POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 3

Charakterystyki procesu semi-markowskiego

Jak wiemy z poprzedniego rozdziału proces semi-markowski jest skonstruowany, gdy znamy jego rozkład początkowy i jądro lub inne równoważne wielkości. W tych wielkościach zawarta jest pełna informacja o procesie SM. Wielkości te pozwalają nam obliczyć wiele ważnych charakterystyk i parametrów procesu, które w modelach niezawodnościowych są interpretowane jako charakterystyki i parametry niezawodności systemu.

3.1. Chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów

Niech $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ będzie procesem semi-markowskim o jądrze $Q(t)$. Przypomnijmy, że zmienna losowa

$$\Delta_A = \min\{n \in \mathbb{N} : X(\tau_n) \in A\}$$

oznacza liczbę zmian stanów włożonego łańcucha Markowa

$$\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

do chwili pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów A. Zmienna losowa

$$\Theta_A = \tau_{\Delta_A}$$

oznacza chwilę pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów A przez proces SM $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ lub chwilę pierwszego przejścia do podzbioru A tego procesu.

Niech

$$\Psi_{iA}(t,n) = P\{\tau_n \leqslant t, \Delta_A = n \,|\, X(0) = i\}\,, \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{3.1}$$

Korzystając z równości zdarzeń (1.23) otrzymujemy

$$\Psi_{iA}(t,n) = \begin{cases} P\{\tau_n \leqslant t, X(\tau_n) \in A, X(\tau_{n-1}) \in A', \ldots X(\tau_1) \in A' \,|\, X(0) = i\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots \\ P\{\tau_1 \leqslant t, X(\tau_1) \in A \,|\, X(0) = i\} \quad \text{dla} \quad n = 1 \end{cases}. \tag{3.2}$$

Wartość funkcji $\Psi_{iA}(t,n)$ oznacza prawdopodobieństwo pierwszego przejścia ze stanu $i \in A'$ do podzbioru A w czasie nie większym niż t, w wyniku n-tej zmiany stanu procesu $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$.

3.1.1. Własności funkcji Ψ_{iA}, $i \in A'$

1.

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} \Psi_{iA}(t,n) \leqslant f_{iA}(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

D o w ó d: Nierówność (3.3) wynika ze związków (1.24) oraz (3.1). □

2.

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{R}_+} \lim_{t \to \infty} \Psi_{iA}(t,n) = f_{iA}(n). \tag{3.4}$$

D o w ó d: Nierówność (3.4) wynika z równości (1.24) oraz (3.1). □

3. Jeżeli $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ jest procesem regularnym, to

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} \lim_{n \to \infty} \Psi_{iA}(t,n) = 0. \tag{3.5}$$

D o w ó d: Dowód wynika z twierdzenia 21 oraz nierówności

$$0 \leqslant \Psi_{iA}(t,n) \leqslant P\{\tau_n \leqslant t \,|\, X(0) = i\} \leqslant \frac{P\{\tau_n \leqslant t\}}{P\{X(0) = i\}}. \qquad \square$$

4. Jeżeli $i \xrightarrow{1} A$, to

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_{iA}(t,n) = 0. \tag{3.6}$$

D o w ó d: Założenie $i \xrightarrow{1} A$ oznacza równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{iA}(n) = 1,$$

skąd wynika związek

$$\lim_{n \to \infty} f_{iA}(n) = 0.$$

Stąd oraz z własności 1 otrzymujemy (3.6). □

5. Funkcje $\Psi_{iA}, i \in A'$ spełniają równania

$$\Psi_{iA}(t,1) = \sum_{j \in A} Q_{ij}(t), \tag{3.7}$$

$$\Psi_{iA}(t,n) = \sum_{k \in A'} \int_0^t \Psi_{kA}(t-x, n-1)\, dQ_{ik}(x), \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{3.8}$$

D o w ó d: Dla $n = 1$ mamy

$$\Psi_{iA}(t,1) = P\{\tau_1 \leqslant t, X(\tau_1) \in A \,|\, X(\tau_0) = i, \tau_0 = 0\} =$$
$$= P\{\xi_1 \in A, \vartheta_1 \leqslant t \,|\, \xi_0 = i\} = \sum_{j \in A} Q_{ij}(t).$$

Jak wiemy dwuwymiarowy ciąg $\{(X(\tau_n), \tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ jest dwuwymiarowym łańcuchem Markowa o zbiorze stanów $S \times \mathbb{R}_+$ o prawdopodobieństwach przejścia

$$P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} \leqslant t \,|\, X(\tau_n) = i, \tau_n = x\} = Q_{ij}(t - x). \tag{3.9}$$

Korzystając z tego faktu otrzymujemy

$$\Psi_{iA}(t,n) =$$
$$= \sum_{k \in A'} \int_0^t P\{\tau_n \leqslant t, X(\tau_n) \in A, X(\tau_{n-1}) \in A' \ldots X(\tau_2) \in A' \mid \tau_1 = x, X(\tau_1) = k\} \cdot$$
$$\cdot P\{\tau_1 \in dx, X(\tau_1) = k \mid X(\tau_0) = i, \tau_0 = 0\} =$$
$$= \sum_{k \in A'} \int_0^t \Psi_{kA}(t - x, n - 1) dQ_{ik}(x). \quad \square$$

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$\Psi_{iA}(t,2) = \sum_{k \in A'} \int_0^t \Psi_{kA}(t - x, 1) dQ_{ik}(x) =$$
$$= \sum_{k \in A'} \int_0^t \sum_{j \in A} Q_{kj}(t - x) dQ_{ik}(x) = \sum_{j \in A} \sum_{k \in A'} Q_{ik} * Q_{kj}(t).$$

Przez indukcję otrzymujemy równość

$$\Psi_{iA}(t,n) = \sum_{j \in A} \sum_{r_1, r_2, \ldots r_{n-1} \in A'} Q_{ir} * Q_{r_1 r_2} * \ldots * Q_{r_{n-1} j}(t). \tag{3.10}$$

Niech

$$\Phi_{iA}(t) = P\{\Theta_A \leqslant t \,|\, X(0) = i\}. \tag{3.11}$$

Zmienną losową o tak określonym rozkładzie oznaczmy symbolem Θ_{iA}. Oznacza ona czas pierwszego przejścia procesu semi-markowskiego ze stanu $i \in A'$ do podzbioru A. Mamy zatem

$$\Phi_{iA}(t) = P\{\Theta_{iA} \leqslant t\} = P\{\Theta_A \leqslant t \,|\, X(0) = i\}. \tag{3.12}$$

Zauważmy, że

$$\Phi_{iA}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{iA}(t,n). \tag{3.13}$$

TWIERDZENIE 26. *Niech $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ będzie regularnym procesem semi-markowskim takim, że $\bigwedge_{i \in A'} i \xrightarrow{1} A$. Wówczas istnieją dystrybuanty właściwe $\Phi_{iA}(t)$, $i \in A'$ i są one jedynymi rozwiązaniami układu równań*

$$\Phi_{iA}(t) = \sum_{j \in A} Q_{ij}(t) + \sum_{k \in A'} \int_0^t \Phi_{kA}(t-x)dQ_{ik}(x), \quad i \in A'. \tag{3.14}$$

D o w ó d: Z założenia

$$\bigwedge_{i \in A'} \sum_{n=1}^{\infty} f_{iA}(n) = 1.$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} \Psi_{iA}(t,n) \leqslant f_{iA}(n),$$

więc na mocy kryterium Weierstrassa szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{iA}(t,n)$ jest jednostajnie zbieżny w $\mathbb{R}_+$. Zatem funkcja

$$\Phi_{iA}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{iA}(t,n)$$

istnieje i jest ona dystrybuantą właściwą, gdyż

$$\lim_{t \to \infty} \Phi_{iA}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \to \infty} \Psi_{iA}(t,n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{iA}(n) = 1.$$

Związki te zachodzą dla wszystkich $i \in A'$, a więc dla wszystkich $i \in A'$ funkcje $\Phi_{iA}(t)$ istnieją i są one dystrybuantami właściwymi. Korzystając z równości (3.13) i (3.8) mamy

$$\Phi_{iA}(t) = \Psi_{iA}(t,1) + \sum_{n=2}^{\infty} \Psi_{iA}(t,n) =$$

$$= \sum_{j \in A} Q_{ij}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k \in A'} \int_0^t \Psi_{kA}(t-x, n-1)dQ_{ik}(x) =$$

$$= \sum_{j \in A} Q_{ij}(t) + \sum_{k \in A'} \int_0^t \Phi_{kA}(t-x)dQ_{ik}(x), \quad i \in A'.$$

Wykazaliśmy więc, że funkcje $\Phi_{iA}(t)$, $i \in A'$ spełniają układ równań (3.14). Posługując się symbolem iloczynu splotowego, równania te można przedstawić w postaci

$$\Phi_{iA}(t) = \sum_{j \in A} Q_{ij}(t) + \sum_{k \in A'} Q_{ik} * \Phi_{kA}(t), \quad i \in A'. \tag{3.15}$$

Wykażemy, że rozwiązanie tego układu równań jest jednoznaczne. Przypuśćmy, że istnieją inne funkcje $\hat{\Phi}_{iA}, i \in A'$ spełniające układ równań (3.15), tzn. takie, że

$$\hat{\Phi}_{iA}(t) = \sum_{j \in A} Q_{ij}(t) + \sum_{k \in A'} Q_{ik} * \hat{\Phi}_{kA}(t), \ i \in A'. \tag{3.16}$$

Biorąc pod uwagę układy równań (3) i (4) otrzymujemy układ równań

$$\Phi_{iA}(t) - \hat{\Phi}_{iA}(t) = \sum_{k \in A'} Q_{ik} * (\Phi_{kA}(t) - \hat{\Phi}_{kA}(t)).$$

Oznaczając

$$W_i(t) = \Phi_{iA}(t) - \hat{\Phi}_{iA}(t), \quad i \in A'$$

otrzymujemy

$$W_i(t) = \sum_{k \in A'} Q_{ik} * W_k(t), \quad i \in A'. \tag{3.17}$$

Można łatwo wykazać, że ten układ równań jest równoważny układowi równań

$$W_i(t) = \sum_{k \in A'} \sum_{r_1 \in A'} \cdots \sum_{r_{n-1} \in A'} Q_{ir_1} * Q_{r_1 r_2} * \ldots * Q_{r_{n-1}k} W_k(t), \quad i \in A', n = 2, 3 \ldots. \tag{3.18}$$

Zauważmy, że

$$\sup_k (\sup_t \mid W_k(t) \mid) \leqslant 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} W_i(t) &\leqslant \sum_{k \in A'} \sum_{r_1 \in A'} \cdots \sum_{r_{n-1} \in A'} Q_{ir_1} * Q_{r_1 r_2} * \ldots * Q_{r_{n-1}k}(t) = \\ &= P\{\tau_n \leqslant t, X(\tau_n) \in A', X(\tau_{n-1}) \in A', \ldots X(\tau_1) \in A' \mid X(\tau_0) = i, \tau_0 = 0\} \leqslant \\ &\leqslant P\{\tau_n \leqslant t \mid X(0) = i\} \leqslant \frac{P\{\tau_n \leqslant t\}}{P\{X(0) = i\}}, \quad i \in A', \end{aligned}$$

Z regularności procesu $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ wynika związek

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} \lim_{n \to \infty} P\{\tau_n \leqslant t\} = 0.$$

Stąd

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} W_i(t) = 0.$$

A zatem $\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} \hat{\Phi}_{iA}(t) = \Phi_{iA}(t)$, co oznacza, że rozwiązanie układu równań jest jednoznaczne. $\square$

Układ (3.14) poddany transformacji Laplace'a-Stieltjesa przyjmuje postać

$$\tilde{\phi}_{iA}(s) = \sum_{j \in A} \tilde{q}_{ij}(s) + \sum_{k \in A'} \tilde{q}_{ik}(s) \tilde{\phi}_{kA}(s), \tag{3.19}$$

gdzie

$$\tilde{\phi}_{iA}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Phi_{iA}(t),$$
$$\tilde{q}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ij}(t).$$

Otrzymaliśmy układ równań liniowych, w których współczynnikami są transformaty $\tilde{q}_{ij}(s)$, a niewiadomymi transformaty $\tilde{\phi}_{iA}(s)$. Układ ten jest równoważny równaniu macierzowemu

$$(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}_{A'}(s))\, \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{A'}(s) = \tilde{\boldsymbol{b}}(s)\,, \tag{3.20}$$

gdzie

$$\boldsymbol{I} = [\delta_{ij} : i, j \in A'] \tag{3.21}$$

jest macierzą jednostkową,

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{A'}(s) = [\tilde{q}_{ij}(s) : i, j \in A'] \tag{3.22}$$

jest podmacierzą kwadratową macierzy transformat $\tilde{\boldsymbol{q}}(s)$, natomiast macierze

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{A'}(s) = [\tilde{\phi}_{iA}(s) : i \in A']^T\,, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}(s) = [\sum_{j \in A} \tilde{q}_{ij}(s) : i \in A']^T \tag{3.23}$$

są jednokolumnowymi macierzami odpowiednich transformat Laplace'a-Stieltjesa. Układ ten pozwala znaleźć równania dla momentów zmiennych losowych $\Theta_{iA}, i \in A'$.

