



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**Instytut Badań Systemowych**

**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA  
METOD ILOŚCIOWYCH  
I TECHNIK INFORMATYCZNYCH  
WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY  
DECYZYJNE**

**Redakcja:**

**Jan Studziński**  
**Ludostław Drelichowski**  
**Olgierd Hryniewicz**

**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA  
METOD ILOŚCIOWYCH  
I TECHNIK INFORMATYCZNYCH  
WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY  
DECYZYJNE**

Redakcja:

Jan Studziński

Ludosław Drelichowski

Olgierd Hryniewicz

Wydanie tej publikacji było możliwe dzięki pomocy finansowej  
MINISTERSTWA NAUKI I SZKOLNICTWA WYŻSZEGO.

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju i zastosowań metod, modeli, technik i systemów informatycznych w procesach podejmowania decyzji. Kilka artykułów przedstawia rezultaty projektów badawczych finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego i realizowanych przez polskie instytucje badawcze.

Recenzenci:

Prof. Olgierd Hryniewicz

Prof. Andrzej Straszak

Dr hab. Jan Studziński

Komputerowa edycja tekstu: Anna Gostyńska

© Instytut Badań Systemowych, Warszawa 2006

**Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN**  
**Newelska 6, PL 01-447 Warszawa**

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw  
e-mail: [biblioteka@ibspan.waw.pl](mailto:biblioteka@ibspan.waw.pl)

**ISBN 83-894-7506-5**

**9788389475060**

**ISSN 0208-8029**



**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA  
METOD ILOŚCIOWYCH I TECHNIK  
INFORMATYCZNYCH  
WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY  
DECYZYJNE**

Instytut Badań Systemowych • Polska Akademia Nauk  
**Seria: Badania Systemowe**  
**Tom 49**

---

Redaktor Naukowy:  
**Prof. Jakub Gutenbaum**

Warszawa 2006



## OPTYMALNE POLITYKI WYMIAN WEDŁUG WIEKU DLA OBIEKTÓW NIENAPRAWIALNYCH Z GWARANCJĄ

Leszek KNOPIK

Instytut Matematyki, Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy

<KnopikM@co.bydgoszcz.pl>

***Streszczenie:** W pracy bada się efekty odnowy przez wymianę według wieku elementów posiadających gwarancję i nienaprawialnych. Bazując na procesach semi-Markowa zbudowano funkcję kryterialną jako koszt na jednostkę czasu... Podano przykład numeryczny do pokazania przedstawionej metody.*

**Słowa kluczowe:** Wymiana według wieku, proces semi-Markowa, koszt na jednostkę czasu, gwarancja.

### 1. Wstęp

W tej pracy analizuje się efekty optymalnych wymian według wieku dla elementów posiadających gwarancję producenta. Pierwszą pracę dotyczącą wymian elementów wieku opublikowali Barlow i Proschan (1965). W późniejszym okresie temat ten był rozwijany dla wielu przypadków szczególnych. Dla tych przypadków otrzymano dużo wyników analitycznych - Berg (1976); Berg, Epstein (1978); Igram, Scheaffer (1976); Osaki, Nakagawa (1975). Jednak w tych rozważaniach nie uwzględniono elementów z gwarancją. Gwarancja producenta w obecnym czasie jest podstawowym elementem współczesnego rynku. Podstawową rolą gwarancji jest oferta mówiąca, jakie czynności ma podjąć kupujący, gdy produkt ulegnie uszkodzeniu podczas okresu gwarancji. Gwarancja na produkt tworzy zachętę dla kupujących do różnych zobowiązań, podnosi reputację producenta, ma wpływ na udział w rynku i potencjalne zyski.

Szczegółową dyskusję i przegląd wyników dotyczących różnych podejść do gwarancji na produkt podano w pracach Blischke, Murthy (1992a, 1992b, 1994). W szczególności dla produktów nienaprawialnych politykę gwarancyjną przedstawiono w pracy Blischke, Murthy (1992a). Przy tej polityce gwarancyjnej produkt uszkodzony w okresie gwarancyjnym jest wymieniany na nowy z pełną gwarancją. Model matematyczny i analizę kosztów dla takiej polityki gwarancyjnej rozwinęto w pracach Balcer, Sahin (1986); Blischke, Scheuer (1981) i Ritchken (1985).

