
LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

ET

LES PLANÈTES DU TYPE D'HÉCUBE

Bulletin astronomique, t. 19, p. 177-198 (mai 1902).

L'étude des solutions périodiques de la première et de la seconde sorte présente un intérêt particulier quand on suppose que les moyens mouvements sont à peu près commensurables. Ces solutions périodiques donnent, en effet, une première approximation pour les orbites des petites planètes dont le moyen mouvement est sensiblement le double de celui de Jupiter. C'est ainsi qu'à procédé M. Simonin; c'est ainsi également, tout compte fait, qu'à procédé M. Brendel dans sa *Theorie der kleinen Planeten*, où il a appliqué la méthode de Gylden; il commence, en effet, par déterminer les *termes de degré zéro*, et ces termes correspondent précisément à une solution périodique de la première sorte.

Équations du problème.

Nous négligerons les inclinaisons et l'excentricité de Jupiter. Nous supposons donc que l'orbite de Jupiter est circulaire et que la planète troublée se meut dans le plan de cette orbite. Comme d'ailleurs la masse de la planète troublée est nulle, nous sommes dans les conditions de ce qu'on appelle le *problème restreint*.

On sait qu'on doit rapporter la première planète au Soleil, et la seconde au

centre de gravité du système formé de la première planète et du Soleil. Si la première planète est la petite planète dont la masse est nulle, ce centre de gravité coïncide avec le Soleil, de sorte que les deux planètes peuvent être rapportées au Soleil.

Soit alors R une fonction égale à la masse du Soleil divisée par la distance de la petite planète au Soleil, plus la masse de Jupiter divisée par la distance de cette planète à Jupiter, moins le demi-carré de la vitesse de la petite planète.

Nous pourrions choisir les unités et l'origine du temps de telle façon que la longitude de Jupiter soit égale à t , puisque le mouvement de cet astre est supposé uniforme.

Quant aux éléments osculateurs de la planète troublée, nous désignerons par L^2 le grand axe, par $G = L\sqrt{1-e^2}$ la constante des aires, par l l'anomalie moyenne, par g la longitude du périhélie.

Nous avons alors

$$(1) \quad \frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dt}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL}, \quad \frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dg}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{dR}{dG}.$$

Comme R dépend seulement de L , G , l et $g-t$, ce qui s'écrit

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0,$$

nous sommes conduits à poser

$$F = R + G,$$

et nos équations deviennent

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = \frac{dF}{dt}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{dF}{dL}, \\ \frac{dG}{dt} = \frac{dF}{d(g-t)}, \quad \frac{d(g-t)}{dt} = -\frac{dF}{dG}. \end{array} \right.$$

Posons maintenant

$$\lambda = l + g - t, \quad \xi = \sqrt{2(L-G)} \cos(t-g), \\ \eta = \sqrt{2(L-G)} \sin(t-g);$$

j'observe que la différence

$$L dl + G d(g-t) - L d\lambda - \xi d\eta$$

est une différentielle exacte, de sorte que nos équations conserveront la forme canonique et s'écriront

$$(3) \quad \frac{dL}{dt} = \frac{dF}{d\lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dF}{dL}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}.$$

Je remarque que λ représente la différence des longitudes moyennes et que ξ et η sont de l'ordre de l'excentricité.

Quelle est la forme de la fonction F ? Nous pourrions écrire

$$F = F_0 + mF_1,$$

m étant la masse de Jupiter; on aura d'ailleurs

$$F_0 = \frac{1}{2L^2} + G = \frac{1}{2L^2} + L - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}.$$

Quant à F_1 , ce sera une fonction de L , λ , ξ et η développable suivant les puissances entières de ξ et de η et suivant les sinus et cosinus des multiples de λ .

Par raison de symétrie, F_1 ne changera pas quand on changera λ et η en $-\lambda$ et $-\eta$.

Solutions de la première sorte.

Recherchons d'abord les solutions périodiques de la première sorte. A cet effet, écrivons nos équations en faisant passer dans le second membre les termes affectés du coefficient m ; il viendra

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = m \frac{dF_1}{d\lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} + 1 - \frac{1}{L^3} = -m \frac{dF_1}{dL}, \\ \frac{d\xi}{dt} + \eta = m \frac{dF_1}{d\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} - \xi = -m \frac{dF_1}{d\eta}. \end{array} \right.$$

En première approximation, nous aurons donc

$$L = L_0 = \text{const.}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = h_0 = \frac{1}{L_0^3} - 1 = \text{const.}$$

$$\xi = \eta = 0, \quad \lambda = h_0 t.$$

Si dans les seconds membres des équations (4) nous substituons les valeurs approchées ainsi trouvées, ces seconds membres deviennent des fonctions connues de t , qui se présenteront sous la forme de séries procédant suivant les sinus ou les cosinus des multiples de $h_0 t$, avec cette circonstance que les seconds membres des équations en $\frac{dL}{dt}$ et en $\frac{d\xi}{dt}$ ne contiendront que des sinus, tandis que ceux des équations en $\frac{d\lambda}{dt}$ et en $\frac{d\eta}{dt}$ ne contiendront que des cosinus.

Ces équations (4), où les seconds membres sont regardés comme des fonctions connues de t , vont nous donner de nouvelles valeurs approchées de nos inconnues.

La première nous donne

$$(5) \quad \frac{dL}{dt} = \sum \Lambda_k \sin kh_0 t,$$

ce qui détermine L par quadrature à une constante près; nous voyons que L sera une fonction paire de t .

Il vient ensuite

$$(6) \quad \frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{1}{L^3} - 1 \right) - m \frac{dF_1}{dL}.$$

Le second membre se compose de deux termes; dans le second de ces termes qui contient m en facteur, je remplace ξ , η , L et λ par les valeurs trouvées en première approximation et j'ai ainsi pour ce second terme une fonction connue, périodique et paire de t , développable en série procédant suivant les cosinus des multiples de $h_0 t$. Quand au premier terme, qui dépend seulement de L , j'y remplace L par la valeur à laquelle vient de me conduire l'intégration de l'équation (5); j'ai encore une fonction périodique et paire de t , mais cette fonction n'est pas entièrement connue; elle le serait si L l'était, mais nous venons de voir que l'équation (4) ne peut déterminer L qu'à une constante près.

Le second membre de (6) est donc une série procédant suivant les cosinus des multiples de $h_0 t$; mais cette série n'est pas entièrement connue, car les coefficients dépendent d'un paramètre indéterminé (qui est la constante dont je viens de parler). *Nous disposerons de ce paramètre de telle sorte que le terme tout connu de la série trigonométrique qui figure dans le second membre de (6) soit égal à h_0 .* Le second membre de (6) est alors entièrement connu et nous aurons λ par une simple quadrature.

Nous voyons que $\lambda - h_0 t$ sera une fonction périodique de t , et il en sera par conséquent de même de

$$\cos \lambda = \cos h_0 t \cos(\lambda - h_0 t) \sin h_0 t \sin(\lambda - h_0 t)$$

et de $\sin \lambda$. D'ailleurs, on voit que λ est une fonction impaire de t .

Nous avons enfin les équations

$$\frac{d\xi}{dt} + \eta = m \frac{dF_1}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} - \xi = -m \frac{dF_1}{d\xi}.$$

Dans les seconds membres nous remplacerons L , λ , ξ et η par les valeurs

obtenues en première approximation et nous trouverons des équations de la forme suivante :

$$(7) \quad \frac{d\xi}{dt} + \tau_1 = \Sigma B_k \sin kh_0 t, \quad \frac{d\tau_1}{dt} - \xi = \Sigma C_k \cos kh_0 t,$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\xi = \Sigma \frac{C_k - B_k kh_0}{(kh_0)^2 - 1} \cos kh_0 t, \quad \tau_1 = \frac{C_k(kh_0) - B_k}{(kh_0)^2 - 1} \sin kh_0 t.$$

Il y aurait exception si le dénominateur s'annulait, c'est-à-dire si, pour une valeur entière n de k , on avait

$$h_0 = \pm \frac{1}{n}.$$

Si h_0 , sans être rigoureusement égal à $\frac{1}{n}$, était voisin de $\frac{1}{n}$, le dénominateur, sans s'annuler, deviendrait très petit, et il pourrait y avoir des doutes sur la convergence.

Les approximations suivantes se poursuivraient de la même manière sans qu'il y ait absolument rien à changer à ce qui précède.

On ne rencontrerait de difficulté que si h_0 était voisin de $\pm \frac{1}{n}$; comme h_0 est toujours positif (mouvement direct), il ne sera jamais voisin de $-\frac{1}{n}$; mais il pourra être voisin de $+\frac{1}{n}$ pour les planètes dites *caractéristiques*, c'est-à-dire de 1 pour les planètes du type d'Hécube, de $\frac{1}{2}$ pour les planètes du type de Hilda et de $\frac{1}{3}$ pour les planètes du type de Thulé.

Solutions de la seconde sorte.

Pour l'étude des solutions de la seconde sorte, nous choisirons une variable nouvelle ω , en posant $t = h\omega$, et nous proposerons de choisir ce coefficient constant h , qui est d'abord indéterminé, de telle façon que L , $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, ξ et τ_1 soient des fonctions périodiques de ω de période de 2π , développables en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de ω .

Nous aurons alors les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{d\omega} = mh \frac{dF_1}{d\lambda}, \quad \frac{d\lambda}{d\omega} + h \left(1 - \frac{1}{L^3} \right) = -mh \frac{dF_1}{dL}, \\ \frac{d\xi}{d\omega} + h\tau_1 = mh \frac{dF_1}{d\tau_1}, \quad \frac{d\tau_1}{d\omega} - h\xi = -mh \frac{dF_1}{d\xi}. \end{array} \right.$$

En première approximation, nous remplacerons les seconds membres par zéro et nous trouverons

$$L = L_0 = \text{const.}, \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = p \left(\frac{1}{L_0^3} - 1 \right) = q, \quad h = p, \\ \xi = \beta \cos p\omega, \quad \eta = \beta \sin p\omega,$$

p et q étant deux entiers et β une constante arbitraire quelconque.

Pour la seconde approximation, nous poserons

$$L = L_0 + \delta L, \quad \lambda = q\omega + \delta\lambda, \quad h = p + \delta h, \\ \xi = \beta \cos p\omega + \delta\xi, \quad \eta = \beta \sin p\omega + \delta\eta$$

et dans les seconds membres des équations (8) nous remplacerons les variables L, λ, h, ξ, η par leurs valeurs approchées $L_0, q\omega, p, \beta \cos p\omega, \beta \sin p\omega$. Ces seconds membres deviennent ainsi des fonctions connues de ω périodiques, dont deux sont paires et développables en séries de cosinus et deux impaires développables en séries de sinus. Nous avons ainsi d'abord

$$(9) \quad \frac{d\delta L}{d\omega} = \Sigma A_n \sin n\omega,$$

d'où l'on déduit par quadrature δL , à une constante près.