TWIERDZENIE 27. *Jeżeli*

1. *spełnione są założenia twierdzenia* 26,
2. $\bigvee_{c>0} \quad \bigwedge_{i,j \in S} \; 0 < E(T_{ij}) \leqslant c$,
3. $\bigwedge_{i \in A} \quad \mu_{iA} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{iA}(n) < \infty$,

to istnieją skończone wartości oczekiwane $E(\Theta_{iA})$, $i \in A'$ *i są one jedynymi rozwiązaniami układu równań*

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{A'})\overline{\boldsymbol{\Theta}}_{A'} = \overline{\boldsymbol{T}}_{A'}\,, \tag{3.24}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{A'} &= [p_{ij} : i, j \in A']\,, \\ \overline{\boldsymbol{\Theta}}_{A'} &= [E(\Theta_{iA}) : i \in A']^T, \\ \overline{\boldsymbol{T}}_{A'} &= [E(T_i) : i \in A'] \end{aligned}$$

oraz $\boldsymbol{I}$ *jest macierzą jednostkową.*

D o w ó d: Istnienie skończonych wartości oczekiwanych zmiennych losowych $\Theta_{iA}, i \in A'$

wynika z następujących związków:

$$E(\Theta_{iA}) = \int_0^\infty t d\Phi_{iA}(t) = \sum_{n=1}^\infty t d\Psi_{iA}(t,n) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \sum_{j\in A} \sum_{r_1\in A'} \cdots \sum_{r_{n-1}\in A'} \int_0^\infty t d(Q_{ir_1} * \ldots * Q_{r_{n-1}j}(t)) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \sum_{j\in A} \sum_{r_1\in A'} \cdots \sum_{r_{n-1}\in A'} p_{ir_1} \ldots p_{r_{n-1}j} \int_0^\infty t d(F_{ir_1} * \ldots * F_{r_{n-1}j}(t)) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \sum_{j\in A} \sum_{r_1\in A'} \cdots \sum_{r_{n-1}\in A'} p_{ir_1} \ldots p_{r_{n-1}j} [E(T_{ir_1}) + \ldots + E(T_{r_{n-1}j})] \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{n=1} n \sum_{j\in A} \sum_{r_1\in A'} \cdots \sum_{r_{n-1}\in A'} p_{ir_1} \ldots p_{r_{n-1}j} =$$

$$= c \sum_{n=1}^{n} n f_{iA}(n) = c\mu_{iA} < \infty .$$

Wartości oczekiwane $E(\Theta_{iA}), i \in A'$ wyznaczamy korzystając z równości

$$E(\Theta_{iA}) = -\frac{d\tilde{\phi}_{iA}(s)}{ds} |_{s=0}, \quad i \in A'.$$

Różniczkując względem s równania (3.19) otrzymujemy

$$\frac{d\tilde{\phi}_{iA}(s)}{ds} = \sum_{j\in A} \frac{d\tilde{q}_{ij}(s)}{ds} + \sum_{k\in A'} \frac{d\tilde{q}_{ik}(s)}{ds} \tilde{\phi}_{kA}(s) + \tilde{q}_{ik}(s) \frac{d\tilde{\phi}_{kA}(s)}{ds}, \quad i \in A'. \tag{3.25}$$

Ponieważ

$$-\frac{d\tilde{q}_{ij}(s)}{ds} |_{s=0} = p_{ij} E(T_{ij}), \quad \tilde{q}_{ij}(s) |_{s=0} = p_{ij},$$

$$\tilde{\phi}_{kA}(s) |_{s=0} = 1,$$

więc

$$E(\Theta_{iA}) = \sum_{j\in A} p_{ij} E(T_{ij}) + \sum_{k\in A'} p_{ik} [E(T_{ik}) + E(\Theta_{kA})].$$

Korzystając z równości

$$\sum_{j\in A} p_{ij} E(T_{ij}) + \sum_{k\in A'} p_{ik} E(T_{ik}) = \sum_{j\in S} p_{ij} E(T_{ij}) = E(T_i)$$

otrzymujemy układ równań liniowych

$$E(\Theta_{iA}) = E(T_i) + \sum_{k\in A'} p_{ik} E(\Theta_{kA}), \quad i \in A',$$

który w zapisie macierzowym przyjmuje postać (3.24). Jednoznaczność wynika z jednoznaczności rozwiązania układu równań (3.14) dla dystrybuant rozkładów zmiennych losowych $\Theta_{iA}, i \in A'$. $\square$

TWIERDZENIE 28. *Jeżeli*

1. *spełnione są założenia twierdzenia 26,*
2. $\bigvee_{d>0} \bigwedge_{i,j\in S}\ 0 < E(T_{ij}^2) \leqslant d$,
3. $\bigwedge_{i\in A}\quad \mu_{iA}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_{iA}(n) < \infty$,

to istnieją drugie momenty $E(\Theta_{iA}^2), i \in A'$ *i są one jedynymi rozwiązaniami układu równań*

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{A'})\overline{\boldsymbol{\Theta}}_{A'}^2 = \boldsymbol{B}_A\,, \tag{3.26}$$

gdzie

$$\boldsymbol{P}_{A'} = [p_{ij} : i, j \in A'],$$
$$\overline{\boldsymbol{\Theta}}_{A'} = [E(\Theta_{iA}^2) : i \in A']^T,$$
$$\boldsymbol{B}_A = [b_{iA} : i \in A']^T, \quad b_{iA} = E(T_i^2) + 2\sum_{k\in A'} p_{ik}E(T_{ik})E(\Theta_{kA}).$$

D o w ó d: Wykażemy, że istnieją skończone drugie momenty $E(\Theta_{iA}^2)$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 27 otrzymujemy

$$E(\Theta_{iA}) = \int_0^\infty t^2 d\Phi_{iA}(t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in A}\sum_{r_1\in A'}\cdots\sum_{r_{n-1}\in A'} td(Q_{ir_1} * \ldots * Q_{r_{n-1}j}(t)) =$$
$$= \sum_{r_1\in A'}\cdots\sum_{r_{n-1}\in A'} p_{ir_1}\cdots p_{r_{n-1}j}\int_0^\infty t^2 d(F_{ir_1} * \ldots * F_{r_{n-1}j}(t)).$$

Ponieważ

$$\int_0^\infty t^2 d(F_{ir_1} * \ldots * F_{r_{n-1}j}(t)) \;=\; E[(T_{ir} + \ldots + T_{r_{n-1}j})^2] =$$
$$= \; E[(T_{ir})^2 + \ldots + E(T_{ir_1}T_{r_1r_2}) + \ldots + E(T_{ir_1}T_{r_{n-1}r_j}) + \ldots +$$
$$+E(T_{ir_1}T_{r_{n-1}r_j}) + E(T_{r_1r_2}T_{r_{n-1}j}) + \ldots + +E(T_{r_{n-1}j}^2) \leqslant n^2 d,$$

więc

$$E(\Theta_{iA}^2) \leqslant d\sum_{n=1} n^2 f_{iA}(n) = d\cdot\overline{\mu_{iA}^2}.$$

Różniczkując względem s równania (3.25) otrzymujemy

$$\frac{d^2\tilde{\phi}_{iA}(s)}{ds^2} = \sum_{j\in A}\frac{d^2\tilde{q}_{ij}(s)}{ds^2} + \sum_{k\in A'}\frac{d^2\tilde{q}_{ik}(s)}{ds^2}\tilde{\phi}_{kA}(s) +$$
$$+2\frac{d\tilde{q}_{ik}(s)}{ds}\frac{\tilde{\phi}_{kA}(s)}{ds} + \tilde{q}_{ik}(s)\frac{d^2\tilde{\phi}_{kA}(s)}{ds^2}, \quad i \in A'.$$

Podstawiając $s = 0$ mamy

$$E(\Theta_{iA}^2) = E(T_i^2) + \sum_{k\in A'} p_{ik}E(\Theta_{kA}^2) + 2\sum_{k\in A'} p_{ik}E(T_{ik})E(\Theta_{kA}), \quad i \in A'. \tag{3.27}$$

Otrzymaliśmy układ równań, który w zapisie macierzowym przyjmuje postać (3.26). Jednoznaczność rozwiązania wynika z twierdzenia 26. □

Ważną wielkością jest czas powrotu procesu semi-markowskiego do określonego stanu.

DEFINICJA 38. *Funkcję*

$$\Phi_{jj}(t) = P\{\tau_{\Delta_j} \leqslant t \,|\, X(0) = j\}\ , \quad i \in S\ , \tag{3.28}$$

gdzie

$$\Delta_j = \min\{n \in \mathbb{N} : X(\tau_n) = j\},$$

nazywamy dystrybuantą rozkładu czasu powrotu do stanu j *procesu semi-markowskiego. Zmienną losową o tak określonym rozkładzie oznaczamy symbolem* Θ_{jj}.

TWIERDZENIE 29. *Niech* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *będzie regularnym procesem semi-markowskim o jądrze* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$. *Jeżeli dla każdego* $i \in S$ $f_{ij} = 1$,*to istnieje jedyna właściwa dystrybuanta czasu powrotu do stanu* j *oraz wyraża się ona wzorem*

$$\Phi_{jj}(t) = Q_{jj}(t) + \sum_{k\in S-\{j\}} \int_0^t \Phi_{kj}(t-x)dQ_{jk}(x)\ . \tag{3.29}$$

D o w ó d: Istnienie jedynej właściwej dystrybuanty czasu powrotu wynika z twierdzenia 26 dla $A = \{j\}$. Wyprowadzenie wzoru jest podobne do wyprowadzenia wzoru w tym samym twierdzeniu. □

Odpowiadające temu równaniu, równanie dla transformat Laplace'a-Stieltjesa ma postać

$$\tilde{\phi}_{jj}(s) = \tilde{q}_{jj}(s) + \sum_{k\in S-\{j\}} \tilde{q}_{jk}(s)\tilde{\phi}_{kj}(s). \tag{3.30}$$

TWIERDZENIE 30. *Jeżeli*

1. *spełnione są założenia twierdzenia* 29,
2. $\bigvee_{d>0} \bigwedge_{i,j\in S}\ 0 < E(T_{ij}^2) \leqslant d$,
3. $\bigwedge_{i\in S}\ \mu_{ij}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_{ij}(n) < \infty$,

to istnieją wartości oczekiwane $E(\Theta_{jj})$ *i drugie momenty* $E(\Theta_{jj}^2)$ *oraz*

$$E(\Theta_{jj}) = E(T_j) + \sum_{k\in S-\{j\}} p_{jk}E(\Theta_{kj})\ , \tag{3.31}$$

$$E(\Theta_{jj}^2) = E(T_j^2) + \sum_{k\in S-\{j\}} p_{jk}E(\Theta_{kj}^2) + 2\sum_{k\in S-\{j\}} p_{jk}E(T_{jk})E(\Theta_{kj})\ . \tag{3.32}$$

D o w ó d: Istnienie skończonych wartości oczekiwanych i drugich momentów wynika z twierdzenia 29. Wzory (3.31), (3.32) otrzymujemy w podobny sposób jak wzory (3.23), (3.27). □

PRZYKŁAD 10. Rozważmy proces semi-markowski o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3\}$ i jądrze

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2(1-e^{-0.1t}) & 0.8(1-e^{-0.1t}) \\ 1-e^{-t} & 0 & 0 \\ 1-(1+0.2t)e^{-0.2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0.$$

Znajdziemy rozkład chwili pierwszego osiągnięcia stanu 3, pod warunkiem, że w chwili 0 stanem procesu jest stan $i \in A' = \{1, 2\}$ Macierz transformat Laplace'a-Stieltjesa jądra procesu ma postać

$$\tilde{q}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.02}{s+0.1} & \frac{0.08}{s+0.1} \\ \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ \frac{0.04}{(s+0.2)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze transformat występujące w równaniu (3.20) wyrażają się wzorami

$$\tilde{q}_{A'}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.02}{s+0.1} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\phi}_{A'}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{13}(s) \\ \tilde{\phi}_{23}(s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_{A'} = \begin{bmatrix} \frac{0.08}{s+0.1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Równanie (3.20) ma w tym przypadku postać

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.02}{s+0.1} \\ -\frac{1}{s+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{13}(s) \\ \tilde{\phi}_{23}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.08}{s+0.1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$\tilde{\phi}_{13}(s) = \frac{0.0781599}{s+0.0783009} + \frac{0.00184008}{s+1.0217},$$
$$\tilde{\phi}_{23}(s) = \frac{0.0847998}{s+0.0783009} - \frac{0.0847998}{s+1.0217}$$

Znajdując transformaty odwrotne otrzymujemy gęstości rozkładów zmiennych losowych Θ_{13}, Θ_{23}.

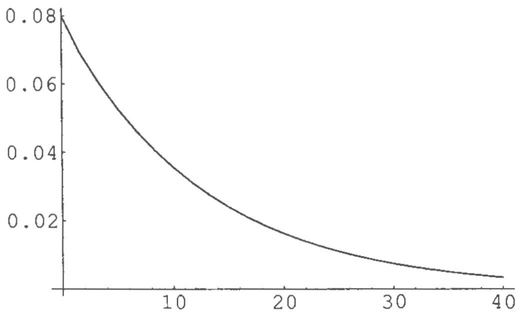
$$\phi_{13}(t) = 0.0781599e^{-0.0783009t} + 0.00184008e^{-1.0217t}, \quad t \geqslant 0,$$
$$\phi_{23}(t) = 0.0847998e^{-0.0783009t} - 0.08479980e^{-1.0217t}, \quad t \geqslant 0.$$

Wykresy tych funkcji przedstawione są na rysunkach 3.10 i 3.11.

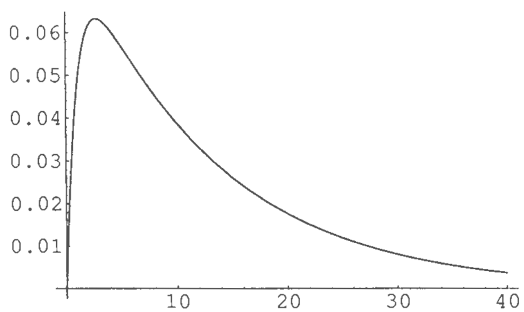
Momenty zwykłe rozpatrywanych tu zmiennych losowych można obliczyć w oparciu o wzory

$$E(\Theta_{i3}^k) = \int_0^\infty t^k \phi(t)dt, \quad i \in A' = 1, 2.$$

Wartości oczekiwane i wariancje tych zmiennych losowych otrzymamy korzystając ze wzorów



Rys. 3.10. Wykres gęstości $\phi_{13}(t)$



Rys. 3.11. Wykres gęstości $\phi_{23}(t)$

$$E(\Theta_{i3}) = \int_0^\infty t\phi(t)dt\ , \quad i \in A' = 1, 2,$$
$$V(\Theta_{i3}) = E(\Theta_{i3}^2) - [E(\Theta_{i3})]^2\ ,;\ i \in A' = 1, 2.$$

Wartości oczekiwane i wariancje tych zmiennych losowych można również obliczyć w oparciu o udowodnione twierdzenia. Korzystając ze wzoru (2.2) wyznaczamy macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w rozpatrywany tu proces semimarkowski

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z postaci jądra rozpatrywanego tu procesu semi-markowskiego wynika, że dystrybuanty zmiennych losowych T_i , $i \in S$ oznaczających czasy trwania stanów procesu oraz dystrybuanty zmiennych losowych T_{ij}, oznaczających warunkowe czasy trwania stanów mają postać

$$G_1(t) = P\{T_1 \leqslant t\} = 1 - e^{-0.1t}\ , \quad t \geqslant 0,$$
$$G_2(t) = P\{T_2 \leqslant t\} = 1 - e^{-t}\ , \quad t \geqslant 0,$$
$$G_3(t) = P\{T_3 \leqslant t\} = 1 - (1 + 0.2t)e^{-0.2t}\ , \quad t \geqslant 0,$$

$$F_{12}(t) = P\{T_{12} \leqslant t\} = 1 - e^{-0.1t}\,, \quad t \geqslant 0,$$
$$F_{13}(t) = P\{T_{13} \leqslant t\} = 1 - e^{-0.1t}\,, \quad t \geqslant 0,$$
$$F_{21}(t) = P\{T_{21} \leqslant t\} = 1 - e^{-t}\,, \quad t \geqslant 0,$$
$$F_{31}(t) = P\{T_{31} \leqslant t\} = 1 - (1 + 0.2t)e^{-0.2t}\,, \quad t \geqslant 0.$$

Stąd

$$E(T_1) = E(T_{12}) = E(T_{13}) = 10\,, \quad E(T_2) = E(T_{21}) = 1\,, \quad E(T_3) = E(T_{31}) = 10\,,$$
$$E(T_1^2) = E(T_{12}^2) = E(T_{13}^2) = 200\,, \quad E(T_2^2) = E(T_{21}^2) = 2\,, \quad E(T_3^2) = E(T_{31}^2) = 150\,.$$

$\triangle$

3.2. Prawdopodobieństwa przejścia

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = i \,|\, X(0) = i\}\,, \quad i, j \in S \tag{3.35}$$

nazywamy ***prawdopodobieństwem przejścia*** ze stanu i w chwili 0 do stanu j w chwili t. Prawdopodobieństwa przejścia są jedną z ważnych wielkości charakteryzujących proces semi-markowski $\{X(t) \,:\, t \in \mathbb{R}_+\}$. Feller [15] podał równania pozwalające obliczyć te prawdopodobieństwa w oparciu o wielkości definiujące proces SM. Równania te wyprowadzimy.

Niech $\{X(t) \,:\, t \in \mathbb{R}_+\}$ będzie procesem semi- markowskim o skończonym lub przeliczalnym zbiorze stanów i jądrze $Q(t) = [Q_{ij}(t) \,:\, i, j \in S]$. Załóżmy, że $i \neq j$. Proces semi-markowski, który w chwili 0 ma wartość $i \in S$, w chwili $t > 0$ będzie miał wartość $j \in S$ wtedy, gdy w chwili τ_1 nastąpi przejście procesu do pewnego stanu $k \in S$ oraz w przedziale $(\tau_1, t]$ nastąpi (co najmniej jedna) zmiana stanu z j na k. Korzystając z własności „braku pamięci" procesu semi-markowskiego przy znanym stanie w chwili τ_1 mamy

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j \,|\, X(0) = i\} =$$
$$\sum_{k \in S} \int_0^t P\{X(t) = j \,|\, X(\tau_1) = k\} P\{X(\tau_1) = k, \tau_1 \in dx \,|\, X(0) = i\} =$$
$$= \sum_{k \in S} \int_0^t P_{kj}(t - x) dQ_{ik}(x)\,, \quad i, j \in S,\ i \neq j\,.$$

Załóżmy teraz, że $i = j$. Proces semi-markowski, który w chwili 0 ma wartość $i \in S$, w chwili $t > 0$ będzie miał wartość $i \in S$ również wtedy, gdy w chwili τ_1 nie nastąpi zmiana stanu procesu a więc gdy zajdzie zdarzenie $\{\tau_1 > t\}$. Ponieważ $P\{\tau_1 \leqslant t \,|\, X(0) = i\} = G_i(t)$ więc $P\{\tau_1 > t \,|\, X(0) = i\} = 1 - G_i(t)$. Zatem dla $i \in S$.

$$P_{ii}(t) = 1 - G_i(t) + \sum_{k \in S} \int_0^t P_{ki}(t - x) dQ_{ik}(x)\,.$$

Tak więc otrzymaliśmy następujący układ równań całkowych

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}[1 - G_i(t)] + \sum_{k \in S} \int_0^t P_{kj}(t - x) dQ_{ik}(x)\,, \quad i, j \in S. \tag{3.36}$$

TWIERDZENIE 31. *Jeżeli* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *jest regularnym procesem semi-markowskim o dyskretnym zbiorze stanów* S *takim, że dla każdego* $i, j \in S$, $i \to j$ *lub* $j \to i$, *to układ równań całkowych* (3.36) *ma jednoznaczne rozwiązanie.*

D o w ó d: Twierdzenie jest wnioskiem z twierdzenia podanego w pracy Koroluka i Turbina [38]. □

Rozwiązanie tego układu można znaleźć posługując się przekształceniem Laplace'a-Stieltjesa. Niech

$$\tilde{p}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dP_{ij}(t) , \tag{3.37}$$

$$\tilde{q}_{ik}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ik}(t) , \tag{3.38}$$

$$\tilde{g}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_i(t) . \tag{3.39}$$

Układowi równań całkowych odpowiada układ równań algebraicznych o niewiadomych transformatach $\tilde{p}_{ij}(s)$, $i, j \in S$:

$$\tilde{p}_{ij}(s) = \delta_{ij}[1 - \tilde{g}_i(s)] + \sum_{k \in S} \tilde{q}_{ik}(s)\tilde{p}_{kj}(s) , \quad i, j \in S . \tag{3.40}$$

Przyjmując notację macierzową

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = [\tilde{p}_{ij}(s) : i, j \in S] , \quad \tilde{\boldsymbol{g}}(s) = [\delta_{ij}\tilde{g}_i(s) : i, j \in S] ,$$
$$\tilde{\boldsymbol{q}}(s) = [\tilde{q}_{ij}(s) : i, j \in S] , \quad \boldsymbol{I} = [\delta_{ij} : i, j \in S]$$

otrzymujemy równanie

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = (\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{g}}(s)) + \tilde{\boldsymbol{q}}(s)\tilde{\boldsymbol{p}}(s) . \tag{3.41}$$

Stąd

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = (\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}(s))^{-1}(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{g}}(s)) . \tag{3.42}$$

PRZYKŁAD 11. Niech $\{X(t) : i \in \mathbb{R}_+\}$ będzie procesem SM o zbiorze stanów $S = \{0, 1\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - (1 + t)e^{-t} \\ 1 - e^{-0.1t} & 0 \end{bmatrix} . \tag{3.43}$$

Jest to proces alternujący rozpatrywany jako przykład 2.4.1 z parametrami $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$. W tym przypadku $G_0(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$, $G_1(t) = 1 - e^{-0.1t}$, $t \geqslant 0$.
Korzystając z przekształcenia Laplace'a-Stieltjesa obliczymy prawdopodobieństwa przejścia tego procesu. Macierz transformat Laplace'a-Stieltjesa jądra $\boldsymbol{Q}(t)$ ma postać

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{0.1}{s+0.1} & 0 \end{bmatrix} . \tag{3.44}$$

Macierz transformat rozkładów czasów trwania stanów ma postać

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{0.1}{s+0.1} \end{bmatrix} . \tag{3.45}$$

Korzystając z pakietu programów MATHEMATICA, na podstawie wzoru (3.42) obliczmy macierz $\tilde{p}(s)$

$$\tilde{p}(s) = \begin{bmatrix} \frac{(0.1+s)(2+s)}{1.2+2.1s+s^2} & \frac{1}{1.2+2.1s+s^2} \\ \\ \frac{0.1(2+s)}{1.2+2.1s+s^2} & \frac{(1+s)^2}{1.2+2.1s+s^2} \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Transformaty Laplace'a prawdopodobieństw przejścia $\tilde{P}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{ij}(t)dt$ obliczamy korzystając ze związku tych transformat z transformatami Laplace'a-Stieltjesa:

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \frac{\tilde{p}_{ij}(s)}{s}, \quad i, j \in S.$$

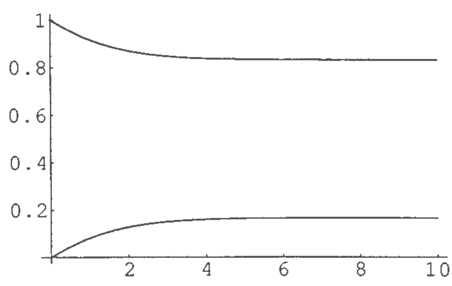
Po uproszczeniach otrzymujemy

$$\tilde{P}_{00}(s) = \frac{0.166667}{s} + \frac{1.75 + 0.833333s}{1.2 + 2.1s + s^2},$$
$$\tilde{P}_{01}(s) = \frac{0.833333}{s} - \frac{1.75 + 0.833333s}{1.2 + 2.1s + s^2},$$
$$\tilde{P}_{10}(s) = \frac{0.166667}{s} - \frac{0.25 + 0.166667s}{1.2 + 2.1s + s^2},$$
$$\tilde{P}_{11}(s) = \frac{0.833333}{s} + \frac{0.25 + 0.166667s}{1.2 + 2.1s + s^2}.$$

Obliczając transformaty odwrotne otrzymujemy prawdopodobieństwa przejścia

$$P_{00}(t) = 0.166667 + e^{-1.05t}[0.833333\cos(0.31225t) + 2.802253\sin(0.31225t)],$$
$$P_{01}(t) = 0.833333 - e^{-1.05t}[0.833333\cos(0.31225t) + 2.802253\sin(0.31225t)],$$
$$P_{10}(t) = 0.166667 - e^{-1.05t}[0.166667\cos(0.31225t) + 0.2401911\sin(0.31225t)],$$
$$P_{11}(t) = 0.833333 + e^{-1.05t}[0.166667\cos(0.31225t) + 0.2401911\sin(0.31225t)].$$

Wykresy funkcji $P_{10}(t)$, $P_{11}(t)$ przedstawione są na rysunku 3.12 . $\triangle$



Rys. 3.12. Wykres prawdopodobieństw warunkowych $P_{10}(t)$ oraz $P_{11}(t)$

PRZYKŁAD 12. Obliczymy prawdopodobieństwa przejścia procesu Poissona. Z postaci jądra tego procesu wynika natychmiast, że z dodatnim prawdopodobieństwem możliwe są jedynie przejścia z dowolnych stanów do stanów o numerach większych, tzn. $P_{ij}(t) = 0,\ t \geqslant 0$, gdy $i > j$. Macierz transformat Laplace'a-Stieltjesa jądra procesu Poissona ma postać

$$\tilde{q}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Ponieważ $\tilde{p}_{ij}(s) = 0$ dla $i > j$, więc układ równań (3.40) przyjmuje postać

$$\tilde{p}_{ii}(s) = \frac{s}{s+\lambda}, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tag{3.48}$$

$$\tilde{p}_{ij}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}\tilde{p}_{i+1j}(s), \quad i,j \in S, 0 \leqslant i+1 \leqslant j$$

Stąd

$$\tilde{p}_{ii+1}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}\tilde{p}_{i+1i+1}(s) = \frac{\lambda s}{(s+\lambda)^2}, \quad i \in S.$$

Przez indukcję otrzymujemy

$$\tilde{p}_{ii+k}(s) = \frac{\lambda^k s}{(s+\lambda)^{k+1}}, \quad i \in S, k \in \mathbb{N}.$$

Prawdopodobieństwa przejścia otrzymujemy wyznaczając transformaty odwrotne

$$P_{ii}(t) = L^{-1}\left[\frac{\tilde{p}_{ii}(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s+\lambda}\right] = e^{-\lambda t}, t \geqslant 0, \ j \in \mathbb{N}_0,$$

$$P_{ii+k}(t) = L^{-1}\left[\frac{\tilde{p}_{ii+k}(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^{k+1}}\right] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, t \geqslant 0, \quad i \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}.$$

△

PRZYKŁAD 13. Obliczymy prawdopodobieństwa przejścia procesu Furry'ego-Yule'a. Z postaci jądra tego procesu, tak jak w przypadku procesu Poissona wynika, że z dodatnim prawdopodobieństwem możliwe są jedynie przejścia z dowolnych stanów do stanów o numerach większych, tzn. $P_{ij}(t) = 0,\ t \geqslant 0$, gdy $i > j$. Macierz transformat Laplace'a-Stieltjesa jądra procesu Furry'ego-Yule'a ma postać

$$\tilde{q}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1\lambda}{s+1\lambda} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\lambda}{s+2\lambda} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda}{s+3\lambda} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Ponieważ $\tilde{p}_{ij}(s) = 0$ dla $i > j$, więc układ równań (3.40) przyjmuje postać

$$\tilde{p}_{ii}(s) = \frac{s}{s+i\lambda}, \ i \in \mathbb{N}, \quad \tilde{p}_{00}(s) = \frac{s}{s+\lambda}, \tag{3.50}$$

$$\tilde{p}_{ij}(s) = \frac{i\lambda}{s+i\lambda}\tilde{p}_{i+1j}(s), \quad i,j \in S, 0 \leqslant i+1 \leqslant j.$$

Stąd

$$\tilde{p}_{ii+1}(s) = \frac{i\lambda}{s+i\lambda}\tilde{p}_{i+1i+1}(s) = \frac{i\lambda s}{[s+i\lambda][s+(i+1)\lambda]}\,, \quad i \in S\,.$$

Przez indukcję otrzymujemy

$$\tilde{p}_{ii+k}(s) = \frac{i(i+1)(i+2)\dots(i+k-1)\lambda^k s}{[s+i\lambda][s+(i+1)\lambda]\dots[s+(i+k)\lambda]}\,, \quad i \in S\,.$$

Korzystając ze związku transformaty Laplace'a z transformatą Laplace'a-Stieltjesa otrzymujemy

$$\tilde{P}_{00}(s) = \frac{1}{s+\lambda}\,, \tilde{P}_{ii}(s) = \frac{1}{s+i\lambda}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

Stąd

$$P_{00}(t) = e^{-\lambda t}\,, \quad P_{ii}(t) = e^{-i\lambda t}\,, \quad t \geqslant 0,\ i \in \mathbb{N}\,.$$

Dla $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\tilde{P}_{ii+k}(s) = \frac{\tilde{p}_{ii+k}(s)}{s} = \frac{i(i+1)(i+2)\dots(i+k-1)\lambda^k}{[s+i\lambda][s+(i+1)\lambda]\dots[s+(i+k)\lambda]}\,.$$

Po prostych przekształceniach mamy

$$\tilde{P}_{ii+k}(s) = \binom{i+k-1}{k}\frac{\lambda^k k!}{(s+i\lambda)(s+i\lambda+\lambda)\dots(s+i\lambda+k\lambda)}\,.$$

Zauważmy, że korzystając z dwóch następujących własności transformaty Laplace'a

$$L[e^{-at}f(t)] = \tilde{f}(s+a)\,,$$

$$L[(1-e^{-\lambda t})^k] = \frac{\lambda^k k!}{s(s+\lambda)(s+2\lambda)\dots(s+k\lambda)}\,,$$

dla $a = i\lambda$ otrzymujemy również

$$\tilde{P}_{ii+k}(s) = L\left[\binom{i+k-1}{k}e^{-\lambda ti}(1-e^{-\lambda t})^k\right].$$

Stąd dla $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ mamy wzór

$$P_{ii+k}(t) = \binom{i+k-1}{k}e^{-\lambda ti}(1-e^{-\lambda t})^k. \qquad \triangle$$

3.3. Prawdopodobieństwa graniczne

W wielu modelach rozkład jednowymiarowy procesu po pewnym czasie stabilizuje się i prawdopodobieństwa stanów w chwili t odległej od chwili 0 zmierzają do stałych. Wówczas prawdopodobieństwa stanów obiektu można przybliżyć prawdopodobieństwami granicznymi

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_j(t) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = j\}\,, \quad j \in S\,, \tag{3.51}$$

$$P_{ij} = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = j \,|\, X(0) = i\}\,, \quad j \in S\,. \tag{3.52}$$

Nasuwają się naturalne pytania: Jakie warunki musi spełniać proces semi-markowski, by rozkład graniczny istniał? Jak znaleźć rozkład graniczny?

Żeby odpowiedzieć na te pytania przytoczymy najpierw ogólne (zasadnicze) twierdzenie graniczne dla procesów semi-markowskich o dyskretnym zbiorze stanów, stanowiące wersję twierdzenia z pracy Koroluka i Turbina [38], przystosowaną do zdefiniowanych tu pojęć.

Rozważania ograniczymy do procesów semi-markowskich określonych przez jądra odnowy typu ciągłego.

DEFINICJA 39. *Jądro odnowy jest typu ciągłego, jeżeli każdy wiersz macierzy* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i,j \in S]$ *zawiera co najmniej jedną funkcję, która w rozkładzie Lebesgue'a zawiera składnik absolutnie ciągły (względem miary Lebesgue'a).*

PRZYKŁAD 14. Macierz $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i,j \in S]$ o elementach

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} G_i(t)\ ,\quad i \in S\ ,$$

gdzie

$$G_i(t) = c\, I_{[1,\infty)}(t) + (1-c)\int\limits_0^t h_i(u)du,$$

$c \in (0,\,1)$, $p_{ij} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j \in S} p_{ij} = 1$ natomiast $h_i(\cdot)$ jest gęstością (względem miary Lebesgue'a) rozkładu prawdopodobieństwa, jest przykładem jądra typu ciągłego. △

PRZYKŁAD 15. Macierz $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i,j \in S]$ o elementach

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} I_{[1,\infty)}(t)\ ,\quad i \in S$$

gdzie $p_{ij} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j \in S} p_{ij} = 1$ nie jest jądrem typu ciągłego. △

TWIERDZENIE 32. *Niech* $\{X(t) :\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *będzie regularnym procesem semi- markowskim o skończonym lub przeliczalnym zbiorze stanów* S *i jądrze typu ciągłego* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i,j \in S]$. *Niech* $\boldsymbol{L}(t) = [\delta_{ij} L_i(t) : i,j \in S]$ *będzie macierzą diagonalną, której elementy są określone, mierzalne i wspólnie ograniczone na* $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. *Jeżeli*

1. *włożony łańcuch Markowa* $\{X(\tau_n) :\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *w proces semi-markowski* $\{X(t) :\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *ma tę własność, że dla każdego* $i,j \in S$ $i \to j$ lub $j \to i$,

2. *funkcje* $L_i(t), i \in S$ *są całkowalne na* $\mathbb{R}_+$,

to dla elementów macierzy $\boldsymbol{U}(t) = [u_{ij}(t) : i,j \in S]$ *stanowiącej jedyne rozwiązanie markowskiego równania odnowy*

$$\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{L}(t) + \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{U}(t) \tag{3.53}$$

istnieją granice przy $t \to \infty$ *oraz*

$$\lim_{t\to\infty} U_{ij}(t) = f_{ij}\frac{\int_0^\infty L_j(t)dt}{E(\Theta_{jj})}, \tag{3.54}$$

(jeżeli $E(\Theta_{jj}) = \infty$, *to prawa strona ostatniego wzoru jest równa* 0.)

D o w ó d: [38].

Zauważmy, że układ równań całkowych dla prawdopodobieństw przejścia zapisany w postaci równania macierzowego jest przykładem markowskiego równania odnowy, w którym $L_i(t) = 1 - G_i(t)$, $i \in S$ oraz $U_{ij}(t) = P_{ij}(t)$.

Całkowalność funkcji $L_i(t)$, $i \in S$ oznacza istnienie skończonych wartości oczekiwanych $E(T_i) = \int_0^\infty [1 - G_i(t)]dt$, $i \in S$. Tak więc jako wniosek z tego twierdzenia otrzymujemy następujące twierdzenie graniczne dla prawdopodobieństw przejścia

TWIERDZENIE 33. *Niech $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ będzie regularnym procesem semi- markowskim o dyskretnym zbiorze stanów i jądrze typu ciągłego $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$. Jeżeli*

1. *włożony łańcuch Markowa $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ w proces semi-markowski $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ ma tę własność, że dla każdego $i, j \in S$, $i \to j$ lub $j \to i$,*

2. *wartości oczekiwane czasów trwania stanów $m_i = E(T_i)$, $i \in S$ są skończone,*

to istnieją granice przy $t \to \infty$ prawdopodobieństw przejścia $P_{ij}(t)$ oraz

$$P_{ij} = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = f_{ij} \frac{E(T_j)}{E(\Theta_{jj})} \tag{3.55}$$

Z powyższych twierdzeń oraz twierdzeń dotyczących łańcuchów Markowa, które zostały przedstawione w pierwszym rozdziale wynika, że jeżeli stan j włożonego łańcucha Markowa $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ jest stanem powracającym, dodatnim, silnie osiągalnym ze stanu $i \in S$ oraz wartości oczekiwane zmiennych losowych T_i, $i \in S$ są dodatnie i wspólnie ograniczone, to $f_{ij} = 1$, $0 < E(\Theta_{jj}) < \infty$. Stąd wniosek, że w tym przypadku omawiane prawdopodobieństwa graniczne nie zależą od stanu początkowego oraz

$$P_{ij} = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = P_j = \lim_{t \to \infty} P_j(t) = \frac{E(T_j)}{E(\Theta_{jj})} > 0\,. \tag{3.56}$$

Okazuje się, że przy pewnych założeniach graniczny rozkład prawdopodobieństw procesu semi-markowskiego można obliczyć w oparciu o rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa i wartości oczekiwane czasów trwania stanów procesu. Sformułujemy stosowne twierdzenie dla procesu semi-markowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. Dla procesu o skończonym zbiorze stanów twierdzenie to zostało udowodnione przez Howarda [28]. Inny dowód tego twierdzenia dla procesu o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów podany jest w pracy Koroluka i Turbina [38].

TWIERDZENIE 34. *Niech $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ będzie regularnym procesem semi- markowskim o dyskretnym zbiorze stanów S i jądrze typu ciągłego $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$. Jeżeli*

1. *włożony łańcuch Markowa $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ w proces semi-markowski $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ zawiera jedną klasę C stanów powracających, dodatnich takich, że*

$$\bigwedge_{i \in S\,,\, j \in C} f_{ij} = 1,$$

2. $$\bigvee_{a > 0} \bigwedge_{i \in S} 0 < E(T_i) = \int_0^\infty [1 - G_i(t)]dt \leqslant a\,,$$

to istnieją granice przy $t \to \infty$ prawdopodobieństw przejścia $P_{ij}(t)$ $i, j \in S$ oraz istnieją granice przy $t \to \infty$ prawdopodobieństw stanów $P_j(t)$, $j \in S$ oraz

$$P_{ij} = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = P_j = \lim_{t \to \infty} P_j(t) = \frac{\pi_j E(T_j)}{\sum_{i \in S} \pi_i E(T_i)}, \tag{3.57}$$

gdzie prawdopodobieństwa π_i, $i \in S$ stanowią rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Przypomnijmy, że rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa jest jedynym rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j \ , \quad j \in S \ , \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1 \ , \tag{3.58}$$

gdzie

$$p_{ij} = \lim_{t \to \infty} Q_{ij}(t).$$

PRZYKŁAD 16. Niech $\{X(t) : i \in \mathbb{R}_+\}$ będzie procesem semi-markowskim o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.4[1-(1+0.2t)e^{-0.2t}] & 0.6[1-(1+0.2t)e^{-0.2t}] \\ 1-e^{-0.2t} & 0 & 0 \\ 1-e^{-0.5t} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

W tym przypadku

$$G_1(t) = 1-(1+0,2t)e^{-0.2t} \ , \quad t \geqslant 0,$$
$$G_2(t) = 1-e^{-0.2t} \ , \quad t \geqslant 0,$$
$$G_3(t) = 1-e^{-0.5t} \ , t \geqslant 0.$$

oraz

$$E(T_1) = 10 \ , \quad E(T_2) = 5 \ , \quad E(T_3) = 2.$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w ten proces ma postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Tak określony proces spełnia założenia przedstawionego twierdzenia. Układ równań dla rozkładu stacjonarnego włożonego łańcucha Markowa przyjmuje postać

$$\pi_2 + \pi_3 = \pi_1, \quad 0.4\pi_1 = \pi_2, \quad 0.6\pi_1 = \pi_3, \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

Stąd

$$\pi_1 = 0.5 \ , \quad \pi_2 = 0.2 \ , \quad \pi_3 = 0.3 \ .$$

Podstawiając obliczone liczbowe wartości odpowiednich parametrów do wzoru (3.57) otrzymujemy rozkład graniczny tego procesu semi-markowskiego.

$$P_1 = \frac{25}{33} \ , \quad P_2 = \frac{5}{33} \ , \quad P_3 = \frac{3}{33} \ . \qquad \triangle$$

PRZYKŁAD 17. Niech $\{X(t) : i \in \mathbb{R}_+\}$ będzie procesem ogólnym procesem alternującym o zbiorze stanów $S = \{0, 1\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & G_0(t) \\ G_1(t) & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Załóżmy, że wartości oczekiwane czasów trwania stanów są liczbami dodatnimi, skończonymi

$$0 < E(T_i) = \int_0^{\infty} [1 - G_i(t)]dt < \infty \,, \quad i \in S.$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w ten proces ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\pi_1 = \pi_0 \,, \quad \pi_0 = \pi_1 \,, \quad \pi_0 + \pi_1 = 1.$$

Stąd

$$\pi_1 = 0.5 \,, \quad \pi_2 = 0.5.$$

Korzystając ze wzoru (3.57) otrzymujemy rozkład graniczny tego procesu semi-markowskiego

$$P_0 = \frac{E(T_0)}{E(T_0) + E(T_1)} \,, \quad P_1 = \frac{E(T_1)}{E(T_0) + E(T_1)}. \qquad \triangle$$

3.4. Zaburzone procesy semi-markowskie

W przypadku złożonych semi-markowskich modeli niezawodności znalezienie rozkładu czasu pierwszego przejścia z określonego stanu do pewnego podzbioru stanów jest często kłopotliwe. W takich sytuacjach jedynym rozsądnym wyjściem jest poszukiwanie rozkładu przybliżonego. Jeden ze sposobów wyznaczenia rozkładu przybliżonego (asymptotycznego) związany jest z teorią zaburzonych procesów semi-markowskich. Zaburzone procesy semi-markowskie definiowane są przez różnych autorów w różny sposób. Przedstawimy kilka definicji i twierdzeń dotyczących tego zagadnienia używając przyjętych w tej książce oznaczeń i pojęć.

Pierwsza z przytaczanych definicji pochodzi z pracy Szpaka [53]. W pracy tej proces zaburzony nazywany jest *procesem sprzężonym.*

Niech $A' = \{1, 2, \ldots, N\}, A = \{0\}$ oraz $S = A \cup A'$ i niech $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o zbiorze stanów A i jądrze $Q^0(t) = [Q^0_{ij}(t) : i, j \in A']$.

DEFINICJA 40. *Proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów S nazywamy procesem zaburzonym w stosunku do procesu $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$, jeżeli jądro $Q(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$ procesu $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ ma postać*

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t [1 - F_i(x)]dQ^0_{ij}(x) & \text{dla} \quad i, j \in A' \\ 0 & \text{dla} \quad i \in A, j \in A' \end{cases} \,, \tag{3.63}$$

$$Q_{i0}(t) = \int\limits_0^t [1 - G^0_i(x)]dF_i(x), \quad i \in A', \tag{3.64}$$

gdzie $G^0_i(t) = \sum\limits_{j \in A'} Q^0_{ij}(t)$, natomiast funkcje $F_i(t) = P\{Z_i \leqslant t\}$, $i \in A'$ są dystrybuantami rozkładów niezależnych zmiennych losowych Z_i, $i \in A'$ o skończonych momentach.

Zmienna losowa

$$\Theta_{iA} = \inf\{t : X(t) \in A \mid X(0) = i\}, \quad i \in A' = \{1, \dots, N\}$$

oznacza czas pierwszego przejścia ze stanu $i \in A'$ do stanu 0. Oznaczmy

$$m_i^0 = \int_0^\infty [1 - G_i^0(t)]dt, \quad i \in A',$$

gdzie

$$G_i^0(t) = \sum_{j \in A'} Q_{ij}^0(t).$$

Liczba m_i^0 jest oczekiwanym czasem trwania stanu $i \in A'$ procesu SM $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$. Liczba

$$\varepsilon_i = p_{i0} = \lim_{t \to \infty} Q_{i0}(t)$$

jest prawdopodobieństwem przejścia procesu SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ ze stanu $i \in A'$ do stanu 0. Niech $\pi^0 = [\pi_1^0, \dots, \pi_N^0]$ oznacza rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa w proces SM $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ i niech

$$\varepsilon = \sum_{i \in A'} \pi_i^0 \varepsilon_i.$$

TWIERDZENIE 35. *Jeżeli łańcuch Markowa włożony w proces SM* $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ *ma rozkład stacjonarny* $\pi^0 = [\pi_1^0, \dots, \pi_N^0]$, $\varepsilon > 0$ *oraz rozkłady o dystrybuantach* $G_i^0(t)$, $i = 1, \dots, N$ *mają skończone wartości oczekiwane to*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\{\varepsilon \Theta_{iA} > t\} = \exp[-\lambda\, t]\ , \quad t \geqslant 0\ ,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{1}{\sum\limits_{i \in A'} \pi_i^0 m_i^0}\ .$$

D o w ó d: [53].

Zauważmy najpierw, że rozkład asymptotyczny zmiennej losowej Θ_{iA} nie zależy od od stanu $i \in A'$.

Jeżeli zbiór A' oznacza zbiór stanów zdatności obiektu, którego modelem niezawodnościowym jest proces SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$, natomiast $A = \{0\}$ jest stanem niezdatności tego obiektu, to teza twierdzenia pozwala znaleźć przybliżoną wartość funkcji niezawodności:

$$R(t) = P\{\Theta_{iA} > t\} = P\{\varepsilon\Theta_{iA} > \varepsilon t\} \approx \exp[-\lambda\, \varepsilon t], \quad t \geqslant 0\ , \tag{3.65}$$

gdy ε jest małe.

PRZYKŁAD 18. Niech $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem alternującym o zbiorze stanów $S = \{1, 2\}$, gdzie 1 oznacza stan użytkowania obiektu natomiast 2 oznacza obsługę techniczną.

Jeżeli założymy, że czas trwania użytkowania jest nieujemną zmienną losową ξ o rozkładzie określonym przez dystrybuantę

$$F_\xi(t) = P\{\xi \leqslant t\},$$

natomiast czas trwania obsługi technicznej obiektu jest nieujemną zmienną losową η o rozkładzie określonym przez dystrybuantę

$$F_\eta(t) = P\{\eta \leqslant t\}$$

oraz przyjmiemy, że te zmienne losowe są niezależne to jądro procesu SM $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$, stanowiącego model procesu eksploatacji, ma postać

$$\boldsymbol{Q}^0(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q^0_{12}(t) \\ Q^0_{21}(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

gdzie

$$Q^0_{12}(t) = F_\xi(t), \quad Q^0_{21}(t) = F_\eta(t).$$

Przyjmujemy, że obiekt w stanie użytkowania może ulec awarii. Będziemy rozpatrywać eksploatację obiektu do chwili jego pierwszej awarii. Zakładamy, że czas zdatności użytkowanego obiektu jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie

$$F_\zeta(t) = P\{\zeta \leqslant t\}.$$

Przyjmujemy również, że każda obsługa przywraca obiektowi pełną zdatność. Zakładamy, że zmienne losowe ξ, η, ζ są wzajemnie niezależne i mają skończone drugie momenty.

Niech 0 oznacza stan awarii i niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem SM o zbiorze stanów $S = \{0, 1, 2\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} Q_{00}(t) & 0 & 0 \\ Q_{10}(t) & 0 & Q_{12}(t) \\ 0 & Q_{21}(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.67}$$

gdzie

$$Q_{10}(t) = P\{\zeta \leqslant t, \zeta \leqslant \xi\} = \int_0^t [1 - F_\xi(x)] dF_\zeta(x),$$

$$Q_{12}(t) = P\{\xi \leqslant t, \zeta > \xi\} = \int_0^t [1 - F_\zeta(x)] dF_\xi(x),$$

$$Q_{21}(t) = F_\eta(t)$$

oraz $Q_{00} = G_0(t)$ jest dowolną dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathbb{R}_+$. Proces ten jest procesem zakłóconym w stosunku do procesu SM $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$. Rolę zmiennej losowej Z_1 odgrywa czas zdatności ζ natomiast zmienna losowa Z_2 ma rozkład jednopunktowy $P\{Z_2 = 0\}=1$. Wielkości występujące w podanym tu twierdzeniu mają postać

$$\pi_1^0 = 0.5\,, \quad \pi_2^0 = 0.5\,,$$
$$m_1^0 = E(\xi)\,, \quad m_2^0 = E(\eta)\,,$$
$$\varepsilon_1 = \int_0^\infty [1 - F_\xi(u)]dF_\zeta(u)\,, \varepsilon_2 = 0\,, \quad \varepsilon = 0.5\varepsilon_1\,.$$

Zatem wartość funkcji niezawodności obiektu wyraża się przybliżeniem

$$R(t) \approx \exp\left[-\frac{\int_0^\infty [1 - F_\xi(u)]dF_\zeta(u)}{E(\xi) + E(\eta)}\,t\right]. \tag{3.68}$$

Wzór ten można stosować jedynie wtedy, gdy liczba

$$\varepsilon_1 = \int_0^\infty [1 - F_\xi(u)]dF_\zeta(u)\,,$$

oznaczająca prawdopodobieństwo awarii obiektu w przedziale użytkowania o długości ξ, jest mała. $\triangle$

Przedstawimy teraz pojęcie zaburzonego procesu semi-markowskiego pochodzące z pracy Pavlova i Ushakova. Wyniki tej pracy z prostym dowodem podstawowego twierdzenia zostały przedstawione przez Gercbakha [18].

Niech A' będzie zbiorem skończonym, A zbiorem co najwyżej przeliczalnym oraz $A \cap A' = 0$. Niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o zbiorze stanów $S = A \cup A'$ i jądrze $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$, którego elementy przedstawione są w postaci $Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t)$, (patrz 2.3). Przypomnijmy, że liczba p_{ij} jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu $i \in S$ do stanu $j \in S$ włożonego łańcucha Markowa w proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$, natomiast dystrybuanta $F_{ij}(t)$ określa rozkład zmiennej losowej oznaczającej czas trwania stanu $i \in S$, gdy następnym stanem będzie $j \in S$.

Przyjmijmy

$$\varepsilon_i = \sum_{j \in A} p_{ij}. \tag{3.69}$$

Niech

$$p_{ij}^0 = \frac{p_{ij}}{1 - \varepsilon_i}\,, \quad i, j \in A'. \tag{3.70}$$

Zauważmy, że $\sum_{j \in A'} p_{ij}^0 = 1$.

Definicja 41. *Proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów S i jądrze $\boldsymbol{Q}(t) = [\,p_{ij}F_{ij}(t) : i, j \in S\,]$, nazywamy procesem zaburzonym w stosunku do procesu $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów A' i jądrze $\boldsymbol{Q}^0(t) = [p_{ij}^0 F_{ij}(t) : i, j \in A']$.*

Podamy twierdzenie, które jest niewielką modyfikacją twierdzenia przytoczonego przez Gercbakha [18].

Zmienna losowa

$$\Theta_{iA} = \inf\{t : X(t) \in A \,|\, X(0) = i\}, \quad i \in A',$$

jak poprzednio, oznacza czas pierwszego przejścia ze stanu $i \in A'$ do podzbioru A. Niech

$$m_i = \int_0^\infty [1 - G_i(t)]dt\ , \quad i \in A'\ ,$$

gdzie

$$G_i(t) = \sum_{j \in S} Q_{ij}(t)\ .$$

Liczba m_i^0 jest oczekiwanym czasem trwania stanu $i \in S$. Oznaczmy, jak poprzednio

$$m_i^0 = \int_0^\infty [1 - G_i^0(t)]dt, \quad i \in A',$$

gdzie

$$G_i^0(t) = \sum_{j \in A'} Q_{ij}^0(t)\ .$$

Niech $\pi^0 = [\pi_i^0 : i \in A']$ oznacza rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa w proces SM $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ i niech

$$\varepsilon = \sum_{i \in A'} \pi_i^0 \varepsilon_i \tag{3.71}$$

oraz

$$m^0 = \sum_{i \in A} \pi_i^0 m_i^0\ . \tag{3.72}$$

TWIERDZENIE 36. *Jeżeli:*

a) *łańcuch Markowa włożony w proces SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o macierzy prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P} = [\, p_{ij} : i, j \in S]$ jest nieprzywiedlny i dodatnio powracający,*

b) $\bigvee_{C<\infty} \bigwedge_{i \in S} m_i \leqslant C,$

to

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\{\varepsilon \Theta_{iA} > x\} = e^{-\frac{x}{m^0}}\ , \tag{3.73}$$

przy czym $\pi^0 = [\pi_i : i \in A']$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\pi^0 = \pi^0 \boldsymbol{P}^0\ , \quad \pi^0 \mathbf{1} = 1. \tag{3.74}$$

Z twierdzenia tego wynika, że dla małego ε otrzymujemy wzór przybliżony

$$P\{\Theta_{iA} > t\} \approx \exp\left[-\frac{\sum\limits_{i \in A'} \pi_i^0 \varepsilon_i}{\sum\limits_{i \in A'} \pi_i^0 m_i^0}\, t \right]\ , \quad t \geqslant 0. \tag{3.75}$$

PRZYKŁAD 19. Zastosowanie tego twierdzenia pokażemy na podanym tu wcześniej przykładzie. Proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $S = \{0, 1, 2\}$ i jądrze określonym wzorem (3.67) jest procesem zaburzonym w stosunku do procesu $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $A' = \{1, 2\}$, którego jądro ma teraz postać

$$\boldsymbol{Q}^0(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}^0(t) \\ Q_{21}^0(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.76}$$

gdzie

$$Q_{12}^0(t) = p_{12}^0 F_{12}(t)\,, \quad Q_{21}^0(t) = p_{21}^0 F_{21}(t)\,.$$

Ponieważ $B = \{0\}$ oraz

$$\varepsilon_1 = p_{10} = Q_{10}(\infty) = P\{\,\zeta < \xi\,\} = \int_0^\infty [1 - F_\xi(x)]dF_\zeta(x) \;=\; 1 - p_{12},$$

więc

$$p_{12}^0 = \frac{p_{12}}{1 - \varepsilon_1} = 1\,.$$

A ponieważ

$$F_{12}(t) = \frac{Q_{12}(t)}{p_{12}} = \frac{Q_{12}(t)}{Q_{12}(\infty)}\,,$$

więc

$$Q_{12}^0(t) = F_{12}(t) = \frac{\int_0^t [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)}{\int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)}\,.$$

Zauważmy, że $\varepsilon_2 = p_{20} = 0$, a więc $p_{21}^0 = \frac{p_{21}}{1-\varepsilon_2} = 1$. Ostatecznie

$$Q_{21}^0(t) \;=\; F_{21}(t) = F_\eta(t).$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w proces $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{P}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.77}$$

Rozwiązując układ równań

$$[\pi_1^0, \pi_2^0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\pi_1^0, \pi_2^0]\,, \tag{3.78}$$

$$\pi_1^0 + \pi_2^0 = 1 \tag{3.79}$$

otrzymujemy rozkład stacjonarny $\pi^0 = [0.5\;,\;\; 0.5]$.

Korzystając ze stosownych wzorów obliczmy parametry występujące w tezie twierdzenia:

$$\varepsilon = 0.5\varepsilon_1 = 0.5P\{\,\zeta < \xi\,\} = 0.5\int_0^\infty [1 - F_\xi(x)]dF_\zeta(x)\,,$$

$$m^0 = 0.5(m_1^0 + m_2^0)\,,$$

gdzie

$$m_1^0 = \int_0^\infty t\, dQ_{12}^0(t) = \frac{\int_0^\infty t\,[1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)}{\int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)},$$

$$m_2^0 = E(\eta) = \int_0^\infty [1 - F_\eta(t)]dt\,.$$

Dla ε bliskiego 0 otrzymujemy przybliżony wzór na funkcję niezawodności systemu

$$R(t) = P\{\Theta_{iA} > t\} = P\{\varepsilon\Theta_{iA} > \varepsilon t\} \approx \exp\left[-\frac{\varepsilon}{m^0}\,t\right], \quad t \geqslant 0\,.$$

Z postaci parametru ε wynika, że wzór ten można sensownie stosować jedynie wtedy, gdy liczba $P\{\zeta < \xi\}$ oznaczająca prawdopodobieństwo uszkodzenia obiektu w czasie jego użytkowania jest mała. Ponieważ

$$P\{\zeta < \xi\} = 1 - P\{\zeta \geqslant \xi\} = 1 - \int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)\,,$$

więc warunek ten jest spełniony, gdy

$$\int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x) \to \int_0^\infty dF_\xi(x) = 1.$$

Wówczas

$$m_1^0 \approx \int_0^\infty t\, dF_\xi(x) = E(\xi).$$

Ostatecznie otrzymujemy ten sam wzór przybliżony

$$R(t) = P\{\Theta_{i\,B} > t\} \approx \exp\left[-\frac{\int_0^\infty [1 - F_\xi(u)]dF_\zeta(u)}{E(\xi) + E(\eta)}\,t\right]. \quad \triangle \tag{3.80}$$

Przedstawimy teraz pojęcie zaburzonego procesu semi-markowskiego pochodzące z monografii Koroluka i Turbina [38].

Niech A' będzie tym razem zbiorem co najwyżej przeliczalnym i niech $A = \{0\}$. Niech $\{X(t) :\ t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o zbiorze stanów $S = A \cup A'$ i jądrze $Q^\varepsilon(t) = [Q_{ij}^\varepsilon(t) : i,j \in S]$, którego elementy mają w postać $Q_{ij}^\varepsilon(t) = p_{ij}^\varepsilon F_{ij}(t)$, gdzie

$$p_{ij}^\varepsilon = \begin{cases} p_{ij}^0 - \varepsilon b_{ij} & \text{dla} \quad i,j \in A' \\ \varepsilon q_i & \text{dla} \quad i \in A', j = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad i = j = 0 \end{cases}, \tag{3.81}$$

przy czym

$$q_i = \sum_{j \in A'} b_{ij}, \quad i \in A' . \tag{3.82}$$

DEFINICJA 42. *Proces semi-markowski $\{X(t): \ t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $S = A \cup A'$ i jądrze $\boldsymbol{Q}^\varepsilon(t) = [Q^\varepsilon_{ij}(t) : i,j \in S]$, określonym wzorami* (3.81), (3.82) *nazywamy procesem zaburzonym w stosunku do procesu $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów A' i jądrze $\boldsymbol{Q}^0(t) = [p^0_{ij} F_{ij}(t) : i,j \in A']$.*

Niech $\pi^0 = [\pi^0_i : i \in A']$ oznacza rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa w proces semi-markowski $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$. Jak wiemy rozkład ten jest jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\pi^0 = \pi^0 \boldsymbol{P}^0 , \ \ \pi^0 \mathbf{1} = 1 . \tag{3.83}$$

Niech

$$q = \sum_{i \in A'} \pi^0 q_i . \tag{3.84}$$

i niech jak w poprzednim twierdzeniu

$$m^0 = \sum_{i \in A} \pi^0_i m^0_i . \tag{3.85}$$

TWIERDZENIE 37. *Jeżeli:*

a) *łańcuch Markowa włożony w proces SM $\{X^0(t) : t \geqslant 0\}$ o macierzy prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P}^0 = [\, p^0_{ij} : i,j \in A']$ jest nieprzywiedlny i dodatnio powracający,*

b) $\bigvee_{C<\infty} \bigwedge_{i \in A'} m^0_i \leqslant C$,

c) $\bigvee_{\text{stan powracający } i \in A'} p^\varepsilon_{i0} > 0$,

to

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\{\varepsilon \Theta_{iA} \ > \ x\} = e^{-\frac{q}{m^0} x} . \tag{3.86}$$

D o w ó d: [38].

Z twierdzenia tego dla małego ε otrzymujemy wzór przybliżony

$$P\{\Theta_{iA} \ > \ t\} \ = \ P\{\varepsilon\Theta_{iA} \ > \ \varepsilon t\} \ \approx \ e^{-\frac{\varepsilon q}{m^0} t} . \tag{3.87}$$

PRZYKŁAD 20. Zastosowanie tego twierdzenia pokażemy tym samym przykładzie. Proces semi-markowski $\{X^\varepsilon(t) : \ t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $S = \{0,1,2\}$ i jądrze określonym wzorem (3.67) traktujemy jako proces zaburzony w stosunku do procesu $\{X^0(t) : \ t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $A' = \{1,2\}$. Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w proces SM $\{X^\varepsilon(t) : \ t \geqslant 0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{P}^\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{10} & 0 & p_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \tag{3.88}$$

gdzie

$$p_{10} = P\{\zeta \leqslant \xi\} = \int_0^\infty [1 - F_\xi(x)]dF_\zeta(x) ,$$

$$p_{12} = P\{\zeta > \xi\} = \int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x) .$$

Macierz dystrybuant rozkładów warunkowych czasów trwania stanów wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{F}^\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} F_{00}(t) & 0 & 0 \\ F_{10}(t) & 0 & F_{12}(t) \\ 0 & F_{21}(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.89}$$

gdzie

$$F_{10}(t) = P\{\zeta \leqslant \ t \mid \zeta \leqslant \xi\} = \frac{\int_0^t [1 - F_\xi(x)]dF_\zeta(x)}{\int_0^\infty [1 - F_\xi(x)]dF_\zeta(x)} ,$$

$$F_{12}(t) = P\{\xi \leqslant t \mid \zeta > \xi\} = \frac{\int_0^t [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)}{\int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)]dF_\xi(x)} ,$$

$$F_{21}(t) = F_\eta(t)$$

oraz

$$F_{00} = G_0(t) .$$

Jądro procesu semi-markowskiego $\{X^0(t) : \ t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $A' = \{1, 2\}$ ma postać

$$\boldsymbol{Q}^0(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q^0_{12}(t) \\ Q^0_{21}(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.90}$$

gdzie

$$Q^0_{12}(t) = F_{12}(t) , \quad Q^0_{21}(t) = F_\eta(t) .$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa w proces $\{X^0(t) : \ t \geqslant 0\}$, wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{P}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.91}$$

a rozkład stacjonarny ma postać $\pi^0 = [0.5 \ , \ 0.5]$.