## 2. Sformułowanie problemu

W pracy będziemy używali następujących oznaczeń:

$c_d$  – koszt wymiany uszkodzonego elementu,

$c_p$  – koszt zakupu elementu,

$w$  – okres gwarancji,

$X$  – czas życia ( czas do uszkodzenia),

$t$  – wiek wymiany elementu,

$f(x)$  – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej czasu życia  $X$ ,

$F(x)$  – dystrybuanta zmiennej losowej  $X$ ,

$R(x)$  – funkcja niezawodności zmiennej losowej  $X$ ,  $R(x) = 1 - F(x)$

$t^*(w)$  - optymalny wiek wymiany.

W pracy Yeh et al., (2005) pokazano, że koszt na jednostkę czasu w przypadku, gdy w chwili  $t$  przeprowadzono odnowę prewencyjną wyraża się wzorem:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{c_p R(w) + c_d F(t)}{ET(t)} & , \text{jesli } w \leq t, \\ \frac{c_p R(t) + c_d F(t)}{ET(t)} & , \text{jesli } w > t \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $ET(t) = \int_0^t R(s) ds$ .

Funkcja  $g(t)$  jest ciągła dla  $t \geq 0$  i różniczkowalna dla  $t \neq w$ . W pracy Yeh et al., (2005) opierając się na modelach teorii odnowy podano warunki, dla których funkcja  $g(t)$  posiada minimum.

Celem tej pracy jest pokazanie możliwości innego podejścia do konstrukcji funkcji  $g(t)$ . Podejście to opiera się na zastosowaniu procesów semi-markowskich. W celu zbudowania takiego modelu wyróżnimy cztery stany procesu semi-Markowa  $X(t)$ :

$S_1$  – poprawna praca obiektu technicznego,

$S_2$  – wymiana, której koszt jest równy  $c_d$ , przypadek ten jest możliwy, jeśli  $t > w$  i  $x \leq w$  lub  $t < w$  i  $x \leq t$ ,

$S_3$  - wymiana z kosztem  $c_p$ , przypadek ten zachodzi, gdy  $t \geq w$  i  $x \geq t$  lub  $t < w$  i  $x > t$ ,

$S_4$  - wymiana z kosztem jednostkowym  $c_d + c_p$ , to zachodzi, gdy  $t \geq w$  i  $w < x < t$ .

W klasycznym modelu wymian według wieku, nie uwzględnia się czasów wymian i czasów odnow prewencyjnych. Przedstawiony w tej pracy model semi-

markowski opiera się na twierdzeniu granicznym dla procesów semi-Markowa ze skończoną liczbą stanów (Grabski, 2002). Jednym z założeń tego twierdzenia jest wymaganie, aby wartości średnie  $ET_i, i=1, 2, 3, 4$  czasów przebywania w stanach były dodatnie. W modelu semi-markowskim funkcja kryterialna  $g(t)$  zależy od rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $T_1$ , wartości średnich  $ET_i, i=2, 3, 4$ , zysków (strat) jednostkowych  $z_i, i = 1, 2, 3, 4$  oraz od prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*(t) i = 1, 2, 3, 4$  włożonego w proces semi-Markowa  $X(t)$  łańcucha Markowa. Wiadomo, że (Grabski, 2002; Knopik, 2003) funkcja kryterialna  $g(t)$  ma postać

$$g(t) = \frac{\sum_{i=1}^4 z_i ET_i p_i^*(t)}{\sum_{i=1}^4 ET_i p_i^*(t)} . \tag{2}$$

