruite, nel modo che sarà chiarito, tutte le algebre semplici.

Per fissar le idee e per avere occasione di citare un celebre teorema del FROBENIUS (7), ricorderò che un'algebra primitiva nel corpo dei numeri reali non può essere che dell'ordine 1, 2 o 4; nelle prime due alternative è addirittura un corpo numerico, isomorfo, rispettivamente, a quello dei numeri reali o a quello dei numeri complessi, nella terza, essa è equivalente all'algebra degli ordinari quaternioni.

Invece si riconosce senza fatica che un'algebra primitiva nel corpo complesso è necessariamente un corpo numerico ad esso isomorfo.

§ 3.

TEOREMI DI STRUTTURA.

12. Ed ora altre due semplici definizioni e poi saremo in grado di enunciare almeno i più importanti dei teoremi di struttura che dominano la presente teoria.

Un'algebra A si dice *somma* di più altre $A_1, \ldots, A_t$, e si scrive

$$A = A_1 + \ldots + A_t, \tag{6}$$

se per ciascun elemento a di A sussiste un'eguaglianza del tipo

$$a = a_1 + \ldots + a_t, \tag{7}$$

con a_i in A_i $(i = 1, \ldots, t)$; si dice poi, più specialmente, che A è *somma diretta* di $A_1, \ldots, A_t$ e si scrive

$$A = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_t, \tag{8}$$

(7) G. FROBENIUS, *Über lineare Substitutionem und bilineare Formen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 86, 1878, pp. 1-63).

se per ciascun elemento a di A di eguaglianze come la (7) non ne sussiste che una (nel qual caso l'ordine di A è la somma degli ordini di $A_1, \ldots, A_t$) e se, inoltre, per $i \neq j$, è

$$a_i \, a_j = 0 ,$$

qualunque sia a_i in A_i e a_j in A_j.

Si dice infine che un'algebra A è *prodotto diretto* di due altre B, C, e si scrive

$$A = B \times C ,$$

se l'ordine di A è il prodotto degli ordini di B e C, se ciascun elemento di B è permutabile con ogni elemento di C e se ciascun elemento di A è combinazione lineare di prodotti del tipo bc, con b in B e c in C.

Non sempre un'algebra può pensarsi come somma diretta di più altre; in conformità di ciò le algebre si distinguono in *irriducibili* e *riducibili*, quest'ultime essendo quelle che riescono somme dirette di altre.

Com'è ben chiaro, un'algebra riducibile è sempre spezzabile in somma diretta di algebre irriducibili ed un importante teorema dello SCHEFFERS [8] assicura che:

Per un'algebra riducibile la quale sia dotata di modulo tale spezzamento non può effettuarsi che in un modo solo.

Lo HÖLDER osservò che ciò non è sempre vero per algebre riducibili prive di modulo; può dimostrarsi per altro che:

Se un'algebra riducibile è priva di modulo e in un suo spezzamento in somma diretta di algebre irriducibili compariscono delle algebre dotate di modulo, queste al variare eventuale dello spezzamento non variano [9].

Avvertasi che quando un'algebra è somma diretta di più altre, queste, come si vede facilmente, sono per essa altrettante sotto-algebre invarianti, quindi:

Le algebre semplici sono certo irriducibili.

[8] G. SCHEFFERS, *Über die Reduzibilität complexer Zahlensysteme* (Mathematische Annalen, Bd. 41, 1893, pp. 601-604).

[9] G. SCORZA, *Sulle algebre riducibili* (Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 1°, pp. 186-191).

13. Ciò posto, ecco i teoremi cui or ora si è inteso di alludere:

I) *Le algebre semplici sono tutte e solo le algebre ognuna delle quali possa pensarsi come prodotto diretto di un'algebra primitiva per un'algebra regolare;*

II) *Le algebre semi-semplici sono tutte e solo le somme dirette di algebre semplici;*

III) *Un'algebra non semi-semplice — ove il corpo nel quale è data sia finito, o infinito, ma a sotto-corpo fondamentale isomorfo al corpo razionale — o è pseudonulla, o è somma (in generale, non diretta) di un'algebra semi-semplice e della sotto-algebra eccezionale* (10).

