Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:
Zbigniew Nahorski
Marian Chudy
Andrzej Straszak

OPTYMALIZACJA

Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

OPTYMALIZACJA

ZADANIA, METODY, ALGORYTMY

Redaktorzy

Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak

WARSZAWA 1991

OPTYMALIZACJA
Zadania, metody, algorytmy
PTBOiS, Warszawa 1991.

AGREGACJA ZADAŃ HARMONOGRAMOWANIA PRZY WYSTĘPOWANIU OGRANICZEŃ NA WIELKOŚĆ PORCJI PRODUKCYJNYCH [1]

Krzysztof Pieńkosz
Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej
ul. Nowowiejska 15/19, 00-665 Warszawa

Streszczenie: W pracy jest rozważane zadanie harmonogramowania, w którym należy wyznaczyć wielkości i terminy produkcji poszczególnych wyrobów tak, aby zaspokoić zapotrzebowania klientów oraz zminimalizować koszty związane z produkcją, przezbrojeniami oraz magazynowaniem. Formułowane są modele zagregowane dla zadań, w których występują ograniczenia na wielkość porcji produkcyjnych. W stosowanych dotychczas uproszczonych modelach zagregowanych ograniczenia takie nie były uwzględniane mimo, że w praktyce są one często istotne.

1. Zadanie harmonogramowania produkcji

W pracy rozważany jest problem harmonogramowania produkcji w systemie, w którym jednostki wytwórcze mogą w danej chwili czasu produkować tylko jeden typ wyrobów. Zmiana rodzaju wytwarzanych wyrobów wymaga przezbrojenia maszyn, co pochłania pewne koszty oraz czas. Produkcja realizowana jest więc porcjami - przez określony przedział czasu jest wytwarzana pewna porcja jednego typu wyrobów, po czym następuje przezbrojenie, produkowana jest porcja następnego typu wyrobów itd.. Zadanie harmonogramowania, którym będziemy się zajmować, polega na wyznaczeniu wielkości porcji wyrobów oraz określeniu terminów rozpoczęcia ich produkcji tak, aby - przy ograniczonych środkach wytwórczych - zaspokoić zapotrzebowania klientów oraz minimalizować koszty związane z produkcją, przezbrojeniami oraz magazynowaniem. Niech $N = \{1, \ldots, T\}$ będzie zbiorem wszystkich wyrobów wytwarzanych w systemie, R - zbiorem zasobów wymaganych do produkcji, natomiast N_k spełniające $\bigcup_{k \in K} N_k = N$ oznacza rozłączne rodziny produktów, które ze względu na podobieństwo nie wymagają przezbrojeń między sobą. Bazując na klasycznym sformułowaniu, model matematyczny tego zadania można zapisać następująco:

Problem P

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{k \in K} S_{kt} V_k(t) + \sum_{i=1}^{n} (c_{it} x_i(t) + h_{it} I_i(t)) \right] \tag{1}$$

[1] Praca częściowo finansowana przez MEN

przy ograniczeniach

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \qquad (2)$$

$$x_i(t) \le MV_k(t), \quad V_k(t) \in \{0,1\} \qquad i \in N_k; k \in K; t = 1, \ldots, T \qquad (3)$$

$$\sum_{k \in K} E_{krt} V_k(t) + \sum_{i=1}^{n} p_{irt} x_i(t) \le Q_{rt} \qquad r \in R; t = 1, \ldots, T \qquad (4)$$

$$0 \le x_i(t) \le \hat{x}_{it} \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T \qquad (5)$$