Na podstawie warunków definiujących stany  $S_1, S_2, S_3, S_4$  można macierz  $P$  prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa zapisać w postaci:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12}(t) & p_{13}(t) & p_{14}(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie

$$\begin{aligned} p_{12}(t) &= F(w), \\ p_{13}(t) &= R(w)R(t), \\ p_{14}(t) &= R(w)F(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Łatwo można sprawdzić, że  $p_{12}(t) + p_{13}(t) + p_{14}(t) = 1$ . W celu wyznaczenia prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*(t), i = 1, 2, 3, 4$  rozwiązuje się układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} p_{12}(t) p_1^*(t) &= p_2^*(t), \\ p_{13}(t) p_1^*(t) &= p_3^*(t), \\ p_{14}(t) p_1^*(t) &= p_4^*(t), \\ p_1^*(t) + p_2^*(t) + p_3^*(t) + p_4^*(t) &= 1. \end{aligned} \tag{5}$$



Rozwiązanie układu równań liniowych (5) ma postać

$$\begin{aligned} p^*_1(t) &= \frac{1}{2}, \\ p^*_2(t) &= \frac{1}{2} F(w), \\ p^*_3(t) &= \frac{1}{2} R(w) R(t), \\ p^*_4(t) &= \frac{1}{2} R(w) F(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Uwzględniając, że w analizowanym modelu wymian według wieku

$$z_1 = 0, \quad z_2 = c_d, \quad z_3 = c_p, \quad z_4 = c_d + c_p, \quad (7)$$

mamy

$$g(t) = \frac{c_d F(w) ET_2 + c_p R(w) R(t) ET_3 + (c_d + c_p) ET_4 R(w) F(t)}{ET(t) + F(w) ET_2 + R(w) R(t) ET_3 + ET_4 R(w) F(t)}. \quad (8)$$

Funkcję kryterialną  $g(t)$  można przedstawić w postaci

$$g(t) = \frac{B_1 + C_1 F(t)}{ET(t) + B + CF(t)}, \quad (9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_1 &= c_d F(w) ET_2 + c_p ET_3 R(w), \\ B &= F(w) ET_2 + R(w) ET_3, \\ C_1 &= R(w) \{ ET_4 (c_d + c_p) - ET_3 c_p \}, \\ C &= R(w) \{ ET_4 - ET_3 \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Pochodna funkcji kryterialnej  $g(t)$  zapisana wzorem (9) ma postać

$$g'(t) = \frac{R(t)}{M^2(t)} \{ C_1 H(t) B_1 + f(t) [BC_1 - B_1 C] \}, \quad (11)$$

gdzie  $M(t) = ET(t) + B + CF(t)$ ,  $H(t) = ET(t) \lambda(t) - F(t)$ ,  $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ .

Wiadomo, że  $M(0) = B > 0$ , ale  $M'(t) = R(t) + f(t)C$ . Jeśli  $ET_4 \geq ET_3$ , to na podstawie (10) mamy  $C \geq 0$ . Funkcja  $M(t)$  jest niemalejąca, stąd  $M(t) \geq B > 0$ . Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja kryterialna  $g(t)$  określona wzorem (9) posiadała minimum jest zmiana znaku pochodnej  $g'(t)$  z „-” na „+”. Jest oczywistym, że wystarczy badać zmianę znaku funkcji

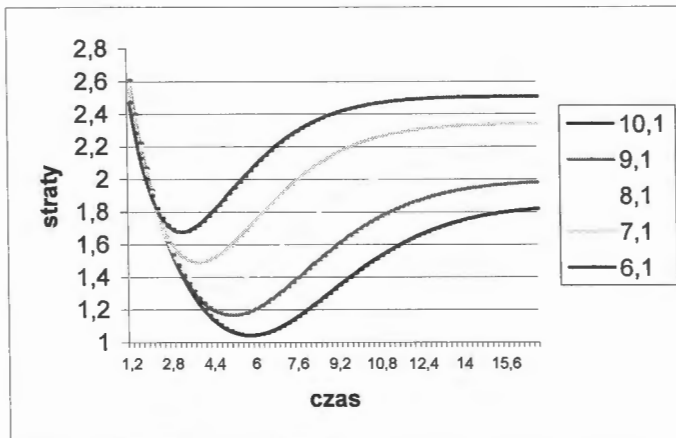
$$h(t) = C_1 H(t) - B_1 + f(t)(BC_1 - B_1 C). \quad (12)$$

### 3. Przykład numeryczny

W tym podpunkcie rozważamy przykład minimalizacji strat opisanych przez funkcję  $g(t)$  przy następujących danych:

$$c_d = 2, c_p = 6, ET_2 = 1, ET_3 = 1, ET_4 = 3, w = 3.$$

Zakładamy, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład gamma z parametrami skali  $b$  i kształtu  $p$ . Obliczenia wykonano dla par parametrów  $(p, b)$ : (10, 1), (9, 1), (8, 1), (7, 1), (6, 1). Wyniki obliczeń pokazano na Rysunku 1.