14. A chiarimento dei teoremi ora enunciati giova osservar quanto segue.

In primo luogo non è detto che un'algebra semplice possa spezzarsi in un modo solo nel prodotto diretto di un'algebra primitiva per un'algebra regolare; può darsi che codesto spezzamento possa esser eseguito in infiniti modi diversi. Però:

Comunque si eseguisca un tale spezzamento, le algebre, primitiva e regolare, cui esso conduce sono individuate di fronte alla relazione di equivalenza.

A questo teorema che io stabilii nel 1921, lo ARTIN apportò nel 1927 un complemento assai notevole.

Fra gli spezzamenti di un'algebra semplice A in prodotti diretti del tipo $P \times R$, con P algebra primitiva ed R algebra regolare, ve ne son sempre di quelli per ciascun dei quali i moduli di P ed R coincidono col modulo di A; ebbene lo ARTIN ha dimostrato che: *se $P \times R$ e $P' \times R'$ sono due di codesti prodotti diretti esiste certo un automorfismo interno di A per il quale P va in P' ed R in R'* (11).

(10) Per il caso dei corpi reale e complesso questi teoremi furono dimostrati tutti dal CARTAN nelle sue Memorie: *Les groupes bilinéaires et les systemes de nombres complexes* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XII, 1898); i teoremi I) e II) furono estesi a corpi qualunque dallo WEDDERBURN nella sua Memoria: *On hypercomplex numbers* (Proceedings of the London Mathematical Society, s. 2, vol. 6, 1908, pp. 77-117). Quivi fu pure dato come vero per un corpo qualunque il teor. III), ma la dimostrazione non era conclusiva. Veggasi su tale proposito la mia Nota: *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. XX, 1934, pp. 65-72).

(11) Veramente il teorema dello ARTIN (cfr. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, V Band, 1927, pp. 251-260),

Notisi in secondo luogo che, per il teorema dello SCHEFFERS, un'algebra semi-semplice, ma non semplice, non può spezzarsi che in un solo modo in una somma diretta di algebre semplici; al qual proposito non è forse inutile far rilevare che:

Se un'algebra è somma diretta di t algebre semplici, le sue sotto-algebre invarianti proprie sono in tutto $2^t - 1$ e sono le dette algebre semplici e le loro somme (dirette) a due a due, a tre a tre, ..., a $t-1$ a $t-1$.

Infine a complemento del teorema III) ricorderemo che:

Se l'algebra semi-semplice di cui ivi si parla può essere determinata in più modi, essa, di fronte alla relazione di equivalenza, non muta.

15. Da quanto è stato detto fin qua si raccoglie che la determinazione di tutti i possibili tipi di algebre si riconduce a quella delle algebre primitive o pseudonulle, nonchè alla risoluzione del problema:

Assegnata un'algebra pseudonulla, costruire tutte quelle che hanno in essa la sotto-algebra eccezionale.

Per quanto riguarda la determinazione delle algebre primitive, due sono i risultati più importanti che oggi si posseggono.

Per l'uno (dovuto al BRAUER e ridimostrato anche dallo ALBERT) [12] la costruzione di tutte le algebre primitive vien ricondotta a quella delle algebre primitive aventi per ordini potenze, con esponenti pari, di numeri primi; con l'altro (ultimo frutto di ricerche dovute al DICKSON, allo WEDDERBURN, allo ALBERT, allo

riguarda una classe di algebre più ampia di quella delle algebre semplici. Esso si riferisce cioè a tutte le algebre che egli chiama *primarie* e che, secondo la nomenclatura del mio trattato, sarebbero da dire algebre con modulo e con *segnatura* del tipo (p). A proposito di che mi sia lecito avvertire che, recentemente, riprendendo le considerazioni da me svolte nel 1921 e ponendole a raffronto con quelle dello ARTIN, sono riuscito ad estendere il teorema dello ARTIN a certi spezzamenti di una *qualsiasi* algebra con modulo da me indicati nel 1921, e cioè a dare ad esso la massima estensione possibile, perchè in un'algebra priva di modulo non può parlarsi di automorfismi interni. Cfr. G. SCORZA, *Nuovi contributi alla teoria generale delle algebre* (Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. I, pp. 59-82).