$$0 \le I_i(t) \qquad i \in N; t = 1, \ldots, T-1 \qquad (6)$$

$$I_i(0) = 0, \quad I_i(T) = 0 \qquad i \in N \qquad (7)$$

W modelu P rozpatruje się T okresów decyzyjnych. Zmiennymi decyzyjnymi są: $x_i(t)$ - wielkość produkcji wyrobu i w okresie t; $I_i(t)$ - stan zapasu produktu i na koniec okresu t; $V_k(t)$ - zmienna binarna określająca okresy, w których występują przezbrojenia. W zadaniu uwzględnia się tylko główne przezbrojenia - między wyrobami różnych grup N_k - przyjmując, że koszty i czasy przezbrojeń przy zmianie produktów z tej samej grupy są pomijalne. Ponadto zakłada się, że okresy decyzyjne są długie w porównaniu z czasem wytwarzania poszczególnych porcji wyrobów i w związku z tym przezbrojenia występują w każdym okresie, w którym produkowane są wyroby danej rodziny, tzn. $V_k(t)$ jest równe jeden wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i \in N_k} x_i(t) > 0$. Parametrami zadania są: S_{kt} - koszt wznawiania produkcji wyrobów z rodziny k w okresie t; c_{it} - jednostkowy koszt produkcji wyrobów; h_{it} - jednostkowy koszt magazynowania; d_{it} - zapotrzebowanie na produkt i w okresie t; E_{krt} - wielkość zasobu r wymagana przy wznawianiu produkcji wyrobów z rodziny k w okresie t; p_{irt} - współczynnik zużycia zasobu r na jednostkę wyrobu i w okresie t; Q_{rt} - łączna dostępność zasobu r w okresie t; $\hat{x}_{it}$ - maksymalna dopuszczalna wielkość porcji produkcyjnej wyrobu i w okresie t; $M = \sum_{i \in N} \hat{x}_{it}$.

Problem P jest zadaniem programowania binarnego, które w rzeczywistych przypadkach osiąga bardzo duże wymiary wynikające z liczby wyrobów wytwarzanych w systemie oraz liczby rozpatrywanych okresów decyzyjnych. Pod względem strukturalnej złożoności jest to problem $\mathcal{NP}$-trudny (patrz np. [3]). W praktyce przemysłowej okazuje się, że wiele wyrobów charakteryzuje się bardzo dużym podobieństwem technologicznym, różniąc się między sobą jedynie drobnymi detalami, np. wykończeniem, wyposażeniem, kolorem itp.. Fakt ten w naturalny sposób skłania do traktowania ich w sposób łączny i zachęca do agregacji problemu. Warto jednak pamiętać, że agregacja wiąże się często utratą pewnej części informacji i przez to może prowadzić do zbyt daleko idących uproszczeń. Istotne jest więc stosowanie właściwych metod agregacji. W szczególności należy dążyć do tego, aby modele zagregowane były *równoważne* modelom pierwotnym tzn. gwarantowały uzyskanie optymalnego rozwiązania problemu pierwotnego z optymalnego rozwiązania problemu zagregowanego. Dotychczas równoważne modele zagregowane udało się sformułować dla zadań, w których zmienne $x_i(t)$ nie są ograniczone od góry [2,4] oraz gdy zmienne $I_i(t)$ są ograniczone niezerowymi wartościami od dołu [7] i od góry [6]. W niniejszej pracy zajmiemy się poszukiwaniem równoważnych modeli zagregowanych dla problemu P.

2. Agregacja problemu

Dla uproszczenia będziemy zakładać, że w idealnym przypadku podobieństwo wyrobów wyraża się równością współczynników c_{it}, h_{it}, p_{irt}, tzn.

$$c_{it} = C_{kt},\ h_{it} = H_{kt},\ p_{irt} = P_{krt} \qquad \forall i \in N_k. \tag{8}$$

W praktyce wymagane jest aby współczynniki te miały jak najbardziej zbliżone wartości. Od stopnia ich podobieństwa zależy dokładność uzyskiwanych wyników.

Sumując ograniczenia problemu P odpowiadające poszczególnym rodzinom produktów podobnych N_k, $k \in K$ i wprowadzając zmienne zagregowane

$$X_k(t) = \sum_{i \in N_k} x_i(t), \quad F_k(t) = \sum_{i \in N_k} I_i(t) \qquad k \in K;\ t = 1, \ldots, T \tag{9}$$

otrzymujemy przy założeniu (8) model zagregowany postaci

Problem A1

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k \in K} (S_{kt} V_k(t) + C_{kt} X_k(t) + H_{kt} F_k(t)) \tag{10}$$

przy ograniczeniach

$$F_k(t-1) + X_k(t) - F_k(t) = D_{kt} \qquad k \in K: t = 1, \ldots, T \tag{11}$$

$$X_k(t) \le M V_k(t), \quad V_k(t) \in \{0,1\} \qquad k \in K: t = 1, \ldots, T \tag{12}$$

$$\sum_{k \in K} (E_{krt} V_k(t) + P_{krt} X_k(t)) \le Q_{rt} \qquad r \in R: t = 1, \ldots, T \tag{13}$$

$$0 \le X_k(t) \le \hat{X}_{kt} \qquad k \in K: t = 1, \ldots, T \tag{14}$$

$$0 \le F_k(t) \qquad k \in K: t = 1, \ldots, T-1 \tag{15}$$

$$F_k(0) = 0, \quad F_k(T) = 0 \qquad k \in K \tag{16}$$

przy czym $D_{kt} = \sum_{i \in N_k} d_{it}$, $\hat{X}_{kt} = \sum_{i \in N_k} \hat{x}_{it}$.

Problem $A1$ ma taką samą strukturę ograniczeń jak problem pierwotny P, ale występuje w nim mniej zmiennych i ograniczeń. Może być rozwiązywany jednym ze znanych z literatury algorytmów [1]. Każde rozwiązanie dopuszczalne problemu P jest przekształcane przez odwzorowanie (9) w rozwiązanie dopuszczalne problemu $A1$

dając taką samą wartość funkcji celu. Aby zdezagregować rozwiązanie problemu $A1$ należy dla każdego $k \in K$ znaleźć rozwiązanie dopuszczalne następującego podproblemu

Podproblem DP_k, $k \in K$

$$I_i(t-1) + x_i(t) - I_i(t) = d_{it} \qquad i \in N_k; t = 1, \ldots, T \tag{17}$$

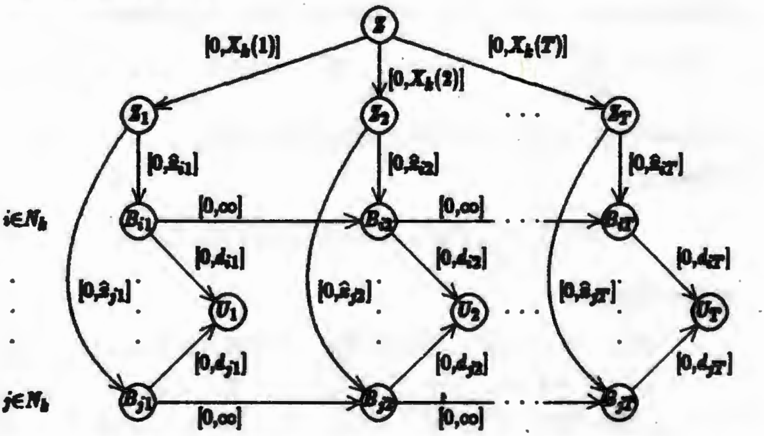
$$0 \le x_i(t) \le \hat{x}_{it} \qquad i \in N_k; t = 1, \ldots, T \tag{18}$$

$$0 \le I_i(t) \qquad i \in N_k; t = 1, \ldots, T-1 \tag{19}$$

$$I_i(0) = 0, \ I_i(T) = 0 \qquad i \in N_k \tag{20}$$

$$\sum_{i \in N_k} x_i(t) = X_k(t) \qquad t = 1, \ldots, T \tag{21}$$

Rozwiązanie to można uzyskać np. znajdując maksymalny przepływ w następującej sieci dezagregacji SD_k



Rys. 1: Sieć dezagregacji SD_k dla podproblemu DP_k. W nawiasach kwadratowych podano dolne i górne ograniczenia przepływów łukowych.

W powyższej sieci łuki (Z_t, B_{it}), $(B_{it}, B_{i,t+1})$, (B_{it}, U_t) reprezentują odpowiednio zmienne $x_i(t), I_i(t)$ oraz zapotrzebowania d_{it}. Z kolei wierzchołki B_{it} odpowiadają ograniczeniom (17), natomiast wierzchołki Z_t ograniczeniom (21). Podproblem DP_k ma rozwiązanie dopuszczalne wtedy i tylko wtedy, gdy maksymalny przepływ w sieci SD_k osiąga wartość $\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in N_k} d_{it} = \sum_{t=1}^{T} D_{kt} = \sum_{t=1}^{T} X_k(t)$. Przepływ ten określa wówczas rozwiązanie zdezagregowane.

Będziemy mówili, że rozwiązanie problemu zagregowanego można zdezagregować jeżeli każdy z podproblemów DP_k, $k \in K$ ma rozwiązanie dopuszczalne. Okazuje się, że w przypadku modelu $A1$ mogą pojawiać się rozwiązania zagregowane, których nie można zdezagregować, co pokazuje poniższy prosty przykład. Fakt ten w istotny sposób ogranicza użyteczność modelu $A1$.

Przykład Rozważmy problem harmonogramowania produkcji 2 wyrobów podobnych w 2 okresach decyzyjnych: $T = 2$, $N = N_1 = \{1,2\}$. Wielkość produkcji każdego z wyrobów jest ograniczona do 30 jednostek w obu okresach, czyli $\hat{x}_{it} = 30$ dla $i = 1,2$, $t = 1,2$. Zapotrzebowania na wyroby są następujące: $d_{11} = 20$, $d_{12} = 20$, $d_{21} = 10$, $d_{22} = 10$. Dla uproszczenia przykładu pomijamy tutaj ograniczenia zasobowe (4). W wyniku agregacji otrzymujemy zadanie, w którym: $\hat{X}_{11} = 60$, $\hat{X}_{12} = 60$, $D_{11} = 30$, $D_{12} = 30$. Zauważmy, że rozwiązanie $X_1(1) = 60$, $X_1(2) = 0$ jest dopuszczalne dla problemu $A1$, ale nie można go zdezagregować.

3. Warunki konieczne i dostateczne dopuszczalnej dezagregacji

W tym rozdziale sformułujemy warunki gwarantujące możliwość dezagregacji rozwiązań problemu $A1$. Oznaczmy sybolem $\mathcal{L}_t$ zbiór $\{1,\ldots,t\}$. Można łatwo pokazać, że zachodzi następująca właściwość.

Lemat 1 *Każde rozwiązanie dopuszczalne problemu P spełnia warunek*

$$\sum_{\tau\in L} x_i(\tau) \geq \max_{t\in\mathcal{L}_T}(0, \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau} - \sum_{\tau\in\mathcal{L}_t\setminus L} \hat{x}_{i\tau}) \quad \forall\, (i \in N; L \subset \mathcal{L}_T; L \neq \emptyset).$$

Dowód. Dla dowolnych $i \in N, L \subset \mathcal{L}_T$ i każdego rozwiązania dopuszczalnego problemu P zachodzi oczywiście $\sum_{\tau\in L} x_i(\tau) \geq 0$. Po zsumowaniu ograniczeń (2) dla $\tau = 1,\ldots,t$ mamy $\sum_{\tau=1}^{t} x_i(\tau) - I_i(t) = \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau}$. Z (5) i (6) wynika więc

$$\sum_{\tau\in\mathcal{L}_t\cap L} x_i(\tau) + \sum_{\tau\in\mathcal{L}_t\setminus L} \hat{x}_{i\tau} \geq \sum_{\tau=1}^{t} x_i(\tau) \geq \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau} \quad \text{a zatem}$$

$$\sum_{\tau\in L} x_i(\tau) \geq \sum_{\tau\in\mathcal{L}_t\cap L} x_i(\tau) \geq \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau} - \sum_{\tau\in\mathcal{L}_t\setminus L} \hat{x}_{i\tau}. \quad \square$$