Z definicji wynika, że

$$\varepsilon b_{ij} = p^0_{ij} - p^\varepsilon_{ij}, \quad i, j \in A'. \tag{3.92}$$

Zatem

$$\varepsilon b_{11} = 0 \ , \ \ \varepsilon b_{12} = 1 - \int_0^\infty [1 - F_\zeta(t) dF_\xi(t) \ = 1 - P\{\zeta > \xi\}, \ \ \varepsilon b_{21} = 0 \ , \ \ \varepsilon b_{22} = 0 \tag{3.93}$$

oraz

$$\varepsilon q_1 = F_\xi(\infty) - \int_0^\infty [1 - F_\zeta(t) dF_\xi(t) = 1 - P\{\zeta > \xi\}, \quad \varepsilon q_2 = 0 \,, \tag{3.94}$$

a zatem

$$\varepsilon q = 0.5\,(1 - P\{\zeta > \xi\}) = 0.5\,P\{\zeta \leqslant \xi\} = 0.5 \int_0^\infty [1 - F_\xi(t) dF_\zeta(t). \tag{3.95}$$

Jednocześnie jak w poprzednim przykładzie

$$m^0 = 0.5(m_1^0 + m_2^0)\,,$$

gdzie

$$m_1^0 = \int_0^\infty t\, dQ_{12}^0(t) = \frac{\int_0^\infty t\,[1 - F_\zeta(x)] dF_\xi(x)}{\int_0^\infty [1 - F_\zeta(x)] dF_\xi(x)}\,,$$

$$m_2^0 = E(\eta) = \int_0^\infty [1 - F_\eta(t)] dt\,.$$

Powtarzając rozumowanie z przykładu 19 otrzymujemy przybliżenia $m_1^0 \approx E(\xi)\,, m^0 \approx 0.5\,[\,E(\eta) + E(\xi)\,]$. Korzystając z twierdzenia 37, dla εq bliskiego 0 otrzymujemy ten sam przybliżony wzór (3.80) na funkcję niezawodności systemu. △

3.5. Proces odnowy generowany przez czasy powrotu procesu semi-markowskiego

Zakładamy, że stan $j \in S$ jest stanem powracającym, silnie osiągalnym ze stanu $i \in S$ procesu semi-markowskiego $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o jądrze typu ciągłego $\boldsymbol{Q}(t)$.

Rozważmy ciąg zmiennych losowych

$$\Theta_{ij}^{(1)}, \Theta_{jj}^{(2)}, \Theta_{jj}^{(3)}, \ldots$$

gdzie $\Theta_{ij}^{(1)} = \Theta_{ij}$ oznacza chwilę pierwszego osiągnięcia stanu $j \in S$ przez proces startujący w chwili 0 ze stanu $i \in S$, natomiast zmienne losowe $\Theta_{jj}^{(n)}\,,\ n = 2, 3, \ldots$ oznaczają długości przedziałów czasu, po których następują kolejne powroty do stanu $j \in S$. Zmienna losowa $\Theta_{ij}^{(1)}$ ma rozkład o dystrybuancie

$$\Phi_{ij}(t) = P\{\Theta_{ij}^{(1)} \leqslant t\},$$

podczas gdy zmienne losowe $\Theta_{jj}^{(n)}, \ldots\,, n = 2, 3, \ldots$ mają jednakowy rozkład określony przez dystrybuantę

$$\Phi_{jj}(t) = P\{\Theta_{jj}^{(n)} \leqslant t\} = P\{\Theta_{jj} \leqslant t\}\,.$$

Można wykazać, że zmienne losowe

$$\Theta_{ij}^{(1)}, \Theta_{jj}^{(2)}, \ldots, \Theta_{jj}^{(n)}\,,\quad n = 2, 3, \ldots$$

są wzajemnie niezależne.

Niech

$$S_{ij}^{(n)} = \Theta_{ij}^{(1)} + \Theta_{jj}^{(2)} + \ldots + \Theta_{jj}^{(n)}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3.96}$$

oraz

$$V_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[0,t]}(S_{ij}^{(n)}), \quad t \geqslant 0, \tag{3.97}$$

gdzie

$$I_{[0,t]}(S_{ij}^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad S_{ij}^{(n)} \in [0,t] \\ 0 & \text{gdy} \quad S_{ij}^{(n)} \notin [0,t] \end{cases}$$

Wartość zmiennej losowej $V_{ij}(t)$ oznacza liczbę „wejść" procesu semi-markowskiego do stanu $j \in S$ w przedziale $[0,t]$. Proces losowy $\{V_{ij}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ nazywamy *procesem odnowy generowanym przez czasy powrotu procesu semi-markowskiego*.

Niech

$$W_{ij}(t,n) = P\{V_{ij}(t) = n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.98}$$

Zauważmy równość zdarzeń

$$\{V_{ij}(t) = 0\} = \{\Theta_{ij} > t\}.$$

Stąd

$$W_{ij}(t,0) = P\{V_{ij}(t) = 0\} = P\{\Theta_{ij} > t\} = 1 - \Phi_{ij}(t). \tag{3.99}$$

Proces semi-markowski, startujący ze stanu i w chwili 0, przyjmie w przedziale $[0,t]$ wartość j n-krotnie, gdy w chwili $x \in [0,t]$ nastąpi pierwsze przejście do stanu j, oraz w przedziale $(x,t]$ proces osiągnie stan j $n-1$-krotnie. Ta uwaga połączona z własnościami procesu semi-markowskiego prowadzi do równań

$$W_{ij}(t,n) = \int_0^t W_{jj}(t-x, n-1)\, d\Phi_{ij}(x), \tag{3.100}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $i,j \in S$.

Dla $n \in \mathbb{N}_0$ równania można zapisać jednym wzorem

$$W_{ij}(t,n) = \delta_{n0}[1 - \Phi_{ij}(t)] + [1 - \delta_{n0}] \int_0^t W_{jj}(t-x, n-1)\, d\Phi_{ij}(x), \tag{3.101}$$

Przy założeniach twierdzenia 29, równania te mają jednoznaczne rozwiązania. Postać tych rozwiązań można otrzymać posługując się dwuwymiarowym przekształceniem określonym wzorem

$$\tilde{W}_{ij}(s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} W_{ij}(t,m) e^{-st}\, dt. \tag{3.102}$$

Równaniu (3.100) odpowiada równanie dla transformat

$$\tilde{W}_{ij}(s,z) = \frac{1 - \tilde{\phi}_{ij}(s)}{s} + z\tilde{\phi}_{ij}(s)\tilde{W}_{jj}(s,z), \quad i,j \in S. \tag{3.103}$$

W szczególności dla $i = j$

$$\tilde{W}_{jj}(s,z) = \frac{1-\tilde{\phi}_{jj}(s)}{s} + z\tilde{\phi}_{jj}(s)\tilde{W}_{jj}(s,z)\,, \quad j \in S. \tag{3.104}$$

Stąd

$$\tilde{W}_{jj}(s,z) = \frac{1-\tilde{\phi}_{jj}(s)}{s[1-z\tilde{\phi}_{jj}(s)]}\,, \quad j \in S. \tag{3.105}$$

Wzór (3.102) przyjmuje teraz postać

$$\tilde{W}_{ij}(s,z) = \frac{1-\tilde{\phi}_{ij}(s)}{s} + z\tilde{\phi}_{ij}(s)\frac{1-\tilde{\phi}_{jj}(s)}{s[1-z\tilde{\phi}_{jj}(s)]}\,, \quad i,j \in S. \tag{3.106}$$

Transformatę Laplace'a $\tilde{H}_{ij}(s)$ wartości oczekiwanej $H_{ij}(t) = E[V_{ij}(t)]$ procesu stochastycznego $\{V_{ij}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ otrzymamy korzystając ze wzoru

$$\tilde{H}_{ij}(s) = \frac{\partial \tilde{W}_{ij}(s,z)}{\partial z}\Big|_{z=1}.$$

Po wykonaniu obliczeń mamy

$$\tilde{H}_{ij}(s) = \frac{\tilde{\phi}_{ij}(s)}{s\,(1-\tilde{\phi}_{jj}(s))}. \tag{3.107}$$

Wartość oczekiwana $H_{ij}(t) = E[V_{ij}(t)]$ w teorii odnowy jest odpowiednikiem funkcji odnowy.

Transformatę Laplace'a drugiego momentu zwykłego procesu $\{V_{ij}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ obliczymy korzystając ze wzoru

$$\mathcal{L}[E[(V_{ij}(t))^2]] = \frac{\partial^2 \tilde{W}_{ij}(s,z)}{\partial z^2}\Big|_{z=1} + \frac{\partial \tilde{W}_{ij}(s,z)}{\partial z}\Big|_{z=1}.$$

Po wykonaniu prostych obliczeń otrzymujemy

$$\mathcal{L}[E[(V_{ij}(t))^2]] = \frac{2\tilde{\phi}_{ij}(s)\tilde{\phi}_{jj}(s)}{s\,(1-\tilde{\phi}_{jj}(s))^2} + \frac{\tilde{\phi}_{ij}(s)}{s\,(1-\tilde{\phi}_{jj}(s))}. \tag{3.108}$$

Stąd wynika równość

$$E[(V_{ij}(t))^2] = 2\int_0^t H_{ij}(t-x)dH_{jj}(x) + H_{ij}(t). \tag{3.109}$$

A zatem wariancja procesu wyraża się wzorem

$$D^2[V_{ij}(t)] = 2\int_0^t H_{ij}(t-x)dH_{jj}(x) + H_{ij}(t) - H_{ij}^2(t). \tag{3.110}$$

PRZYKŁAD 21. Rozważmy ponownie, wcześniej omawiany proces semi-markowski o zbiorze stanów $S = \{0,1\}$ określony za pomocą rozkładu początkowego $\boldsymbol{p}^{(0)} = [0,1]$ i jądra

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1-(1+\beta t)e^{-\beta t} \\ 1-e^{-\alpha t} & 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha,\ \beta,\ t \geqslant 0. \tag{3.111}$$

Jeżeli stan 1 będziemy uważać za stan zdatności obiektu, natomiast stan 0 będziemy interpretować jako stan niezdatności, to funkcja $H_{10}(t)$, $t \geqslant 0$ oznacza oczekiwaną liczbę awarii obiektu w przedziale $[0,t]$. Ponieważ, w tym przypadku

$$\tilde{\phi}_{10}(s) = \tilde{q}_{10}(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}\,, \quad \text{oraz} \quad \tilde{\phi}_{00}(s) = \tilde{q}_{01}(s)\tilde{q}_{10}(s) = \frac{\beta^2}{(s+\beta)^2}\frac{\alpha}{s+\alpha}\,,$$

więc transformata Laplace'a funkcji $H_{10}(t)$ ma postać

$$\tilde{H}_{10}(s) = \frac{\alpha(s+\beta)^2}{s^2[s^2+(\alpha+2\beta)s+\beta^2+2\alpha\beta]}. \tag{3.112}$$

Przyjmijmy $\alpha = 0.01$ oraz $\beta = 0.2$. Oznacza to, że oczekiwany czas trwania stanu zdatności obiektu $E(T_1) = 100$, natomiast oczekiwany czas trwania stanu niezdatności $E(T_0) = 10$. Dla takich wartości parametrów α oraz β transformata wyraża się wzorem

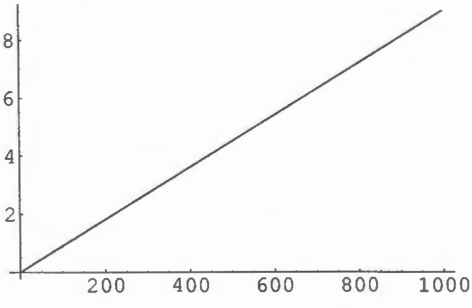
$$\tilde{H}_{10}(s) = \frac{0.01(s+0.2)^2}{s^2(s^2+0.41s+0.044)}\,.$$

Odwracając transformatę otrzymujemy

$$H_{10}(t) = 0.00619835 + 0.00909091\,t$$

$$-\exp(-0.205\,t)[0.00619835\cos(0.044441\,t) + 0.00813597\sin(0.044441\,t)].$$

Wykres tej funkcji przedstawiony jest na rysunku 3.4. $\triangle$



Rys. 3.13. Wykres wartości oczekiwanej $H_{10}(t)$

Adaptując twierdzenia klasycznej teorii odnowy możemy sformułować twierdzenie o asymptotycznym rozkładzie procesu losowego $\{V_{ij}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ przy $t \to \infty$.