(12) R. BRAUER, *Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen* (Mathematische Zeitschrift, Bd. 31, 1930, pp. 733-747); A. A. ALBERT, *On direct products* (Transactions of the American mathematical Society vol. 33, 1931, pp. 690-716).

Hasse, alla Nöther ed al Brauer) (13) la struttura delle algebre primitive nei sopracorpi algebrici del corpo razionale è stata nettamente caratterizzata.

Ben poco si conosce invece sulla struttura delle algebre pseudonulle e il problema or ora enunciato non è stato risoluto che per due casi particolari (14).

Ma su tutto ciò non possiamo insistere più oltre.

16. Piuttosto, data la sua estrema eleganza, accenneremo brevissimamente alla teoria delle *classi di algebre* dovuta al Brauer (15).

Consideriamo la totalità delle algebre semplici in un corpo Γ e poniamo in una stessa *classe* quelle che nel senso del teorema I) provengono da una medesima algebra primitiva. Se A e B sono algebre semplici *normali*, cioè tali che per ciascuna di esse un elemento riesca permutabile con tutti gli altri quando, e solo quando, sia un multiplo scalare del modulo, anche un prodotto diretto, certo esistente, del tipo $\overline{A} \times \overline{B}$, con $\overline{A}$ e $\overline{B}$ equivalenti ad A e B, riesce un'algebra semplice normale; e se A e B variano nelle classi da esse individuate, anche $\overline{A} \times \overline{B}$ varia in una classe determinata.

Ebbene, se quest'ultima classe si dice *prodotto* di quelle, si trova che:

Rispetto a tale nozione di prodotto le classi individuate dalle algebre semplici normali formano gruppo. Per codesto gruppo che riesce abeliano, l'identità è la classe delle algebre regolari; le coppie di elementi inversi sono le coppie di classi individuate da algebre reciproche; ciascun elemento del gruppo è a periodo finito; e se P è l'algebra primitiva che dà luogo alla classe costituente uno dei detti elementi, l'ordine di P è un quadrato perfetto, diciamo t^2, e il periodo dell'elemento è un divisore di t divisibile per ogni divisore primo di t.

(13) H. Hasse, R. Brauer, E. Nöther: *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 167, 1932, pp. 399-404).

(14) Cfr. G. Scorza: *a*) *Sulla struttura delle algebre pseudonulle* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. XX, 1934, pp. 143-149); *b*) *Sopra una classe di algebre pseudonulle* (Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. 70, 1934-35, pp. 196-211); *c*) *Le algebre per ognuna delle quali la sottoalgebra eccezionale è potenziale* (ibid., pp. 26-45); *d*) *Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo* (Annali di matematica, serie IV, t. XIV, 1935-36, pp. 1-14).

(15) R. Brauer, *Über Systeme hyperkomplexer Zahlen* (Mathematische Zeitschrift, Bd. 30, 1929, pp. 79-107) e loc. cit. (12); A. A. Albert: *On direct products, cyclic division algebras, and pure Riemann matrices* (Transactions of the American mathematical Society, vol. 33, 1931, pp. 219-234) e loc. cit. (12).

§ 4.

Le applicazioni della teoria delle algebre.

17. Le applicazioni più importanti della teoria delle algebre riguardano le teorie dei gruppi continui, dei gruppi di ordine finito e delle matrici di Riemann.

Sulle prime, poste in evidenza fin dal 1884 e 1889, dal Poincaré ([16]) e dallo Study, ([17]) non possiamo intrattenerci: solo ricorderemo che la grande memoria del Cartan del 1898, cui si deve una delle svolte essenziali nella storia degli argomenti che han formato oggetto di questa conferenza, rivela con lo stesso suo titolo — *Les groupes bilinéaires et les systemes de nombres complexes* — le strette relazioni intercedenti fra i gruppi continui e le algebre.