Rysunek 1. Wykres funkcji kryterialnej dla różnych wartości parametrów  $p$  i  $b$  rozkładu gamma.

### Literatura

- Balcer Y, Sahin I, (1986) Replecement costs under warianty: cost moments and time variability., *Oper. Res.*, **34**: 554-559.
- Barlow R.E., Proschan F. (1965) *Mathematical Teory of Reliability*. John Wiley & Sons.
- Berg H. (1976) A proof of optimality for age replacement policies. *J.Appl. Probab.*, **13**: 751-759.
- Berg H., Epstein B. (1978) Comparison of age, block and failure replacement policies. *IEEE Trans. Reliability*, **27**: 25-29.
- Blischke W.R., Murthy D.N.P. (1992a) Product warianty management I: A taxonomy for warianty policies. *Eur. J. Oper. Res.*, **62**: 127-148.
- Blischke W.R., Murthy D.N.P. (1992b) Product warianty management III: A review of mathematical models. *Eur. J. Oper. Res.*, **63**: 1-34.

- Blischke W.R., Murthy D.N.P. (1994) *Warianty cost analysis*. Marcel Dekker.
- Blischke W.R., Scheuer E.H. (1981) Applications of renewal theory in analysis of the replacement warianty. *Nav. Res.. Logist. Quartley*, **28**: 193-205.
- Grabski F. (2002) *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji*. IBS PAN.
- Ingram C.R., Scheaffer R.L. (1976) On consistent estimation of age replacement inervab. *Technometrics*, **18**: 213-219.
- Knopik L. (2003) Maksymalizacja zysku w diagnostycznym systemie eksploatacji pojazdów z wykorzystaniem procesu semi-Markowa. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn z 1*, **139**: 153-168.
- Osaki S.S., Nakagawa T. (1975) A note on age replacement. *IEEE Trans Reliability*, **34**: 147-150.
- Ritchken P.H. (1985) Warranty policies for nonreparable items uder risk aversion. *IEEE Trans. Reliability*, **34**: 147-150.
- Yeh R.H., Chen G.Ch., Chen M.Y. (2005) Optimal age-replacement policy for nonreparable products under renewing free-replacement warianty. *IEEE Trans. Reliability*, **54**: 92-97.

### OPTIMUM AGE-REPLACEMENT POLICIES FOR NONREPARABLE ITEMS UNDER WARRANTY

**Abstract:** *This paper investigates the effects of renewing free-replacement warianty on the age replacement policy for a nonreparable product. A model is developed for the average cost per unit time and is based on semi-Markow processes. Numerical example is given to evaluate of presented method.*

**Keywords:** Age-replacement, semi-Markov processes, cost per unit time, warranty.

Jan Studziński, Ludosław Drelichowski, Olgierd Hryniewicz  
(Redakcja)

**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA METOD ILOŚCIOWYCH  
I TECHNIK INFORMATYCZNYCH WSPOMAGAJĄCYCH  
PROCESY DECYZYJNE**

Monografia zawiera wybór artykułów dotyczących informatyzacji procesów zarządzania, prezentując aktualny stan rozwoju informatyki stosowanej w Polsce i na świecie. Zamieszczone artykuły opisują metody, modele, techniki i systemy informatyczne stosowane do wspomaganie procesów podejmowania decyzji, a także omawiają zastosowania narzędzi informatycznych w różnych sektorach gospodarki. Kilka prac przedstawia wyniki projektów badawczych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, dotyczących rozwoju metod informatycznych i ich zastosowań.

**ISBN 83-894-7506-5**  
**9788389475060**  
**ISSN 0208-8029**

---

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy  
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl