

Polskie Towarzystwo Badań  
Operacyjnych i Systemowych  
Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk  
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:  
Zbigniew Nahorski  
Marian Chudy  
Andrzej Straszak



Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO  
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH  
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

# O P T Y M A L I Z A C J A

ZADANIA, METODY, ALGORYTMY

Redaktorzy

*Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak*

WARSZAWA 1991

PROBABILISTYCZNY MODEL FUNKCJONOWANIA (Q,r) BUFORA

Romuald Hoffmann  
Zespół Informatyki Wojsk Lotniczych  
60-929 Poznań, skr. poczt. 506

Streszczenie:

Omówiono zasadę pracy (Q,r) bufora z dopuszczeniem utraty napływających danych w wyniku przepełnienia bufora. Sformuowano probabilistyczny model funkcjonowania (Q,r) bufora. Na podstawie modelu wyznaczono podstawowe probabilistyczne charakterystyki pracy bufora, takie jak: graniczne współczynniki gotowości bufora do przyjęcia danych oraz graniczne średnie zapewnienie pamięci (Q,r) bufora.

1. Wprowadzenie

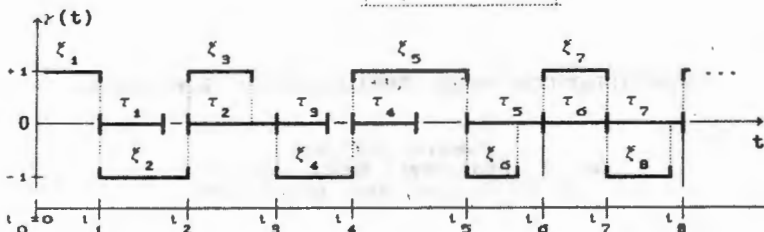
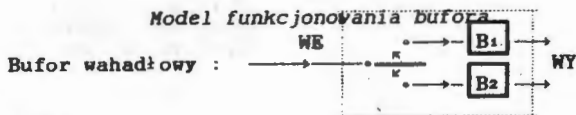
Zanim przystąpimy do zasadniczego toku rozważań rozpatrzmy na początek następujący przykład.

Przykład. Bufor wahadłowy. (Q,Q) bufor.

Rozpatrzmy pewien układ dwubuforowy (rys. 1), składający się z dwóch buforów B<sub>1</sub> i B<sub>2</sub>, zorganizowany na zasadzie buforowania wahadłowego.

Niech w chwili t=0 bufor B<sub>1</sub> i B<sub>2</sub> będą puste i mają ustaloną długość. Niech zmienne losowe  $\zeta_j, j \geq 1$ , będą kolejnymi czasami zapełniania na zmianę buforów B<sub>1</sub> i B<sub>2</sub>. Przy czym  $\zeta_{2j-1}, j \geq 1$ , będą czasami zapełniania bufora B<sub>1</sub> a  $\zeta_{2j}, j \geq 1$  - bufora B<sub>2</sub>. Ponadto przez  $\tau_j, j \geq 1$ , oznaczymy kolejne czasy opróżniania na przemian buforów B<sub>1</sub> i B<sub>2</sub> ( tzn.  $\tau_{2j-1}, j \geq 1$ , czasy opróżniania bufora B<sub>1</sub> a  $\tau_{2j}, j \geq 1$ , czasy opróżniania bufora B<sub>2</sub>). W przypadku, gdy obydwa bufor B<sub>1</sub> i B<sub>2</sub> będą zapełnione to napływające dane do tych buforów będą odrzucane (tracone).

Chwile  $t_k, k \geq 1$ , z rys.1 wyrażają się następującymi wzorami:  $t_1 = \zeta_1$ ,  $t_{k+1} = t_k + \max\{\zeta_{k+1}, \tau_k\}, k \geq 1$ . Chwile  $t_k, k \geq 1$ , są momentami rozpoczęcia wydawania informacji z bufora wahadłowego (rozpoczęcia opróżniania jednego z buforów B<sub>1</sub> lub B<sub>2</sub>). Opróżniany bufor B<sub>1</sub> lub B<sub>2</sub> zostaje zwalniany tylko w tym momencie kiedy zostanie wydany ostatni segment danych.