18. Per quanto riguarda la teoria dei gruppi di ordine finito basterà indicare per sommi capi come il ricorso alla teoria delle algebre permetta di svolgerne nel modo più rapido e luminoso le interessanti proprietà scoperte dal Frobenius e ricollegantisi da un lato alla nozione dei così detti *caratteri* di un gruppo, dall'altro al problema della *rappresentazione* su gruppi di sostituzioni lineari ([18]).

Siano

$$g_1, g_2, \cdots, g_n$$

gli elementi di un gruppo G di ordine n e, fissato a piacere un corpo numerico Γ, domandiamoci se sia possibile costruire in Γ

([16]) H. Poincaré, *Sur les nombres complexes* (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. XCIX, 1884, pp. 740-742).

([17]) Cfr. E. Study, *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppe* (Monatshefte für Mathematik und Physik, I Jahrgang, 1890, pp. 283-355), ove si trovano riprodotte le sue note precedenti del 1889.

([18]) G. Frobenius, *a) Über Gruppencharaktere* (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1896, pp. 985-1021); *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante* (Ibid., 1896, pp. 1343-1382 e 1903, pp. 401-409); *c) Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen* (Ibid., 1897), pp. 994-1015). Per un'esposizione di questi argomenti con l'ausilio della teoria delle algebre — la prima in ordine di tempo — vedi G. Fichera: *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari* (Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, Serie 5ª, vol. XIII).

un'algebra A di ordine n tale che per una sua base $u_1, u_2, \dots, u_n$ opportunamente scelta si abbia

$$u_i u_j = u_k \qquad (i, j = 1, \dots, n),$$

se nel gruppo G è

$$g_i g_j = g_h;$$

tale cioè che gli elementi di una sua base costituiscano rispetto all'operazione di prodotto un gruppo (oloedricamente) isomorfo a G.

La risposta, per il teorema di esistenza del FROBENIUS dianzi ricordato, è affermativa; e di fronte alla relazione di equivalenza l'algebra A è individuata dal gruppo G e dal corpo Γ.

Supponiamo, per fissare le idee, ed anche per volgere la nostra attenzione al caso più interessante, che il corpo Γ sia quello degli ordinari numeri complessi.

Allora sussiste il seguente teorema:

L'algebra A è semi-semplice ed è somma diretta di t algebre semplici, se t è il numero dei sistemi di elementi coniugati di G (19).

Poniamo, in conformità di questo enunciato,

$$A = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_t, \tag{9}$$

con le A_i algebre semplici.

Nel corpo complesso un'algebra semplice è necessariamente regolare; quindi gli ordini di $A_1, \dots, A_t$ sono dei quadrati perfetti $p_1^2, \dots, p_t^2$ ed è

$$n = p_1^2 + \dots + p_t^2.$$

Ebbene un elegantissimo ragionamento del FROBENIUS mostra che:

Ciascuno degli interi $p_1, \dots . p_t$ è un divisore di n.

(19) Se si suppone che il corpo Γ sia quello reale, l'enunciato del testo si muta in quest'altro:

Se fra i t sistemi di elementi coniugati del gruppo l (>0) è il numero di quelli che riescono bilaterali e $2m$ (≥ 0) il numero dei rimanenti, l'algebra A è somma diretta di $l + m$ algebre semplici.

Vedi: G. SCORZA, *Sulle algebre reali legate ai gruppi di ordine finito* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. IV, 1926, pp. 485-491).

19. Si consideri in A l'elemento u_i e, in conformità della (9), pongasi

$$u_i = v_1^{(i)} + \dots + v_t^{(i)},$$

con $v_j^{(i)}$ in A_j.

Poichè l'algebra A_j è regolare possiamo supporla realizzata mediante l'insieme di tutte le matrici ad elementi complessi di ordine p_j. Allora $v_j^{(i)}$ può riguardarsi come una matrice di ordine p_j e vi sarà luogo a considerarne la *traccia*, cioè la somma dei suoi elementi principali. Se questa si indica con $\psi_j^{(i)}$, mediante la A_j restano collegati agli elementi

$$u_1, \dots, u_n$$

di A, indi agli elementi

$$g_1, \dots, g_n$$

di G, gli n numeri

$$\psi_j^{(1)}, \dots, \psi_j^{(n)};$$

resta cioè definita una *funzione* ψ_j degli elementi del gruppo.

Codesta funzione è ciò che dicesi un *carattere* di G; e i t caratteri così forniti dalle algebre A_i forniscono con le loro eleganti e molteplici relazioni uno dei mezzi di ricerca più notevoli nella teoria dei gruppi.

Ancora: si considerino in A_j le matrici

$$v_j^{(1)}, \dots, v_j^{(n)},$$

eventualmente non tutte distinte, e si prendano di mira le sostituzioni lineari su p_j variabili di cui esse dànno i coefficienti.

Si riconosce subito che queste sostituzioni costituiscono un gruppo isomorfo (in generale, meriedricamente) a G.

Ebbene i t gruppi di sostituzioni che così si ottengono in corrispondenza alle t algebre A_i forniscono tutte e solo le così dette *rappresentazioni irriducibili* di G.

E per concludere ricorderò come l'applicazione di un teorema generale sui così detti *determinanti, sinistro e destro*, di un'algebra permetta di dedurre immediatamente la seguente notevolissima proposizione del FROBENIUS:

Sia data nel corpo complesso una matrice quadrata di ordine n e si supponga che gli elementi delle sue righe si deducano da quelli *di una di esse, riguardati come altrettante variabili indipendenti, applicando a questa le sostituzioni di un gruppo di ordine n. Ebbene il determinante di codesta matrice ammette t divisori irriducibili, se t è il numero dei sistemi di elementi coniugati del gruppo; i gradi di codesti divisori sono tutti dei divisori di n e nello sviluppo del determinante in prodotto di fattori irriducibili ognuno di questi vi comparisce con esponente eguale al proprio grado.*

Si ha così la più ampia generalizzazione possibile di un ben noto teorema dello SPOTTISWOODE sui circolanti.

20. E passiamo infine alle applicazioni che riguardano la teoria delle *matrici* di RIEMANN [20].

Una matrice di RIEMANN del genere p è una matrice a p righe e $2p$ colonne, le cui colonne forniscono coi loro elementi $2p$ sistemi di periodi simultanei primitivi di una funzione abeliana con p variabili indipendenti; di guisa che, in particolare, è pure una tal matrice quella costituita, dai periodi che p integrali di 1ª specie indipendenti di una curva di genere p presentano lungo $2p$ tagli normali della corrispondente superficie di RIEMANN.

Le condizioni necessarie e sufficienti, perchè la matrice

$$\omega = \begin{Vmatrix} \omega_{1,1}\,, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,, & \omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1}\,, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,, & \omega_{p,2p} \end{Vmatrix}$$

riesca una matrice di RIEMANN, sono espresse da un teorema noto già al RIEMANN ed al WEIERSTRASS, ma dimostrato per la prima volta da POINCARÉ e PICARD: da esso discende, in particolare, che la sua caratteristica è p.

Ciò porta che, fissato in un S_{2p-1} proiettivo un sistema di coordinate omogenee, possiamo riguardare gli elementi delle sue p righe come le coordinate di p punti indipendenti e congiunti, per conseguenza, da uno spazio a $p-1$ dimensioni, che diremo τ.

(20) Per quanto segue vedi G. SCORZA; *a*) *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI, 1916, pp. 263-380); *b*) *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di* RIEMANN, ibid. t. XLV, 1921, pp. 1-202). Nella memoria *a*) si troveranno poi citate tutte le mie Note precedenti sugli integrali abeliani riducibili, nonchè i lavori del ROSATI riferentisi a questi argomenti.

Ebbene le condizioni in discorso possono essere allora presentate sotto veste geometrica nel modo che segue.

In primo luogo lo spazio τ deve esser privo di punti reali, quindi indipendente dallo spazio immaginario coniugato $\overline{\tau}$; in secondo luogo deve esistere nello S_{2p-1} ambiente un sistema nullo non degenere, rappresentato, come connesso di punti, da un'equazione a coefficienti razionali, sì che in esso τ e $\overline{\tau}$ risultino spazi autopolari, nè alcuna delle rette reali appoggiate a τ e $\overline{\tau}$ appartenga al complesso lineare da esso determinato.

Ora si considerino tutte le reciprocità dello S_{2p-1} rappresentate, come connessi di punti, da equazioni a coefficienti razionali, per ognuna delle quali gli spazi τ e $\overline{\tau}$ riescano autoconiugati e si immagini di moltiplicarle a due a due. Si otterranno delle omografie trasformanti in sè τ e $\overline{\tau}$, e si riconosce facilmente che esse sono tutte e solo le omografie che godano di codesta proprietà e che siano rappresentate, come connessi di punti e iperpiani, da equazioni a coefficienti razionali. Com'è evidente, esse formano gruppo — quello, che per le sue intime relazioni con la così detta teoria della *moltiplicazione complessa* delle funzioni abeliane, ho chiamato *gruppo di moltiplicabilità* di ω — e costituiscono pure, nel corpo razionale, un sistema lineare.

Diciamo Φ codesto sistema, e Φ', Φ'' i sistemi (pure costituenti ciascuno un gruppo) che si ottengono *prolungandolo*, rispettivamente, nel corpo reale e in quello complesso, cioè facendone variare i parametri della corrispondente equazione non solo per valori razionali, ma per valori reali o, addirittura, complessi.

Se con $[\omega]$ si indica la totalità delle matrici quadrate di ordine $2p$ ad elementi razionali, ognuna delle quali possa pensarsi come matrice dei coefficienti dell'equazione di un'omografia del sistema Φ, e con $[\omega]'$, $[\omega]''$ le totalità di matrici aventi per Φ' e Φ'' il significato che $[\omega]$ ha per Φ, poichè Φ, Φ' e Φ'' sono nel tempo stesso dei sistemi lineari e dei gruppi, $[\omega]$, $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ risultano tre algebre — definite, successivamente, nei corpi razionale, reale e complesso — che ho chiamate le algebre *connesse* alla matrice ω.

Orbene, la considerazione di codeste algebre permette di dominare nel modo migliore e più luminoso le proprietà della matrice ω.

21. Poichè quest'ultime presentate in forma astratta risulterebbero per i non specialisti poco espressive e poichè esse sono suscettibili di più interpretazioni concrete diverse, secondo che ω si considera come la tabella dei periodi di una funzione abeliana con p

variabili, o delle funzioni abeliane rappresentanti parametricamente una varietà abeliana di dimensione p, o di p integrali indipendenti di 1ª specie appartenenti ad una curva di genere p o, infine, di p integrali semplici indipendenti di 1ª specie appartenenti ad una varietà algebrica di irregolarità superficiale p, supponiamo per fissar le idee che ω si riferisca, nel senso che apparisce da quanto ora è stato detto, ad una curva C di genere p, e per non entrare in particolari troppo minuti, lasciamo da parte le algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ e limitiamoci a chiarire i legami intercedenti fra l'algebra $[\omega]$ e la curva C.

22. Come è noto, può darsi che fra gli integrali di 1ª specie di C si possano scegliere, per qualche valore di $q < p$, delle q-ple di integrali indipendenti con $2q$ periodi ridotti; può darsi, cioè, secondo una nomenclatura introdotta dal SEVERI, che C possegga dei sistemi *regolari* di integrali riducibili.

Come ebbi occasione di far rilevare fin dal 1915, la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che nello S_{2p-1} in cui giacciono τ e $\bar{\tau}$ esistano, per qualche valore di $q < p$, degli S_{2q-1} razionali (cioè rappresentati da equazioni a coefficienti razionali) appoggiati a τ e $\bar{\tau}$ secondo degli S_{q-1}.

In termini più precisi: se ogni tale spazio razionale si dice un *asse* della matrice ω, tanti sono i sistemi regolari di C quanti sono gli *assi* di ω, a ciascuno di quelli corrispondendo, in maniera determinata, uno, ed uno soltanto di questi.

Valendomi di tale osservazione, non solo potei dedurre con estrema semplicità i teoremi già noti sui sistemi regolari di integrali riducibili, ma riuscii anche a stabilirne parecchi altri che sulle possibili configurazioni della totalità di quei sistemi fecero luce completa.

Su di ciò non è adesso il caso di insistere. Solo ricorderò che le mie considerazioni condussero con tutta spontaneità a distinguere i sistemi regolari di integrali riducibili in sistemi *non isolati* o *isolati*, in quanto da esse appariva che l'asse corrispondente ad un tal sistema poteva, o non, essere approssimato da assi della sua stessa dimensione.

Ciò premesso, ecco il teorema fondamentale sulle relazioni intercedenti fra l'algebra $[\omega]$ e la curva C:

L'algebra $[\omega]$ è in ogni caso semi-semplice: è proprio semi-semplice e non semplice quando C possiede sistemi regolari isolati di integrali riducibili, è semplice se C è priva di sistemi regolari isolati, è primitiva, se C è addirittura priva di sistemi regolari.

23. Quanto alle algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ sono anch'esse in ogni caso semi-semplici; ma non starò ad indicare le maggiori precisazioni che le riguardano — sarebbero necessarie ulteriori premesse e forse ho già abusato della pazienza di chi mi ascolta.

Mi basti dire che il legame stabilito dai teoremi in discorso fra la teoria delle algebre e quella delle matrici riemanniane, da una parte, mi ha condotto per queste matrici a risultati interessanti — per es. a introdurre per esse la nozione di *rango* e a risolvere il non facile problema della determinazione delle funzioni abeliane non singolari a moltiplicazione complessa, — dall'altra, mi ha suggerito qualcuno dei complementi che ho avuto occasione di apportare alla teoria delle algebre — quale ad es., il teorema sulle algebre semplici già ricordato.

Dirò piuttosto che il problema della determinazione di tutte le possibili matrici di RIEMANN è stato da me ricondotto a quello della determinazione delle matrici riemanniane prive di assi (o *pure*) e che quest'ultime sono state recentemente determinate dallo ALBERT e dal WEYL (21), e per concludere con un enunciato elegante e mostrare nel tempo stesso la varietà dei significati che possono essere assunti dai teoremi relativi alle matrici di RIEMANN, ricorderò che, per una bella proposizione dell'ALBERT (22), precisante due altre mie e dedotta come queste da teoremi sulle algebre:

Il numero base delle corrispondenze algebriche appartenenti ad una curva di genere p, priva di sistemi regolari di integrali riducibili, è, in ogni caso, un divisore di $2p$ (23).

(21) A. A. ALBERT, *On the construction of* RIEMANN *matrices* (Annals of Mathematics, 2a serie, vol. 35, 1934, pp. 1-28).

H, WEYL; *a*) *On Generalized Riemann matrices* (Ibid., vol. 35, 1934, pp. 714-729); *Generalized Riemann matrices and factor sets* (Ibid. vol. 37, 1936, pp. 709-745).

(22) V. la memoria di A. A. ALBERT citata in (15).

(23) A proposito del n° base di cui in questo teorema io avevo dimostrato [loc. cit. (19) *b*)] che esso era un divisore di $4p^2$ non superiore a $2p$; e che nell'ipotesi di p primo esso era 1, 2, p o $2p$.

Avvertenza (aggiunta durante la correzione delle bozze).

Come il lettore pratico di questi argomenti avrà notato, la definizione di algebra semi-semplice quivi adottata è leggermente diversa da quella del CARTAN e dello WEDDERBURN, riprodotta da me e dal DIKSON nei nostri trattati. Ciò è stato fatto per escludere dalla classe delle algebre semi-semplici le così dette *zero-algebre* del 1° ordine e rendere più snelli gli enunciati dei teoremi di struttura.