Przypuśćmy, że rozwiązanie dopuszczalne $(X_k(t), F_k(t), V_k(t))_{k\in K, t=1,\ldots,T}$ problemu $A1$ można zdezagregować w dopuszczalne rozwiązanie problemu P. Ponieważ $X_k(t) = \sum_{i\in N_k} x_i(t)$, więc z lematu 1 wynika, że rozwiązanie zagregowane musi spełniać warunek

$$\sum_{\tau\in L} X_k(\tau) \geq \sum_{i\in N_k} \max_{t\in\mathcal{L}_T}(0, \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau} - \sum_{\tau\in\mathcal{L}_t\setminus L} \hat{x}_{i\tau}) \quad k \in K; L \subset \mathcal{L}_T; L \neq \emptyset \tag{22}$$

Okazuje się, że (22) jest nie tylko warunkiem koniecznym, ale również dostatecznym dopuszczalnej dezagregacji.

Twierdzenie 1 *Rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu $A1$ można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) problemu P wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (22).*

Dowód. Konieczność warunku (22) wynika z lematu 1 i zależności (9). Dla dowodu dostateczności załóżmy, że istnieje rozwiązanie dopuszczalne problemu $A1$ spełniające warunek (22), ale nie dające się zdezagregować. Oznacza to, że istnieje $k \in K$, dla którego wartość maksymalnego przepływu w sieci SD_k (rys.1) jest mniejsza od $\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in N_k} d_{it}$, czyli dla pewnego zbioru produktów $J \subseteq N_k$ przepływ w niektórych łukach (B_{it}, U_t) jest mniejszy niż d_{it}. Niech E oznacza zbiór łuków sieci SD_k, $\hat{f}(e), e \in E$ przepustowość łuków, natomiast $f(e), e \in E$ niech będzie maksymalnym przepływem między wierzchołkiem Z i ujściami U_t, $t = 1, \ldots, T$. Dla przepływu f wyznaczmy minimalny przekrój (patrz [5]) definiując podzbiór wierzchołków W sieci SD_k, z których istnieją ścieżki powiększające do ujść U_t, tj.

- $\forall_{t=1,\ldots,T}\ U_t \in W$,
- jeżeli $v \in W$ oraz $(u, v) \in E$ i $f(u, v) < \hat{f}(u, v)$, to $u \in W$;
  jeżeli $v \in W$ oraz $(v, u) \in E$ i $f(v, u) > 0$, to $u \in W$.

Dla produktów $i \in J^* = \{j \mid j \in N_k$, istnieje $B_{jt} \in W\}$ określmy $s_i = \max(t \mid B_{it} \in W)$. Zauważmy, że dla $i \in J^*$ mamy $f(B_{i,s_i}, B_{i,s_i+1}) = 0$, gdyż albo $s_i = T$, albo $B_{i,s_i+1} \notin W$. Zatem spełnione są następujące zależności

$\sum_{\tau=1}^{s_i} f(Z_\tau, B_{i\tau}) < \sum_{\tau=1}^{s_i} d_{i\tau}$ dla $i \in J$ oraz

$\sum_{\tau=1}^{s_i} f(Z_\tau, B_{i\tau}) = \sum_{\tau=1}^{s_i} d_{i\tau}$ dla $i \in J^* \setminus J$.

Niech $L = \{t \mid Z_t \in W\}$. Zauważmy, że zachodzi

(a) $f(Z_t, B_{it}) = \hat{f}(Z_t, B_{it}) = \hat{x}_{it}$ dla $i \in J^*$ i $t \in \mathcal{L}_{s_i} \setminus L$,

(b) $f(Z_t, B_{it}) = 0$ dla $i \in N_k \setminus J^*$ i $t \in L$ oraz dla $i \in J^*$ i $t \in L, t > s_i$.