Quant aux deux dernières équations (8), elles s'écrivent

$$\frac{d\xi}{d\omega} + h\eta = \frac{d(\beta \cos p\omega + \delta\xi)}{d\omega} + (p + \delta h)(\beta \sin p\omega + \delta\eta) = \Sigma C_n \sin n\omega, \\ \frac{d\eta}{d\omega} - h\xi = \frac{d(\beta \sin p\omega + \delta\eta)}{d\omega} - (p + \delta h)(\beta \cos p\omega + \delta\xi) = \Sigma D_n \cos n\omega.$$

Les corrections $\delta h, \delta\xi, \delta\eta$ sont de l'ordre de m ; si donc nous négligeons m^2 , nous pourrions négliger les produits $\delta h \delta\eta, \delta h \delta\xi$ et nos équations s'écriront

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d\delta\xi}{d\omega} + p\delta\eta + \beta \sin p\omega \delta h = \Sigma C_n \sin n\omega, \\ \frac{d\delta\eta}{d\omega} - p\delta\xi - \beta \cos p\omega \delta h = \Sigma D_n \cos n\omega. \end{cases}$$

L'intégration de ces équations est immédiate et nous donne

$$\delta h = \frac{C_p - D_p}{2p}, \quad \delta\xi = \sum \frac{n C_n - p D_n}{p^2 - n^2} \cos n\omega + \gamma \cos p\omega, \\ \delta\eta = \frac{C_p + D_p}{2p} \sin p\omega + \sum \frac{p C_n - n D_n}{p^2 - n^2} \sin n\omega + \gamma \sin p\omega.$$

Sous le signe Σ , on doit donner à n toutes les valeurs entières, sauf la valeur p . Quant à γ , c'est une constante d'intégration que l'on peut supposer nulle, car elle fait double emploi avec la constante β .

Nous avons ensuite

$$\frac{d\delta\lambda}{d\omega} = (p + \delta h) \left[\frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} - 1 \right] - p \left(\frac{1}{L^3} - 1 \right) - m \frac{dF_1}{dL}.$$

Je rappelle que, dans la dérivée de F_1 , les variables sont remplacées par leurs valeurs approchées.

D'autre part, en négligeant m^2 , et par conséquent $\delta h \delta L$ et δL^2 , je puis écrire

$$(p + \delta h) \left[\frac{1}{(L_0 + \delta L)^3} - 1 \right] - p \left(\frac{1}{L^3} - 1 \right) = \delta h \left(\frac{1}{L_0^3} - 1 \right) \frac{3p \delta L}{L_0^4},$$

d'où

$$(11) \quad \frac{d\delta\lambda}{d\omega} = \delta h \left(\frac{1}{L_0^3} - 1 \right) - \frac{3p \delta L}{L_0^4} - m \frac{dF_1}{dL} = \Sigma E_n \cos n\omega.$$

Les coefficients E_n seraient entièrement connus si δL était entièrement connu, mais δL n'a été déterminé qu'à une distance près; les coefficients E_n dépendent donc de cette constante que l'on choisira de façon que E_0 soit nul. Ce choix étant ainsi fait, les E_n sont connus et l'on trouve $\delta\lambda$ par quadrature.

En troisième approximation, on tiendra compte de m^2 , mais on négligera m^3 ; soient L, λ, h, ξ, η les valeurs obtenues en seconde approximation; et soient $L + \delta L, \lambda + \delta\lambda, h + \delta h, \xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta$ les valeurs exactes aux quantités près de l'ordre de m^3 que nous cherchons à déterminer.

Dans les premiers membres des équations (8) nous remplacerons donc L, λ, h, ξ, η par $L + \delta L, \lambda + \delta\lambda, h + \delta h, \xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta$. Dans les seconds membres, au contraire, nous pourrions négliger $\delta L, \delta\lambda, \delta h, \delta\xi, \delta\eta$, de sorte que ces seconds membres seront des fonctions connues de ω .

Nous avons d'abord pour déterminer δL une équation analogue à (9) qui se traitera de la même manière; puis nous avons

$$\frac{d(\xi + \delta\xi)}{d\omega} + (h + \delta h)(\eta + \delta\eta) = mh \frac{dF_1}{d\eta}$$

ou, en négligeant $\delta h \delta\eta$, qui est de l'ordre de m^4 ,

$$\frac{d\delta\xi}{d\omega} + \eta \delta h + h \delta\eta = mh \frac{dF_1}{d\eta} - h\eta.$$

Le second membre est de la forme $\Sigma C_n \sin n\omega$.

D'autre part, je puis négliger $(\eta - \beta \sin p\omega) \delta h$ et $(h - p) \delta\eta$, puisque $\eta - \beta \sin p\omega$ et $h - p$ sont de l'ordre de m , et que δh et $\delta\eta$ sont de l'ordre de m^2 . Notre équation devient donc

$$\frac{d\delta\xi}{d\omega} + p \delta\eta + \beta \sin p\omega \delta h = \Sigma C_n \sin n\omega,$$

et nous avons de même

$$\frac{d \delta \eta}{d \omega} - p \delta \xi - \beta \cos p \omega \delta h = \Sigma D_n \sin n \omega.$$

Ces équations étant de même forme que les équations (10) se traiteront de la même manière. Nous déterminerions enfin $\delta \lambda$ par une équation qui serait de la forme (11).

Il y a cependant un cas où il pourrait y avoir une difficulté.

Nous avons trouvé plus haut

$$(12) \quad \delta h = \frac{C_p - D_p}{\beta}$$

Cette formule deviendrait illusoire si β était nul, et même si β était très petit la convergence des développements pourrait être compromise. On retrouve d'ailleurs à chaque approximation des équations de la forme (10), de sorte qu'il faut chaque fois calculer une nouvelle correction δh par une formule de la forme (12), de sorte que la même difficulté se représentera chaque fois.

On pourrait donc craindre que la méthode ne fût pas applicable au cas où β (et par conséquent l'excentricité) est une petite quantité. Mais nous observons que, si l'on fait $\beta = 0$, on retombe précisément sur les solutions de la première sorte que nous venons d'étudier; or nous venons de voir que ces solutions existent toujours, sauf peut-être pour les planètes caractéristiques.