$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy w chwili } t \text{ zapełniany jest bufor } B_1, \\ -1 & \text{gdy w chwili } t \text{ zapełniany jest bufor } B_2, t \geq 0. \\ 0 & \text{gdy żaden z buforów nie jest zapełniany.} \end{cases}$$

Rys.1. Ilustracja funkcjonowania bufora wahadłowego.

Jeżeli bufor  $B_1$  będzie miał pojemność  $Q$  miejsc (segmentów pamięci) a bufor  $B_2$  - pojemność  $r=Q$  miejsc to bufor wahadłowy omówiony w tym przykładzie stanowiłby przykład  $(Q,r)$  bufora.

Zastanówmy się jak będzie przebiegał proces wprowadzania i wyprowadzania danych z  $(Q,r)$  bufora. Całkowita pojemność  $(Q,r)$  bufora wynosi  $Q+r$  ( $Q \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $Q \geq r$ ). Napływające dane do bufora mają postać niepodzielnych segmentów o ustalonej wielkości. Dane z bufora są wyprowadzane porcjami o wielkości  $Q$  segmentów. Opróżniany obszar bufora zostaje zwalniany tylko w tym momencie kiedy zostanie wyprowadzony ostatni segment danych. Na rys.2 jest przedstawiona przykładowa realizacja procesu zapełniania i opróżniania  $(Q,r)$  bufora.

Oznaczmy przez  $u_j, j \geq 1$ , odcinek czasu między sąsiednimi chwilami pojawienia się (wprowadzenia) kolejnych segmentów informacji w  $(Q,r)$  buforze. Niech  $z(t)$  oznacza ilość niesapełnionych segmentów  $(Q,r)$  bufora w chwili  $t \geq 0$  a  $v(t)$  - ilość utraconych zgłoszeń napływających danych do bufora do chwili  $t \geq 0$ .



Model funkcjonowania bufora

gdzie

$$t_1 = \begin{cases} \sum_{j=1}^{z(0)-r} u_j & \text{gdy } z(0) > r, \\ \max \left\{ \sum_{j=1}^{z(0)} u_j, \tau_0 \right\} + \zeta^0 + \sum_{j=2}^{Q-r} u_{j+z(0)+\nu_0} & \text{gdy } z(0) \leq r, \end{cases}$$

$$d_{k+1} = \max \left\{ \sum_{j=1}^k u_j^k, \tau_k \right\} + \zeta^k + \sum_{j=2}^{Q-r} u_{j+r+\nu_k}^k = \sum_{j=1}^{r+\nu_k} u_j^k + \sum_{j=1}^{Q-r} u_{j+r+\nu_k}^k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

przy czym  $u_j^k$  dla  $k \geq 1$  jest dane wzorem :

$$u_j^k = \begin{cases} u_{j+z(0)+Q-r+(k-1)Q+\nu_0+\dots+\nu_{k-1}} & \text{gdy } z(0) \leq r, \\ u_{j+z(0)-r+(k-1)Q+\nu_0+\dots+\nu_{k-1}} & \text{gdy } z(0) > r, \end{cases}$$

a zmienne losowe  $\nu_k, k \geq 0$  oraz  $\zeta^k, k \geq 1$  są zdefiniowane następująco :

$$\nu_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \max \left\{ n: \sum_{j=1}^{n+z(0)} u_j < \tau_0, n \in \mathcal{N} \right\} & \text{gdy } k=0 \text{ i } z(0) \leq r, \\ \max \left\{ n: \sum_{j=1}^{n+r} u_j^k < \tau_k, n \in \mathcal{N} \right\} & \text{gdy } k \geq 1; \end{cases}$$

$$\zeta^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{j=1}^{z(0)+\nu_0+1} u_j - \max \left\{ \sum_{j=1}^{z(0)} u_j, \tau_0 \right\} & \text{gdy } k=0 \text{ i } z(0) \leq r, \\ \sum_{j=1}^{r+\nu_k+1} u_j^k - \max \left\{ \sum_{j=1}^k u_j^k, \tau_k \right\} & \text{gdy } k \geq 1. \end{cases}$$

3°. Niech  $\{\tau_k, k \geq 0\}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa określonym dystrybuanta  $G(t)$  i skończonej wartości oczekiwanej  $E\tau$  ( $E\tau < +\infty$ ).