Wynika to z definicji zbioru W oraz z faktu, że w przypadku (a) $Z_t \notin W$ a $B_{it} \in W$ bo $B_{is_i} \in W$ i łuki $(B_{i\tau}, B_{i,\tau+1}), \tau = 1, \ldots, s_i - 1$ mają nieograniczone przepustowości, natomiast w przypadku (b) $B_{it} \notin W$ a $Z_t \in W$. Zatem

$$\sum_{i \in N_k} \sum_{\tau \in L} f(Z_\tau, B_{i\tau}) = \sum_{i \in J^*} \sum_{\tau \in \mathcal{L}_{s_i} \cap L} f(Z_\tau, B_{i\tau}) < \sum_{i \in J^*} \Big(\sum_{\tau=1}^{s_i} d_{i\tau} - \sum_{\tau \in \mathcal{L}_{s_i} \setminus L} \hat{x}_{i\tau} \Big)$$

Dla $t \in L$ zachodzi $\sum_{i \in N_k} f(Z_t, B_{it}) = f(Z, Z_t) = \hat{f}(Z, Z_t) = X_k(t)$ gdyż $Z_t \in W$, ale $Z \notin W$ bo f jest przepływem maksymalnym. W rezultacie mamy

$$\sum_{\tau \in L} X_k(t) < \sum_{i \in J^*} \Big(\sum_{\tau=1}^{s_i} d_{i\tau} - \sum_{\tau \in \mathcal{L}_{s_i} \setminus L} \hat{x}_{i\tau} \Big) < \sum_{i \in N_k} \max_{t \in \mathcal{L}_T} \Big(0, \sum_{\tau=1}^{t} d_{i\tau} - \sum_{\tau \in \mathcal{L}_t \setminus L} \hat{x}_{i\tau} \Big)$$

co przy $L \subset \mathcal{L}_T$ przeczy założeniu że rozwiązanie $X_k(t)$ spełnia warunek (22), a przy $L = \mathcal{L}_T$ przeczy założeniu, że $X_k(t)$ jest dopuszczalne (dla $L = \mathcal{L}_T$ prawa strona powyższej nierówności jest równa $\sum_{i \in N_k} \sum_{\tau=1}^{T} d_{i\tau} = \sum_{\tau=1}^{T} D_{k\tau}$).

Jeżeli spełniony jest warunek (22), to z (8) wynika ponadto, że optymalne rozwiązanie problemu $A1$ jest dezagregowane w optymalne rozwiązanie problemu P. □

4. Równoważny model zagregowany

Na podstawie twierdzenia 1 możemy zaproponować model zagregowany równoważny problemowi P. Model taki oprócz ograniczeń problemu $A1$ musi zawierać dodatkowo ograniczenia (22).

Problem A2

min (10) przy ograniczeniach
(11),(12),(13),(14),(15),(16) i (22)

Podstawową zaletą modelu $A2$ jest fakt, że każde jego rozwiązanie dopuszczalne można zdezagregować w rozwiązanie dopuszczalne problemu P. Co więcej, optymalne rozwiązanie problemu $A2$ jest zawsze dezagregowane w optymalne rozwiązanie problemu P. Istotną wadą modelu $A2$ jest jego wymiarowość. Chociaż uzyskano redukcję liczby zmiennych, to jednak pojawiło się bardzo dużo nowych ograniczeń (22) - ich liczba w ogólnym przypadku zależy w sposób wykładniczy od liczby okresów T. Duża część tych ograniczeń bywa często redundancyjna, ale mimo wszystko jest ich na tyle dużo, że model $A2$ nie nadaje się raczej do bezpośredniego zastosowania. Jego praktyczne znaczenie polega na tym, że stanowiąc pełny opis równoważnego modelu zagregowanego jest źródłem wielu cennych informacji, które mogą być w różnorodny sposób wykorzystywane w procesie konstrukcji modelu zagregowanego, jego rozwiązywania i dezagregacji. Na przykład, na podstawie modelu $A2$ można z góry przewidzieć wartości niektórych zmiennych $V_k(t)$ i wykorzystać to podczas harmonogramowania. Zauważmy bowiem, że nierówności (22) dla $L = \{t\}$, $t = 1, \ldots, T$ wyznaczają dolne ograniczenia dla zmiennych $X_k(t)$. Jeżeli ograniczenia te są dodatnie to zmienne binarne $V_k(t)$ muszą być równe 1. Ponadto wykorzystując fakt, że tylko niektóre z ograniczeń (22) są zwykle aktywne dla rozwiązania optymalnego problemu $A2$, można zaproponować iteracyjny schemat agregacji. W tym celu, zamiast uwzględniać od razu wszystkie ograniczenia (22), zastosujemy następujący algorytm rozwiązywania.

1. Utwórz model A będący relaksacją problemu $A2$ powstałą w wyniku pominięcia ograniczeń (22), czyli utwórz model A postaci $A1$.
2. Rozwiąż problem A.
   - Jeżeli problem A jest niedopuszczalny to również problem $A2$ a zatem i P są niedopuszczalne; KONIEC.
   - Jeżeli uzyskano rozwiązanie dopuszczalne i można je zdezagregować to w efekcie uzyskujemy optymalne rozwiązanie problemu P; KONIEC.
   - Jeżeli uzyskano rozwiązanie dopuszczalne, ale nie można go zdezagregować, idź do 3.
3. Określ, które z ograniczeń (22) jest naruszone przez rozwiązanie problemu A, a następnie zmodyfikuj problem A dołączając do niego to ograniczenie. Idź do 2.

Przedstawiony schemat rozwiązywania może wymagać w praktyce uwzględnienia tylko niewielkiej liczby ograniczeń (22). Aby w kroku 3 uniknąć przeszukiwania wszystkich ograniczeń (22) warto wkomponować tę operację w proces dezagregacji realizowany w kroku 2. Dezagregację można przeprowadzić np. znajdując maksymalny przepływ w sieciach SD_k, $k \in K$ (rys.1) wariantem algorytmu Forda-Fulkersona [5], w którym przy zwiększaniu przepływu, w pierwszej kolejności są "nasycane" łuki (B_{i1}, U_1), potem (B_{i2}, U_2), itd.. W chwili gdy pewnego łuku (B_{it}, U_t) nie udaje się nasycić, czyli dezagregacja jest niemożliwa, to podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1 wyznaczany jest zbiór L, dla którego nie jest spełnione ograniczenie (22).

5. Uwagi końcowe

Należy zaznaczyć, że rezultaty przedstawione w pracy można bezpośrednio przenieść także na zadania harmonogramowania, w których stan początkowy $I_i(0)$ oraz dolne ograniczenia na poziom zapasów są większe od zera. W tym celu wystarczy zregularyzować ograniczenia problemu (patrz [7]) i dokonać prostej transformacji liniowej zmiennych $I_i(t)$. Warto też wspomnieć, że problem P można przekształcić do równoważnej postaci, w której zachodzi $d_{it} \le \hat{x}_{it}$ dla każdego $i \in N, t = 1, \ldots, T$ co pokazano w pracy [3]. Dla takiego przypadku upraszczają się nieco warunki dopuszczalnej dezagregacji (22).

Literatura

[1] Bahl H.C., Ritzman L.P., Gupta J.N.D.: Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review, *Operations Research* 35 (1987), 329-345.

[2] Bitran G.R., Haas E.A., Hax A.C.: Hierarchical Production Planning: A Single Stage System, *Operations Research* 29 (1981), 717-743.

[3] Bitran G.R., Yanasse H.H.: Computational Complexity of the Capacitated Lot Size Problem, *Management Science* 28 (1982), 1174-1186.

[4] Erschler J., Fontan G., Merce C.: Consistency of the Disaggregation Process in Hierarchical Planning, *Operations Research* 34 (1986), 464-469.

[5] Ford L.R., Fulkerson D.R.: *Przepływy w sieciach*, PWN, Warszawa, 1969.

[6] Pieńkosz K., Toczyłowski E.: Warunki idealnej dezagregacji wyrobów w systemach jednostopniowych z ograniczonymi magazynami, *Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka* 100 (1990), 223-231.

[7] Toczyłowski E.: On Aggregation of Items in the Single-Stage Lot Size Scheduling Problem, *Large Scale Systems* 10 (1986), 157-164.

ISBN 83-900412-1-9