Le cas des planètes caractéristiques est celui où le rapport $\frac{p}{q}$ est entier. Si donc $\frac{p}{q}$ est commensurable sans être entier, nous sommes certains que la difficulté se dissipera d'elle-même, c'est-à-dire que $C_p - D_p$ s'annulant en même temps que β , la correction δh restera finie. C'est ce qu'il est aisé d'ailleurs de constater pour les premières approximations. Si au contraire $\frac{p}{q}$ est entier (p entier, $q = 1$), la méthode peut se trouver en défaut, et nous allons voir ce que deviennent dans ce cas nos solutions périodiques.

Raccordement des deux sortes de solutions.

On peut représenter schématiquement les résultats obtenus par une figure.

Supposons que nous représentions chaque solution périodique par un point défini de la façon suivante. Nous pouvons toujours choisir pour origine des

temps l'instant où les deux planètes sont en conjonction symétrique. A ce moment on a :

$$\lambda = \eta = 0.$$

Prenons alors pour abscisse la valeur de L à cet instant et pour ordonnée la valeur de ξ ; nous aurons un point qui pourra être regardé comme représentant la solution périodique.

Les solutions de la première sorte seront représentées par les arcs de courbe AB , $GHKL$ et RS . La courbe est interrompue entre B et G et entre L et S ; nous avons vu en effet que la méthode est en défaut quand h_0 est voisin de $\frac{1}{n}$. Nous ne savons alors ce que deviennent les solutions de la première sorte;

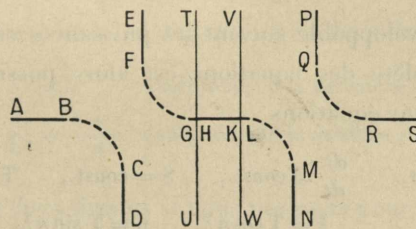


Fig. 1.

j'ai donc représenté deux interruptions correspondant, par exemple, l'une aux planètes du type d'Hécube, l'autre aux planètes du type de Hilda.

Représentons maintenant les solutions de la seconde sorte; à chaque système de nombres entiers p et q correspondra une courbe représentant une série de solutions de la seconde sorte. J'ai tracé quatre courbes, à savoir $EFCD$ correspondant à $\frac{p}{q} = 1$ (type d'Hécube). THU correspondant à $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, VKW correspondant à $\frac{p}{q} = \frac{5}{3}$, et enfin $PQMN$ correspondant à $\frac{p}{q} = 2$ (type de Hilda). Comme nous avons vu que les solutions de la seconde sorte correspondant aux valeurs entières de $\frac{p}{q}$ n'existent plus pour les petites valeurs de β , j'ai interrompu la première courbe entre F et C , et la dernière entre Q et M . Au contraire, les deux autres courbes THU et VKW , qui ne correspondent pas à des planètes caractéristiques, ne sont pas interrompues et viennent croiser la courbe $GHKL$ en H et en K .

Comment se raccordent les courbes EF , GH , AB , CD , PQ , RS , KL , MN ?

Il est probable que c'est par de petits arcs de courbe BC, FG, QR, LM, tels que ceux que j'ai représentés en trait pointillé. Cette prévision est confirmée par l'application de la méthode Delaunay, dont l'approximation est évidemment suffisante pour résoudre une question qualitative de ce genre.

Supposons que dans la fonction F nous conservions seulement les termes à longue période. Pour les planètes caractéristiques, telles que le rapport des moyens mouvements soit voisin de $\frac{n+1}{n}$, ces termes à longue période seront de la forme $(\xi \cos n\lambda + \eta \sin n\lambda)^p$, de sorte qu'après la suppression des termes à courte période F ne dépende plus que de

$$L, \quad S = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}, \quad T = \xi \cos n\lambda + \eta \sin n\lambda.$$

D'ailleurs F est développable suivant les puissances entières de S et de T.

L'intégration complète des équations est alors possible et les solutions périodiques auront pour équations

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \text{const.}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \text{const.}, \quad S = \text{const.}, \quad T = \text{const.}, \\ \xi = T \cos n\lambda, \quad \eta = T \sin n\lambda, \end{array} \right.$$

les valeurs constantes de L, S et T étant données par les équations

$$(14) \quad F = \text{const.}, \quad nT \frac{dF}{dL} = T \frac{dF}{dS} + \frac{dF}{dT}, \quad S = \frac{T^2}{2}.$$

On trouve, en effet, que les équations (3) deviennent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = n \frac{dF}{dT} (-\xi \sin n\lambda + n \cos n\lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dF}{dL}, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{dS} \eta + \frac{dF}{dT} \sin n\lambda, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{dS} \xi - \frac{dF}{dT} \cos n\lambda \end{array} \right.$$

et sont satisfaites par les valeurs (13) et (14).

Que deviennent alors nos courbes? Au moment de la conjonction symétrique, on a

$$\lambda = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi = T.$$

Il faut donc construire la courbe

$$nT \frac{dF}{dL} = T \frac{dF}{dS} + \frac{dF}{dT}$$

en prenant L et T pour coordonnées et en remplaçant S par $\frac{T^2}{2}$.

Si nous arrêtons le développement de F_1 aux termes du premier degré par rapport aux excentricités, nous aurons

$$F = \frac{1}{2L^2} + L - S + m(A + BT),$$

A et B étant des fonctions de L, et par conséquent

$$\frac{dF}{dL} = 1 - \frac{1}{L^3} + m(A' + B'T), \quad \frac{dF}{dS} = -1, \quad \frac{dF}{dT} = mB,$$

A' et B' étant les dérivées des fonctions A et B.

Notre équation s'écrira alors

$$T \left[n \left(1 - \frac{1}{L^3} \right) + 1 \right] + m[nB'T^2 + nA'T - B] = 0.$$

Pour $m = 0$, cette courbe se décompose en deux droites :

$$T = 0 \quad (\text{solutions de la première sorte}).$$

$$\frac{1}{L^3} = \frac{n+1}{n} \quad (\text{solutions de la seconde sorte}).$$

Ce seraient encore deux droites si nous prenions pour coordonnées non plus T et L, mais T et $\frac{1}{L^3}$.

Si m n'est pas nul, mais très petit, nous aurons des courbes s'écartant peu de ces droites, et pour nous rendre compte de la forme de ces courbes, le mieux est de prendre pour coordonnées T et $\frac{1}{L^3}$ et de négliger mT^2 . La courbe se réduit alors à une hyperbole équilatère. D'où nous devons conclure que la forme générale des courbes est bien celle qui a été représentée sur la figure. On voit que ce sont les solutions de la seconde sorte qui sont la continuation analytique de celles de la première sorte, et inversement.

Cas des planètes caractéristiques.

Je voudrais maintenant montrer comment on peut, avec une approximation indéfinie, déterminer les solutions périodiques correspondant aux parties pointillées de nos courbes, c'est-à-dire aux planètes caractéristiques.

Nous allons développer, non plus suivant les puissances de m , mais suivant celles de \sqrt{m} , de sorte que nous dirons qu'un terme est d'ordre p quand il contiendra en facteur $m^{\frac{p}{2}}$. Nous devons, d'autre part, distinguer le rang et

l'ordre, car certains termes, étant à longue période, seront plus importants que les autres termes du même ordre et aussi importants que les termes d'ordre moindre.

Pour les termes qui figurent dans le développement des deux inconnues L, λ , et pour ceux qui figurent dans les développements des seconds membres des deux équations (8), qui donnent $\frac{dL}{dt}$ et $\frac{d\lambda}{dt}$, *le rang sera égal à l'ordre*.

Passons maintenant aux développements de ξ , de η ou des seconds membres des deux équations (8) qui donnent $\frac{d\xi}{dt}$ et $\frac{d\eta}{dt}$.

Ici je dois distinguer; je suppose que le rapport des moyens mouvements soit voisin de $\frac{n+1}{n}$, je poserai $t = h\omega$, h étant une constante voisine de n que je déterminerai plus complètement dans la suite, et je prendrai ω comme variable.

Mes seconds membres, contiendront alors des termes en $\cos p\omega$ ou $\sin p\omega$, p étant un entier. Pour ceux des termes où p n'est pas égal à n , *le rang sera encore égal à l'ordre*.

Considérons maintenant les termes en $\cos n\omega$ et $\sin n\omega$, et soient

$$(16) \quad C \sin n\omega, \quad D \cos n\omega$$

deux termes de même ordre figurant respectivement dans les seconds membres de la troisième et de la quatrième équation (8). Nous décomposerons ces termes et nous les regarderons comme formés chacun de la somme de deux autres, à savoir

$$(17) \quad \frac{C+D}{2} \sin n\omega, \quad \frac{C+D}{2} \cos n\omega$$

et

$$(18) \quad \frac{C-D}{2} \sin n\omega, \quad \frac{D-C}{2} \cos n\omega.$$

Pour les termes (17), le rang sera encore égal à l'ordre, mais pour les termes (18) le rang sera égal à l'ordre diminué d'une unité.

Ces définitions posées, nous allons procéder à l'intégration. En première approximation, nous remplaçons les seconds membres des équations (8) par zéro et nous trouvons

$$L = L_0 = \text{const.}, \quad \frac{d\lambda}{d\omega} = h \left(\frac{1}{L_0^3} - 1 \right) = 1, \quad h = p, \quad \xi = \eta = 0.$$

Pour la seconde approximation, je remplace dans les seconds membres toutes les variables par leurs valeurs approchées; ces seconds membres deviennent

$$m \Sigma A_p \sin p \omega, \quad m \Sigma B_p \cos p \omega, \quad m \Sigma C_p \sin p \omega, \quad m \Sigma D_p \cos p \omega,$$

les A, B, C, D étant des coefficients connus. Tous ces termes sont du second ordre, puisque nous avons $m = (\sqrt{m})^2$ en facteur.

Mais nous conserverons seulement les termes de rang 1, de sorte que ces seconds membres se réduiront respectivement à

$$0, \quad 0, \quad m \sin n \omega \frac{C_n - D_n}{2}, \quad m \cos n \omega \frac{D_n - C_n}{2}.$$

Nos équations (8) deviendront ainsi

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{dL}{d\omega} = 0, & \frac{d\lambda}{d\omega} + h \left(1 - \frac{1}{L^3} \right) = 0, \\ \frac{d\xi}{d\omega} + h \eta = m \sin n \omega \frac{C_n - D_n}{2}, & \frac{d\eta}{d\omega} - h \xi = m \cos n \omega \frac{D_n - C_n}{2}, \end{cases}$$

Intégrons d'abord les deux dernières équations (19); nous trouverons

$$\xi = \beta \sqrt{m} \cos n \omega, \quad \eta = \beta \sqrt{m} \sin n \omega, \quad h = n + \sqrt{m} \frac{C_n - D_n}{2\beta}.$$

Quant aux deux premières, elles me donnent

$$(20) \quad \begin{cases} L = L_1 = \text{const.} \\ \frac{d\lambda}{d\omega} = h \left(\frac{1}{L^3} - 1 \right) = \left(n + \sqrt{m} \frac{C_n - D_n}{2\beta} \right) \left(\frac{1}{L_1^3} - 1 \right) = 1. \end{cases}$$

On voit que β est une constante arbitraire d'intégration et que L_1 est une nouvelle constante peu différente de L_0 et déterminée par la dernière équation (20).

Passons maintenant à la troisième approximation.

Je désigne par L, λ , ξ , η , h les valeurs de nos inconnues obtenues en deuxième approximation, et par $L + \delta L$, $\lambda + \delta \lambda$, $\xi + \delta \xi$, $\eta + \delta \eta$, $h + \delta h$ les valeurs en troisième approximation. Nos équations (8) deviennent alors (en laissant de côté la seconde équation)

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{d \delta L}{d\omega} = m h \frac{dF_1}{d\lambda}, & \frac{d \delta \xi}{d\omega} + h \delta \eta + \eta \delta h = m h \frac{dF_1}{d\eta} - \frac{d\xi}{d\omega} - h \eta, \\ \frac{d \delta \eta}{d\omega} - h \delta \xi - \xi \delta h = -m h \frac{dF_1}{d\xi} - \frac{d\eta}{d\omega} + h \xi. \end{cases}$$

J'ai négligé, bien entendu, les produits $\delta\xi \delta h$, $\delta\eta \delta h$. Les seconds membres des équations (21) sont des fonctions connues de ω de la forme

$$\begin{aligned} m \Sigma A_p \sin p \omega + m \sqrt{m} \Sigma A'_p \sin p \omega, \\ m \Sigma C_p \sin p \omega + m \sqrt{m} \Sigma C'_p \sin p \omega, \\ m \Sigma D_p \cos p \omega + m \sqrt{m} \Sigma D'_p \cos p \omega. \end{aligned}$$

Ces termes sont d'ordre 2 et 3, les termes d'ordre 4 étant laissés de côté.

Les coefficients C_p et D_p ne sont naturellement pas les mêmes que tout à l'heure.

Nous avons satisfait en deuxième approximation à nos équations (8) aux termes près de rang 2, en tenant compte des termes de rang 1. Cela veut dire que, si l'on fait $\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0$, les équations (21) seront satisfaites aux termes près de rang 2; c'est-à-dire encore que les seconds membres de ces équations ne contiendront plus de termes de rang 1.

On aura donc

$$C_n = D_n,$$

sans quoi nous aurions des termes de rang 1

$$m \frac{C_n - D_n}{2} \sin n \omega, \quad m \frac{D_n - C_n}{2} \cos n \omega,$$

Nous conserverons seulement les termes de rang 2, de sorte que nos seconds membres se réduiront à

$$\begin{aligned} m \Sigma A_p \sin p \omega, \quad m \Sigma C_p \sin p \omega + m \sqrt{m} \frac{C'_n - D'_n}{2} \sin n \omega, \\ m \Sigma D_p \cos p \omega + m \sqrt{m} \frac{D'_n - C'_n}{2} \cos n \omega. \end{aligned}$$

D'autre part, dans les premiers membres des équations (21) nous pouvons négliger

$$(h - n) \delta\xi, \quad (h - n) \delta\eta,$$

qui sont de rang 3, de sorte que nos équations s'écrivent

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{d \delta\xi}{d\omega} + n \delta\eta + \beta \sqrt{m} \sin n \omega \delta h = m \Sigma C_p \sin p \omega + m \sqrt{m} \frac{C'_n - D'_n}{2} \sin n \omega, \\ \frac{d \delta\eta}{d\omega} - n \delta\xi - \beta \sqrt{m} \cos n \omega \delta h = m \Sigma D_p \cos p \omega + m \sqrt{m} \frac{D'_n - C'_n}{2} \cos n \omega, \end{cases}$$

et que nous trouverons (en nous rappelant que $C_n = D_n$),

$$\begin{aligned} \delta h &= \frac{m}{\beta} \frac{C'_n - D'_n}{2}, \quad \delta\xi = m \Sigma \frac{p C_p - n D_p}{n^2 - p^2} \cos p \omega + \gamma m \cos n \omega, \\ \delta\eta &= m \Sigma \frac{n C_p - p D_p}{n^2 - p^2} \sin p \omega + \frac{m}{n} C_n \sin n \omega + \gamma m \sin n \omega, \end{aligned}$$

où sous le signe Σ , on donne à p toutes les valeurs entières sauf n , et où λ est une constante arbitraire d'intégration qui, faisant double emploi avec β , pourra être supposée nulle.

La première équation (21) nous donnera ensuite δL à une constante près, et la seconde équation (8) nous donnera

$$\frac{d\delta\lambda}{d\omega} = \Sigma B_p \cos p\omega,$$

où les coefficients B_p ne seront pas entièrement connus, mais dépendront encore de la constante additive arbitraire dont dépend δL . On déterminera cette constante de façon que B_0 soit nul et, les coefficients B étant désormais entièrement connus, on aura δL par quadrature.

Il est à peine nécessaire de parler de la quatrième approximation, pour laquelle on procéderait comme pour la troisième. Soient L, λ, ξ, η, h les valeurs des inconnues en troisième approximation; soient $L + \delta L, \dots$ leurs valeurs en quatrième approximation. On remplacera les variables par leurs valeurs approchées L, λ, \dots , dans les seconds membres des équations (8) et par les valeurs $L + \delta L, \dots$ dans les premiers membres. On obtiendra ainsi des équations de la forme (21). Les seconds membres seront des fonctions connues de ω dont tous les termes seront au plus de rang 3; on y retiendra seulement, d'ailleurs, les termes de rang 3.

Dans les premiers membres nous pourrions négliger $(h - n) \delta\xi, (h - n) \delta\eta$, et aussi $(\eta - \beta\sqrt{m} \sin n\omega) \delta h, (\xi - \beta\sqrt{m} \cos n\omega) \delta h$, qui sont de rang 4.

Nous retomberons ainsi sur des équations de la forme (22) avec cette différence que, dans les seconds membres, les coefficients $m\sqrt{m}$ devront être remplacés par $m\sqrt{m}$ et m^2 . D'ailleurs on aura encore $C_n = D_n$, puisque nos seconds membres ne doivent pas contenir de termes de rang 2.

L'intégration se ferait donc comme celle des équations (22), et l'on déterminerait ensuite δL et $\delta\lambda$ comme dans la troisième approximation.

On voit que, dans les solutions que nous venons d'étudier, ξ, η et la différence $\frac{1}{L^3} - \frac{n+1}{n}$ sont de l'ordre de \sqrt{m} . Si ξ et η étaient très petits par rapport à \sqrt{m} la différence $\frac{1}{L^3} - \frac{n+1}{n}$ serait grande par rapport à \sqrt{m} et l'on pourrait appliquer les méthodes relatives aux solutions de la première sorte. Si au contraire, $\frac{1}{L^3} - \frac{n+1}{n}$ était petit par rapport à \sqrt{m} , ξ et η seraient grands par rapport à \sqrt{m} et l'on pourrait appliquer les méthodes relatives aux solutions de la seconde sorte. On ne sera donc jamais pris au dépourvu.

Comparaison avec les résultats de M. Brendel.

M. Brendel, dans sa *Theorie der Kleinen Planeten*, a étudié également ces solutions périodiques. Il est arrivé, page 126, à des équations qu'il appelle (273)

$$\beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0, \quad p = -\frac{2\delta + p'_1}{6\mu}, \quad q = -\frac{p_1}{6\mu}$$

dont je vais expliquer la signification.

On désigne par μ le rapport des moyens mouvements *osculateurs* dans les orbites absolues, et par μ_1 le rapport des moyens mouvements *moyens*. Pour les planètes du type d'Hécube, μ et μ_1 sont très voisins de $\frac{1}{2}$, de sorte que l'on peut poser

$$\mu = \frac{1 - \delta}{2}, \quad \mu_1 = \frac{1 - \delta_1}{2},$$

δ et δ_1 étant très petits.

Quant à β_1 , c'est un coefficient qui correspond à peu près à celui que nous avons appelé β dans l'étude des solutions de la seconde sorte, et $\beta\sqrt{m}$ dans l'étude des planètes caractéristiques; il est à peu près égal à la valeur initiale de ξ au moment de la conjonction symétrique.

Pour p'_1 et p_1 ce sont des coefficients qui dépendent de μ et de diverses variables, mais qui, variant peu dans le voisinage de la valeur critique $\mu = \frac{1}{2}$, pourront, dans la discussion qui va suivre, être regardés comme constants.

M. Brendel arrive aux équations qu'il appelle (267) et (269) et où je néglige δ_1^2 ; elles s'écrivent

$$(2\delta_1 + p'_1)\beta_1 = -p_1, \quad \delta_1 = \delta - 3\mu\beta_1^2,$$

d'où (273) se déduit immédiatement.

Nous pourrions dans le voisinage de la valeur critique faire $\mu = \frac{1}{2}$ de telle façon que l'équation (273) s'écrive

$$\beta_1^3 - \frac{2}{3}\delta\beta_1 - \frac{p'_1\beta}{3} - \frac{p_1}{3} = 0.$$

Si nous regardons β_1 et δ comme des coordonnées planes d'un point, si d'autre part nous continuons à considérer p_1 et p'_1 comme des constantes, c'est là l'équation d'une courbe du troisième degré.

Au lieu de tracer graphiquement cette courbe, M. Brendel a préféré construire un petit tableau numérique qui se trouve page 128.

J'ai représenté sur la figure cette courbe du troisième degré en ABC, DEF. Le tableau de M. Brendel ne comprend que les arcs BC et ED marqués en trait plein. Il saute brusquement du point B au point E. Ces deux points B et E sont sur une même droite perpendiculaire à l'axe des δ et tangente à la courbe en E.

On voit facilement ce saut brusque sur le tableau, où à la valeur 8, 1670 de $\log \delta$ on voit correspondre les deux valeurs 593,3 et 603,8 de n_1 ; 9,09 n et 8,79 de $\log \beta_1$.

Les droites perpendiculaires à l'axe des δ coupent la courbe en un point si elles sont à droite de BE, et en trois points si elles sont à gauche. Les droites perpendiculaires à l'axe des β_1 la coupent en un point.

Si, passant à la limite, on fait $m = 0$, p_1 et p'_1 s'annulent et la courbe se

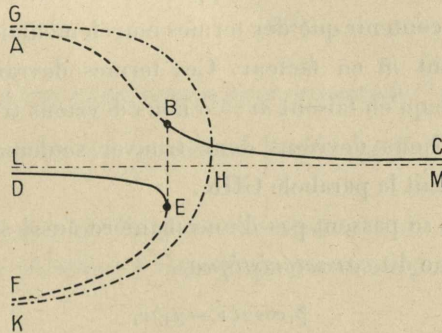


Fig. 2.

décompose en une droite $\beta_1 = 0$ et une parabole $\beta_1^2 = 4\delta$. Cette droite et cette parabole sont représentées en trait mixte sur la figure en LHM et GHK.

Ce résultat peut paraître étrange au premier abord; il est clair, en effet, que la droite LHM correspond aux solutions de la première sorte, qui pour $m = 0$ se réduisent à des orbites circulaires, et que la parabole GHK correspond aux solutions de la seconde sorte, qui pour $m = 0$ se réduisent à des orbites elliptiques ayant toutes même grand axe et même moyen mouvement — 2.

Mais si μ et δ dépendent seulement du moyen mouvement osculateur, on pourrait croire que, ce moyen mouvement étant le même pour toutes ces orbites, la valeur de δ doit être aussi la même pour toutes ces orbites, de sorte que la courbe GHK devrait se réduire à une droite.

Il importe d'expliquer la raison de cette anomalie.