4°. Zmienne losowe  $\tau_k, u_j$  dla każdego  $k \geq 0$  oraz każdego  $j \geq 1$  są niezależne. ■

Definicja 1.

Niech  $d_1 = t_1$ . Zmienne losowe  $d_k, k \geq 1$  nazywać będziemy długością  $(k-1)$ -szego cyklu opróżniania  $(Q, r)$  bufora. ■

Zmienne losowe  $\nu_k, k \geq 0$ , interpretujemy jako ilość utraconych danych w  $k$ -tym cyklu opróżniania  $(Q, r)$  bufora.

3. Długość cyklu opróżniania  $(Q, r)$  bufora.

Zauważmy, że ciąg  $\{d_k, k \geq 1\}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Wynika to z niezależności zmiennych losowych  $u_j, j \geq 1$  oraz  $\tau_k, k \geq 1$ . Także z poczynionych założeń co do rozkładu zmiennych

losowych  $u_j$  i  $\tau_k$  wynika, że zmienne losowe  $d_k, k \geq 1$  mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa począwszy od elementu o numerze  $k=2$ . Ponadto długość  $k$ -tego cyklu opróżnienia  $(Q, r)$  bufora możemy zapisać następująco:  $d_{k+1} = \sum_{j=1}^{r+1} u_j^k + \sum_{j=1}^k u_{j+r+1}^k + \sum_{j=2}^{Q-r} u_{j+r+\nu_k}^k, k \geq 1$ .

Wartości oczekiwane zmiennych losowych  $d_k, k \geq 1$  otrzymamy w wyniku następującego toku rozważań. Na początek zauważmy, że zmienne losowe  $\nu_k, k \geq 0$  możemy zdefiniować w następujący sposób :

$$\nu_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 & \text{gdy } k=0 \text{ i } z(0) \leq r, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^k & \text{gdy } k \geq 1; \end{cases}$$

gdzie  $\beta_n^k$  dla każdego  $k \geq 0$  i każdego  $n \geq 0$  są zmiennymi losowymi zdefiniowanymi następująco:

$$\beta_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sum_{j=1}^{n+z(0)} u_j < \tau_0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases} \quad \beta_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sum_{j=1}^{n+r} u_j^k < \tau_k \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stąd sumę  $\sum_{j=1}^k u_{j+r+1}^k$  możemy zapisać:  $\sum_{j=1}^k u_{j+r+1}^k = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k, k \geq 1$ .

W związku z tym  $d_{k+1} = \sum_{j=1}^{r+1} u_j^k + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k + \sum_{j=2}^{Q-r} u_{j+r+\nu_k}^k, k \geq 1$ .

Wartość oczekiwana zmiennych losowych  $\beta_n^k, k \geq 0$  dla każdego  $n \geq 0$  ma postać wzoru:

$$E\{\beta_n^k\} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} F^{*(n+z(0))}(t) dG(t) & \text{gdy } k=0 \text{ i } z(0) \leq r, \\ \int_0^{+\infty} F^{*(n+r)}(t) dG(t) & \text{gdy } k \geq 1. \end{cases}$$

Wartość oczekiwana  $E\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k\right\}$  obliczamy w następujący sposób.

Z tego że zmienne losowe  $\beta_j^k$  i  $u_{j+r+1}^k$  dla każdego  $k \geq 1$  i  $j \geq 1$  są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz z twierdzenia Fubinięgo [3, roz. 18, tw. 18.3, s. 231] wynika następująca relacja:

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k\right\} &= \sum_{j=1}^{\infty} E\{\beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k\} = \sum_{j=1}^{\infty} E\{\beta_j^k\} \cdot E\{u_{j+r+1}^k\} = E u \cdot \sum_{j=1}^{\infty} E\{\beta_j^k\} = \\ &= E u \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^{+\infty} F^{*(n+r)}(t) dG(t) \right] = E u \cdot \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n+r)}(t) dG(t) = E u \cdot \int_0^{+\infty} H(t) dG(t). \end{aligned}$$

Zauważmy, że funkcja  $H(t)$  przypomina swoją postacią funkcję odnowy [7, roz. III. 14, s. 164-171]. Funkcję  $H(t), t \geq 0$  obliczymy wykonując następujące czynności. Funkcję  $H(t)$  możemy zapisać następująco:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n+r)}(t) = F^{*(1+r)}(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x). \quad (2)$$

Powyższe równanie jest równaniem odwym.

Niech  $\mathcal{L}[F(t), s] = \bar{F}(s)$  oraz  $\mathcal{L}[H(t), s] = \bar{H}(s)$ . Ponadto wiadomo, że  $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}F(t), s\right] = s \cdot \bar{F}(s) - F(0) = s \cdot \bar{F}(s)$ . Przechodząc w (2) do transformaty Laplace'a otrzymujemy równość  $\bar{H}(s) = (\bar{F}(s))^{r+1} \cdot (1 - s \cdot \bar{F}(s))^{-1}$ .

Na tej podstawie dla każdego  $k \geq 1$  wartość oczekiwana zmiennej losowej  $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k$  ma postać wzoru:

$$E\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k\right\} = ES\beta u = Eu \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[ (\bar{F}(s))^{r+1} \cdot (1 - s \cdot \bar{F}(s))^{-1} \right] dG(t). \quad (3)$$

Ostatecznie wartość oczekiwana zmiennej losowej  $d_{k+1}, k \geq 1$  jest następująca:

$$E\{d_{k+1}\} = Ed = Q \cdot Eu + ES\beta u, \quad k \geq 1, \quad (4)$$

gdzie  $ES\beta u$  dane jest wzorem (3).

Wartość oczekiwana  $E\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^0 \cdot u_{j+z(0)+1}\right\}$  wyznaczamy analogicznie jak wartość oczekiwana zmiennej losowej  $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1}^k, k \geq 1$ . Stąd

$$E\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^0 \cdot u_{j+z(0)+1}\right\} = Eu \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[ (\bar{F}(s))^{z(0)+1} \cdot (1 - s \cdot \bar{F}(s))^{-1} \right] dG(t)$$

Dlatego też możemy zapisać:

$$E\{d_1\} = \begin{cases} (z(0) - r) \cdot Eu & \text{gdy } z(0) > r, \\ \left[ Q - r + z(0) + \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[ (\bar{F}(s))^{z(0)+1} \cdot (1 - s \cdot \bar{F}(s))^{-1} \right] dG(t) \right] \cdot Eu & \text{gdy } z(0) \leq r. \end{cases}$$

Z charakteru procesu buforowania danych w  $(Q, r)$  buforze wynika, że w każdym cyklu opróżniania bufora może nastąpić czasowy brak miejsca w buforze. Ze wzoru (1) wynika, że czas braku miejsca w  $(Q, r)$  buforze w każdym cyklu opróżniania bufora możemy przedstawić następującymi zależnościami:

$$B_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, \tau_0 - \sum_{j=1}^{z(0)} u_j\right\} \quad \text{oraz} \quad B_k \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\tau_k - \sum_{j=1}^k u_j, 0\right\}, \quad k \geq 1.$$

Zmienne losowe  $B_k, k \geq 0$ , interpretujemy jako czas zapełnienia bufora w  $(k+1)$ -szym cyklu opróżniania  $(Q, r)$  bufora.

Wartość oczekiwana zmiennych losowych  $B_k, k \geq 1$  możemy obliczyć w następujący sposób:

$$\begin{aligned} E\{B_k\} &= E\left\{\max\left\{\tau_k - \sum_{j=1}^k u_j, 0\right\}\right\} = E\left\{\max\left\{\tau_k, \sum_{j=1}^k u_j\right\}\right\} - E\left\{\sum_{j=1}^k u_j\right\} = \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - G(t) \cdot F^{*k}(t)) dt - \int_0^{+\infty} (1 - F^{*k}(t)) dt. \end{aligned}$$

Ostatecznie



$$E\{B_k\} = \frac{KB}{k} = \int_0^{\infty} (1-G(t)) \cdot F^{*k}(t) dt. \quad (5)$$

Analogicznie obliczamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $B_0$ .  
W związku z tym, wartość oczekiwaną  $E\{B_0\}$  ma postać wzoru:

$$E\{B_0\} = \int_0^{\infty} (1-G(t)) \cdot F^{*r}(t) dt$$

Ciąg  $\{B_k, k \geq 0\}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowej wartości oczekiwanej  $KB < +\infty$  dla każdego  $k \geq 1$  (w szczególności  $k \geq 0$  gdy  $z(0)=r$ ).

4. Współczynniki gotowości  $(Q, r)$  bufora do przyjęcia danych.

W literaturze definiuje się graniczny współczynnik gotowości oraz graniczny uśredniony współczynnik gotowości obiektu do wykonania zadania [1, roz. 7, def. 2.1. s. 211]. W związku z tym, graniczne współczynniki gotowości  $(Q, r)$  bufora do przyjęcia danych zdefiniujemy następująco.

Niech rodzina  $\mathcal{Y} = (y(t), t \geq 0)$  będzie procesem stochastycznym, ze zbiorem wartości  $\{0, 1\}$ , określonym wzorem:  $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } z(t) = 0, \\ 0 & \text{gdy } z(t) \neq 0. \end{cases}$

Definicja 2.

Granicznym współczynnikiem gotowości  $(Q, r)$  bufora do przyjęcia danych nazywamy granicę  $w_g = \lim_{T \rightarrow \infty} E\{1-y(t)\}$ .

Definicja 3.

Granicznym uśrednionym współczynnikiem gotowości  $(Q, r)$  bufora do przyjęcia danych nazywamy granicę  $w_{srg} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E\{1-y(t)\} dt$ .

Twierdzenie 1.

$$1. \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot E \left\{ \int_0^T y(t) dt \right\} = \frac{KB}{Ed}.$$

$$2. \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{KB}{Ed},$$

gdzie  $Ed$  dane wzorem (4) oraz  $KB$  - wzorem (5).

Dowód twierdzenia 1.

Rodzina  $\mathcal{X} = (z(t), t \geq 0)$  jest procesem regenerującym się (wynika to z założeń 1<sup>o</sup>-4<sup>o</sup>) o chwilach regeneracji  $t_0 = 0$  i  $t_k, k \geq 1$ , i przyjmującym wartości ze zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, r+Q\}$ .

Z tego, że proces  $\mathcal{X} = (z(t), t \geq 0)$  jest procesem regenerującym się wynika że proces  $\mathcal{Y} = (y(t), t \geq 0)$  jest procesem regenerującym się z chwilami regeneracji  $t_0 = 0$  i  $t_k, k \geq 1$ . W związku z tym, proces  $(\int_0^t y(x) dx, t \geq 0)$  jest procesem akumulacji [2, roz. 4.8, s. 112-119], [9, roz. 1.6, s. 31+32], [10, roz. 8.4, s. 150+152] uzyskującym w

### Model funkcjonowania bufora

kolejnych cyklach regeneracji niezależne przyrosty postaci :

$$\int_0^{t_{k+1}} y(t) dt = B_k, \quad k \geq 0, \quad t_0 = 0.$$

Stąd zbieżność z prawdopodobieństwem 1 wynika z granicznego twierdzenia dla procesów akumulacji [2, tw.4.14, s.117], [10, roz.8.4, s.151, w.1]. Mianowicie:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T y(t) dt \right\} = \frac{EB}{Ed}.$$

Zbieżność średniokwadratowa wynika z ergodycznego twierdzenia dla procesów regenerujących [6, roz.2.9, tw.2.11, s.79]. Z własności zbieżności średniokwadratowej wynika, że [4, roz.1.9, s.39-40, w.7 i 8] prawie na pewno zachodzi relacja:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{EB}{Ed}.$$

Co należało dowieść. ■

Wartość współczynnika  $w_{\leq r_g}$  wynika wprost z tw.1 na podstawie twierdzenia Fubiniego [3, roz.18, tw.18.3, s.231], [5, roz.4, s.109] :

$$w_{\leq r_g} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E\{1-y(t)\} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T (1-y(t)) dt \right\}.$$

Stąd, zgodnie z powyższym  $w_{\leq r_g}$  dane jest wzorem:

$$w_{\leq r_g} = 1 - \frac{EB}{Ed}. \quad (6)$$

Wiadomo [1, roz.7, lemat 2.2, s.212], że jeśli tylko istnieje granica  $w_g = \lim_{T \rightarrow \infty} E\{1-y(t)\}$  to  $w_g = w_{\leq r_g}$ , to znaczy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\{1-y(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E\{1-y(t)\} dt.$$

Warunki istnienia granicy  $w_g = \lim_{T \rightarrow \infty} E\{1-y(t)\} = 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} Pr\{z(t)=0\}$  oraz sposób jej obliczenia formułuje twierdzenie Smitha .

Zauważmy, że dla każdego  $k \geq 1$  i  $t \geq 0$

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} Pr\{z(t_k+t)=0, d_{k+1} > t\} = Pr \left\{ \sum_{j=1}^k u_j^k \quad t < \tau_k \right\} = F^{*k}(t) \cdot (1-G(t)).$$

Funkcja  $p(t)$  jest całkowna i nierosnąca. Stąd, jeżeli dystrybuanta zmiennej losowej  $d_k, k \geq 2$  jest niearytmetyczna to z tw. Smitha wynika, że granica  $\lim_{T \rightarrow \infty} Pr\{z(t)=0\}$  istnieje i jest równa

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\{y(t)\} = Ed^{-1} \cdot \int_0^{\infty} p(t) dt = Ed^{-1} \cdot \int_0^{\infty} F^{*k}(t) \cdot (1-G(t)) dt.$$

Graniczny współczynnik gotowości  $(Q, r)$  bufora do przyjęcia danych  $w_g = 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} E\{y(t)\}$  na podstawie tw. Smitha lub na podstawie relacji  $w_g = w_{\leq r_g}$  oraz tw.1 ma postać wzoru (6).

5. Średnie wypełnienie pamięci (Q,r) bufora

Definicja 4.

Granicznym średnim wypełnieniem pamięci (Q,r) bufora nazywamy

granice:  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot E \left\{ \int_0^T Q+r-z(t) dt \right\}$ . ■

Twierdzenie 2.

1.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot E \left\{ \int_0^T z(t) dt \right\} = \frac{EA}{Ed}$ .

2.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = \frac{EA}{Ed}$ ,

gdzie Ed dane wzorem (4), EA =  $\frac{Q+2 \cdot r-1}{2} \cdot Q \cdot Eu + Q \cdot (ES/\mu - E\tau)$  oraz ES/μ dane wzorem (3). ■

Dowód twierdzenia 2.

Dowód tezy 1. Zauważmy, że proces  $(\int_0^t z(t) dt, t \geq 0)$  jest procesem akumulacji [2, roz.4.8, s.112÷119], [9, roz.1.6, s.31÷32], [10, roz.8.4, s.150÷152] uzyskującym niezależne przyrosty w kolejnych cyklach regeneracji postaci:  $A_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} z(t) dt$ ,  $k \geq 1$ ,  $t_0 = 0$ . Zmienne losowe  $A_k, k \geq 1$  wyrażają się wzorami :

$$A_1 = \begin{cases} z(0) - r - \sum_{j=1}^{r-1} (z(0) - j + 1) \cdot u_j & \text{gdy } z(0) > r, \\ z(0) - \sum_{j=1}^{z(0)} (z(0) - j + 1) \cdot u_j + Q \cdot z^0 + \sum_{j=2}^{Q-r} (Q - j + 1) \cdot u_{j+z(0)} + Q \cdot \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^{z(0)} u_{j-\tau_0} \right\} & \text{gdy } z(0) \leq r, \end{cases}$$

$$A_{k+1} = \sum_{j=1}^r (r - j + 1) \cdot u_j^k + Q \cdot z^k + \sum_{j=2}^{Q-r} (Q - j + 1) \cdot u_{j+r+\nu_k}^k + Q \cdot \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^r u_{j-\tau_k}^k \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^r (r - j + 1) \cdot u_j^k + \sum_{j=2}^{Q-r} (Q - j + 1) \cdot u_{j+r+\nu_k}^k + Q \cdot \left[ z^k + \max \left\{ \sum_{j=1}^r u_{j-\tau_k}^k, \tau_k \right\} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^r (r - j + 1) \cdot u_j^k + \sum_{j=2}^{Q-r} (Q - j + 1) \cdot u_{j+r+\nu_k}^k + Q \cdot \left[ \sum_{j=1}^{r+1} u_j^k + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \cdot u_{j+r+1-\tau_k}^k \right], \quad k \geq 1.$$

Stąd wartość oczekiwana zmiennych losowych  $A_{k+1}, k \geq 1$  ma postać:

$$E\{A_{k+1}\} = \frac{Q+1}{2} \cdot Q \cdot Eu + Q \cdot (r \cdot Eu + ES/\mu - E\tau) = \frac{Q+2 \cdot r+1}{2} \cdot Q \cdot Eu + Q \cdot (ES/\mu - E\tau) = EA.$$

$\{A_k, k \geq 1\}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowej wartości oczekiwanej EA ( $EA < +\infty$ ) dla każdego  $k \geq 2$  gdy  $z(0) \neq r$  lub dla każdego  $k \geq 1$  gdy  $z(0) = r$ . Na podstawie granicznego twierdzenia dla procesów akumulacji [1, tw.4.14, s.117], [10, roz.8.4, s.151, wz.1]. otrzymujemy tezę 1 tw. 2, tzn.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot E \left\{ \int_0^T z(t) dt \right\} = \frac{EA}{Ed}.$$

### Model funkcjonowania bufora

Co należało dowieść. ■

Dowód tezy 2. Zauważmy, że dla każdego zdarzenia elementarnego  $\omega \in \Omega$  zachodzi następująca relacja:

$$0 \leq \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt \leq r+Q, T>0. \quad (7)$$

Niech  $g = \frac{rA}{Ed}$ ,  $w(t) = \int_0^{tT} z(x) dx$  oraz  $\bar{w}(t) = \frac{w(t)}{t} - g, t \geq 0$ .

Z pierwszej nierówności Czebyszewa, tzn.  $Pr\{|\bar{w}(t)| \geq \epsilon\} \leq \frac{E\{|\bar{w}(t)|^2\}}{\epsilon^2}$  dla każdego  $t \geq 0$  i każdego  $\epsilon > 0$  oraz z tezy 1 tw.2 wynika, że proces  $(w(t)/t, t \geq 0)$  jest zbieżny stochastycznie do granicy  $g$ , tzn.  $\lim_{t \rightarrow \infty} p.p. \frac{w(t)}{t} = g$ . Ponadto z relacji (7) wynika, że dla każdego  $t \geq 0$  istnieje p.n.  $\sup |\bar{w}(t)|^2 = \inf\{C : C \geq 0 \text{ i } Pr\{|\bar{w}(t)|^2 > C\} = 0\}$ .

Dla każdego  $t \geq 0$  i każdego  $\epsilon > 0$  spełniona jest nierówność [8, roz. 2.4.2, s.44] :

$$\frac{E\{|\bar{w}(t)|^2\} - \epsilon^2}{p.n. \sup |\bar{w}(t)|^2} \leq Pr\{|\bar{w}(t)| \geq \epsilon\} \leq \frac{E\{|\bar{w}(t)|^2\}}{\epsilon^2}. \quad (8)$$

Z tego że  $\lim_{t \rightarrow \infty} p.p. \frac{w(t)}{t} = g$  oraz z relacji (8) wynika, że proces  $(w(t)/t, t \geq 0)$  dla każdego  $t \geq 0$  i każdego  $\epsilon > 0$  spełnia nierówność:

$$E\{|\bar{w}(t)|^2\} - \epsilon^2 \leq 0. \quad (9)$$

Nierówność (9) dowodzi zbieżności procesu  $(w(t)/t, t \geq 0)$  według średniej kwadratowej. Na podstawie własności zbieżności prawie na pewno [4, roz. 1.9, s.37-38, wś. 5] i zbieżności średniokwadratowej [4, roz. 1.9, s.37-38, wś. 8] mamy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p.p. \frac{w(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} p.p. \frac{w(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} p.p. \frac{w(t)}{t}.$$

Co należało dowieść. ■

### 6. Zakończenie

Korzystając z przeprowadzonych rozważań dodatkowo można jeszcze wyznaczyć następujące charakterystyki:

- a). Wartości oczekiwane zmiennych losowych  $\xi^k$  oraz  $\nu_k, k \geq 0$ .
- b). Wartość oczekiwana czasu do pierwszego przepełnienia bufora  $T_p$  ( $T_p \stackrel{df}{=} \inf\{t : z(t) = 0, t \geq 1\}$ ).
- c). Wartość oczekiwana ilości utraconych danych do chwili  $t \geq 0$ .
- d). Wartość oczekiwana ilości opróżnień  $(Q, r)$  bufora do chwili  $t \geq 0$ .

Ozyskane charakterystyki mogą posłużyć jako kryteria zadania wyboru optymalnych parametrów  $(Q, r)$  bufora, tzn. wielkości  $Q$  i  $r$ .

7. Wykaz stosowanych oznaczeń

$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathcal{X}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\sum_{j=1}^k x_j = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k < m, \\ x_m + \dots + x_k & \text{gdy } k \geq m; \end{cases}$

$[x]$  - część całkowita liczby  $x$  ;

l.i.m.- granica w sensie zbieżności średniokwadratowej;

lim - granica w zależności od kontekstu: w sensie zbieżności z prawdopodobieństwem 1 lub zbieżności w zwykłym sensie;

$\omega$  - zdarzenie elementarne;  $\Omega$  - zbiór zdarzeń elementarnych;

$Pr\{\cdot\}$  - miara prawdopodobieństwa;

$E\{\cdot\}$  - operator wartości oczekiwanej;

$\mathcal{L}\{\cdot\}$  - operator przekształcenie Laplace'a;

$\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  - operator odwrotnego przekształcenia Laplace'a;

$z(t)$  - wielkość wolnego obszaru  $(Q, r)$  bufora w chwili  $t$ ;

$*$  - operacja splotu;

$F^{*n}(t)$  - spłot  $n$ -tego stopnia dystrybuant  $F(t), t \geq 0$ ,  
przy czym  $F^{*n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t) * F^{*(n-1)}(t)$ ,  $F^{*0}(t) = 1$ .

Literatura

- [1] Barlow R.E., Proschan F.: Statistical theory of reliability and life testing probability models. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1975. (Wyd. ros.: Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. Москва 1984).
- [2] Beichelt F., Franken P.: Zuverlässigkeit und Instandhaltung. Mathematische Methoden. VEB Verlag Technik, Berlin 1983.
- [3] Billingsley: Prawdopodobieństwo i miara. PWN, Warszawa 1987.
- [4] Bobrowski D.: Wstęp do losowych równań różniczkowych zwyczajnych. PWN, Warszawa 1987.
- [5] Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. Tom II. PWN, Warszawa 1981.
- [6] Klimow G.P.: Procesy obsługi masowej. WNT, Warszawa 1979.
- [7] Копоціński B.: Zarys teorii odnowy i niezawodności. PWN, Warszawa 1973.
- [8] Корольк Ч.С., Портенко Н.И., Скороход А.Ч., Турчин А.Ф.: Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Наука, Москва 1985.
- [9] Рубальский Г.Б.: Управление запасами при случайном спросе. Москва 1977.
- [10] Kowalenko I.N., Kuzniecowa N.J., Saurienkow W.M.: Procesy stochastyczne. Poradnik. PWN, Warszawa 1989.

### Model funkcjonowania bufora

[11] Шореход А.Ч.: Случайные процессы с независимыми приращениями  
Наука, Москва 1986.

**ISBN 83-900412-1-9.**