Soient r et v les coordonnées polaires de la planète. Soient a et n le grand

axe et l'excentricité de cette planète dans son *orbite absolue*, c'est-à-dire ce grand axe et cette excentricité réduits à leurs *termes élémentaires*, c'est-à-dire aux termes constants ou périodiques de leurs développements dont le coefficient ne contient pas m en facteur. Dans ces conditions a est une constante. On pose ensuite

$$r = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \rho}.$$

C'est avec cette constante a que l'on calcule le moyen mouvement n à l'aide de la troisième loi de Képler $n^2 a^3 = 1$, et μ est égal à $\frac{1}{n}$, le moyen mouvement de Jupiter étant pris pour unité.

Dans l'étude de ce qu'il appelle les *termes de degré zéro*, c'est-à-dire des solutions périodiques, M. Brendel suppose $\eta = 0$. Il semblerait donc que l'excentricité ne doit contenir que des termes non élémentaires, c'est-à-dire dont le coefficient contient m en facteur. Ces termes devraient donc s'annuler pour $m = 0$, de sorte qu'en faisant $m = 0$ nous devrions trouver seulement des orbites circulaires. Nous devrions donc trouver seulement la droite LHM, mais rien n'expliquerait la parabole GHK.

Mais les choses ne se passent pas d'une manière aussi simple : l'expression de ρ contient un terme dit *caractéristique*

$$\beta_1 \cos 2(1 - \mu_1)\nu,$$

et β_1 est de la forme

$$\beta_1 = \frac{m\alpha}{\delta_1},$$

α étant fini

Qu'est-ce maintenant que η^2 ? C'est la partie élémentaire de l'expression

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\nu}\right)^2,$$

c'est-à-dire ce que devient cette expression quand on y supprime tous les termes qui contiennent m en facteur. Si l'on borne ρ au terme caractéristique, il vient

$$(23) \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\nu}\right)^2 = \frac{m^2 \alpha^2}{\delta_1^2} \left[\frac{1}{2} + 2(1 - \mu_1)^2 \right] + \frac{m^2 \alpha^2}{\delta_1^2} \left[\frac{1}{2} - 2(1 - \mu_1)^2 \right] \cos 4(1 - \mu_1)\nu.$$

Si nous regardons δ_1 comme une constante différente de zéro, aucun de ces termes n'est élémentaire; c'est le point de vue auquel s'est placé M. Brendel. Quand, δ_1 restant constant, on fait tendre m vers zéro, l'expression (23) tend aussi vers zéro. C'est à ce point de vue que l'on peut dire que η est nul.

Mais, si maintenant je fais tendre simultanément δ_1 et m vers zéro, si je pose par exemple $\delta_1 = \gamma m$, γ étant fini, alors à la limite on aura $\delta_1 = 0$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$ et

$$(\rho)^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma^2}.$$

Comme nous avons supposé, avec M. Brendel, $\eta = 0$, nous avons, en réduisant ρ à son terme caractéristique

$$r = \frac{a}{1 + \rho} = \frac{a}{1 + \beta_1 \cos 2(1 - \mu_1)v} = \frac{a}{1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cos 2(1 - \mu_1)v}$$

ou à la limite, pour $m = 0$,

$$r = \frac{a}{1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cos v}.$$

C'est l'équation d'une ellipse qui a pour excentricité $\frac{\alpha}{\gamma}$ et pour grand axe non pas a , mais $\frac{a}{1 - \frac{\alpha}{\gamma^2}}$. Dans ces conditions l'orbite réelle tend vers une ellipse,

tandis que l'orbite absolue, toujours circulaire, tend vers un cercle qui non seulement n'est pas identique à cette ellipse, mais n'a pas même grand axe que cette ellipse.

Toutes ces ellipses limites correspondent aux divers points de la parabole GHK. Elles ont toutes même grand axe, mais les orbites absolues correspondantes n'ont pas toutes même grand axe; la valeur de μ ou de δ n'est donc pas la même pour toutes ces ellipses, et c'est pour cela que la courbe GHK ne se réduit pas à une droite.

Ainsi donc, quand m tend vers zéro, ce n'est pas la quantité μ qui tend vers le rapport des moyens mouvements des deux orbites képlériennes, c'est la quantité μ_1 . Si donc, au lieu de prendre pour coordonnées β_1 et δ , nous avons pris β_1 et δ_1 , notre courbe GHK serait devenue une droite et la courbe du troisième degré serait devenue une hyperbole équilatère.

Donc l'anomalie provient simplement de ce qu'il y a d'un peu vague et flou dans la définition de l'orbite absolue et, par conséquent, dans celle des quantités a , μ et δ .

Si l'on fait attention à ces points, on verra que les résultats de M. Brendel sont en parfait accord avec les miens. Je dois cependant faire une réserve. M. Brendel croit avoir expliqué de cette manière l'existence de *lacunes* dans

la série des petites planètes. *Cette opinion n'est pas fondée.* Son tableau montre en effet une lacune dans les valeurs de δ_1 et sur la figure ce saut brusque se produit quand on saute du point B au point E; δ_1 saute alors de la valeur δ_1^0 à la valeur δ_1^1 . Cela veut-il dire qu'il ne saurait y avoir de petites planètes pour lesquelles δ_1 prendrait une valeur comprise entre δ_1^0 et δ_1^1 ? Nullement; il pourrait en exister qui correspondraient aux parties pointillées de la courbe. Mais M. Brendel, pour dresser son tableau, a supprimé ces parties pointillées. *C'est cette amputation arbitraire qui a créé la lacune.* Pourquoi a-t-elle été faite aux points B et E plutôt qu'ailleurs? C'est parce que le point E est le point de contact d'une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées. C'est donc le choix des coordonnées qui a déterminé le choix du point E. Or ce choix dépend lui-même de la définition de δ et de a , et nous venons de voir justement combien cette définition est vague et artificielle.