TWIERDZENIE 38. *Jeżeli stan j jest stanem powracającym, silnie osiągalnym ze stanu $i \in S$ oraz zmienne losowe Θ_{ij}, Θ_{jj} mają skończone dodatnie wartości oczekiwane i skończone dodatnie wariancje, to*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{V_{ij}(t) - \frac{t-E(\Theta_{ij})+E(\Theta_{jj})}{E(\Theta_{jj})}}{\sqrt{\frac{V(\Theta_{jj})t}{[E(\Theta_{jj})]^3}}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{u^2}{2}}du. \tag{3.113}$$

D o w ó d: [22].

Z twierdzenia tego wynika, że dla dużego t zmienna losowa $V_{ij}(t)$ ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(m(t), \sigma(t))$ o wartości oczekiwanej

$$m(t) = \frac{t - E(\Theta_{ij}) + E(\Theta_{jj})}{E(\Theta_{jj})}$$

i odchyleniu standardowym

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{V(\Theta_{jj})t}{[E(\Theta_{jj})]^3}}\,.$$

Parametry

$$m(t) = E(\Theta_{ij})\,, \quad E(\Theta_{jj})\,, \quad E(\Theta_{jj}^2)$$

możemy łatwo obliczyć w oparciu o twierdzenia przedstawione w p. 3.1. Wariancję obliczamy korzystając z dobrze znanego związku

$$V(\Theta) = E(\Theta_{jj}^2) - [E(\Theta_{jj})]^2.$$

3.6. Procesy kumulacji

Sumaryczny czas zdatności systemu w przedziale czasu $[0, t]$, dochód z eksploatacji systemu w przedziale $[0, t]$ są przykładami wielkości, które mogą być opisane za pomocą procesów stochastycznych nazywanych procesami kumulacji. Rozważać będziemy jedynie procesy kumulacji związane z procesami semi-markowskimi. Rozważymy najpierw proces kumulacji określony przez proces alternujący.

3.6.1. Sumaryczny czas zdatności (użytkowania) w przedziale [0, t]

Rozważmy ciąg wzajemnie niezależnych zmiennych losowych $\zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_2 \ldots$. Przyjmujemy, że zmienne losowe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ są kopiami nieujemnej zmiennej losowej ζ o rozkładzie określonym przez dystrybuantę $F_\zeta(t)$, natomiast zmienne losowe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ są kopiami nieujemnej zmiennej losowej γ o rozkładzie $F_\gamma(t)$. W zagadnieniach niezawodności i eksploatacji zmienna losowa ζ interpretowana jest zazwyczaj jako czas zdatności lub czas użytkowania obiektu, natomiast γ najczęściej oznacza czas odnowy lub czas obsługi.

Niech $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ będzie dwuwymiarowym ciągiem zmiennych losowych określonych w następujący sposób

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0, 2, 4, \ldots \\ 0 & \text{dla} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}, \qquad \vartheta_n = \begin{cases} \zeta_n & \text{dla} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \gamma_n & \text{dla} \quad n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}.$$

Tak określony ciąg $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ jest markowskim procesem odnowy o jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & F_\gamma(t) \\ F_\zeta(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

i rozkładzie początkowym

$$\boldsymbol{p} = [0, 1]. \tag{3.115}$$

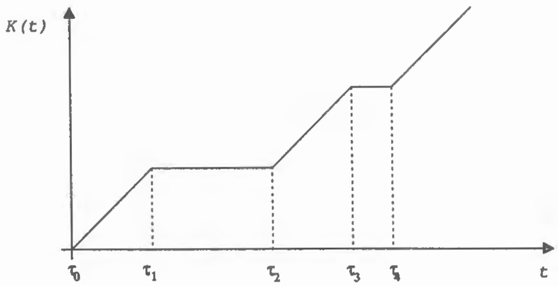
Ten markowski proces odnowy generuje proces SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $S = \{0, 1\}$. Proces ten, przypomnijmy, nazywany jest prostym procesem alternującym.

Proces stochastyczny $\{K(t): t \geqslant 0\}$ określony wzorem

$$K(t) = \int_0^t X(u)du \quad \text{z pr. } 1 \tag{3.116}$$

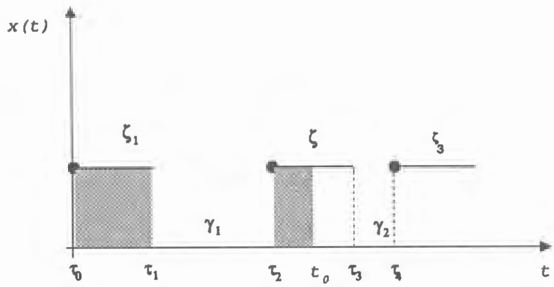
jest sumarycznym czasem trwania stanu 1 w przedziale $[0, t]$ procesu alternującego $\{X(t) : t \geqslant 0\}$.

Fragment realizacji tego procesu przedstawiony jest na rysunku 3.14.



Rys. 3.14. Realizacja procesu $K(\cdot)$

Zauważmy, że w geometrycznej interpretacji, dla każdej realizacji $\{x(t) : t \geqslant 0\}$ procesu alternującego, wartość realizacji procesu kumulacji w chwili t_0 odpowiada polu obszaru $D = \{(t, x) : 0 \leqslant t < t_0\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant x(t)\ \}$, (rysunek 3.15).



Rys. 3.15. Realizacja procesu $\{X(t) : t \geqslant 0\}$

Ta uwaga ułatwia zauważenie związku

$$K(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad t \in [0,\ \tau_1) \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k & \text{dla} \quad t \in [\tau_{2k-1}, \tau_{2k}) \\ t - (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_k) & \text{dla} \quad t \in [\tau_{2k}, \tau_{2k+1}) \end{cases} \ ,\quad k = 1, 2, \ldots\ , \tag{3.117}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tau_{2k-1} &= \zeta_1 + \gamma_1 + \zeta_2 + \gamma_2 + \ldots + \zeta_k, \\ \tau_{2k} &= \zeta_1 + \gamma_1 + \zeta_2 + \gamma_2 + \ldots + \zeta_k + \gamma_k, \\ \tau_{2k+1} &= \zeta_1 + \gamma_1 + \zeta_2 + \gamma_2 + \ldots + \zeta_k + \gamma_k + \zeta_{k+1}. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Jeżeli zmienna losowa ζ_1 ma inny rozkład niż pozostałe zmienne losowe ζ_k, $k = 2, 3, \ldots$ to proces określony przez dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ wzorem

$$X(t) = \xi_n \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_n, \tau_{n+1}),$$

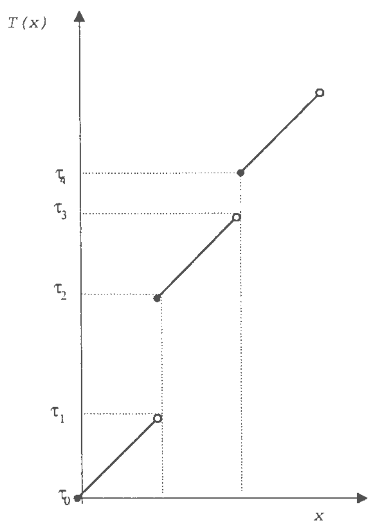
gdzie

$$\tau_n = \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n$$

nazywamy *ogólnym procesem alternującym*. Z procesem $\{K(t) : t \geqslant 0\}$ związany jest proces losowy $\{T(x) : x \geqslant 0\}$ określony wzorem

$$T(x) = \inf\{t : K(t) > x\}. \tag{3.119}$$

Dla ustalonego x zmienna losowa $T(x)$ oznacza chwilę w której $K(t)$ przekracza wartość x. Na rysunku 3.16 przedstawiona jest realizacja tego procesu odpowiadająca realizacji procesu kumulacji przedstawionej na rysunku 3.14. Realizacje tego procesu są funkcjami prawostronnie ciągłymi.



Rys. 3.16. Realizacja procesu $\{T(x) : x \geqslant 0\}$

Analiza wykresu realizacji procesu $\{T(x) : x \geqslant 0\}$ pozwala zauważyć ważną równość

$$T(x) = x + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)}, \tag{3.120}$$

gdzie

$$N_\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in [0, \zeta_1) \\ n & \text{dla} \quad x \in [\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n, \ \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n + \zeta_{n+1}) \end{cases}, \tag{3.121}$$

natomiast zmienna $\gamma_0 = 0$ z prawdopodobieństwem 1, a więc

$$F_\gamma^{(0)}(u) = P\{\gamma_0 \leqslant u\} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{dla} \quad x \in [0, \infty) \end{cases}. \tag{3.122}$$

Proces $\{N_\zeta(x) : x \geqslant 0\}$ jest procesem odnowy, o prawostronnie ciągłych realizacjach generowanym, przez ciąg niezależnych zmiennych losowych $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$. Równość (3.119) ułatwia znalezienie rozkładów obu omawianych procesów losowych.

TWIERDZENIE 39. *Jednowymiarowa dystrybuanta rozkładu procesu losowego* $\{T(x) : x \geqslant 0\}$ *wyraża się wzorem*

$$P\{T(x) \leqslant t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_\gamma^{(n)}(t-x)\,[F_\zeta^{(n)}(x) - F_\zeta^{(n+1)}(x)], \tag{3.123}$$

natomiast jednowymiarowa dystrybuanta rozkładu procesu stochastycznego $\{K(t) : t \geqslant 0\}$ *ma postać*

$$P\{K(t) \leqslant x\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} F_\gamma^{(n)}(t-x)\,[F_\zeta^{(n)}(x) - F_\zeta^{(n+1)}(x)]. \tag{3.124}$$

D o w ó d: Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$P\{T(x) \leqslant t\} = P\{x + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)} \leqslant t\} = \tag{3.125}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)} \leqslant t - x \mid N_\zeta(x) = n\} P\{N_\zeta(x) = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_n \leqslant t - x\} P\{N_\zeta(x) = n\}.$$

Obliczymy czynniki wyrazów tego szeregu funkcyjnego. Jak wiemy, dystrybuanta rozkładu sumy niezależnych zmiennych losowych jest splotem dystrybuant składników tej sumy. Zatem

$$P\{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_n \leqslant t - x\} = F_{\gamma_0} * F_{\gamma_1} * F_{\gamma_2} * \ldots * F_{\gamma_n}(t-u) = F_\gamma^{(n)}(t-x).$$

Znajdziemy teraz rozkład procesu odnowy $\{N_\zeta(x) : x \geqslant 0\}$. Korzystając z definicji (3.120) mamy

$$P\{N_\zeta(x) = 0\} = P\{x \in [0,\ \zeta_1)\} = P\{\zeta > x\} = 1 - F_\zeta(x).$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$P\{N_\zeta(x) = n\} = P\{x \in [\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n,\ \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n + \zeta_{n+1}) =$$
$$1 - (P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n > x\} + P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n + \zeta_{n+1} \leqslant x\}) =$$
$$P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n \leqslant x\} - P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n + \zeta_{n+1} \leqslant x\}) = F_\zeta^{(n)}(x) - F_\zeta^{(n+1)}(x).$$

Ostatecznie, dla $n \in \mathbb{N}_0$ mamy

$$P\{N_\zeta(x) = n\} = F_\zeta^{(n)}(x) - F_\zeta^{(n+1)}(x).$$

Podstawiając do wzoru (3.124) otrzymujemy równość

$$P\{T(x) \leqslant t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_\gamma^{(n)}(t-x)\,[F_\zeta^{(n)}(x) - F_\zeta^{(n+1)}(x)].$$

Pierwsza teza twierdzenia została udowodniona. Dowód drugiej tezy staje się natychmiastowy, jeżeli zauważymy równość

$$P\{T(x) \leqslant t\} = P\{K(t) > x\} . \quad \square \tag{3.126}$$

TWIERDZENIE 40 (Kopociński [36]). *Jeżeli rozkłady zmiennych losowych ζ oraz γ mają skończone dodatnie wartości oczekiwane i skończone dodatnie wariancje to istnieje skończona wartość oczekiwana i istnieje skończona wariancja procesu losowego $\{T(x) : x \geqslant 0\}$ i wyrażają się one wzorami*

$$E[T(x)] = x + E(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] \,, \tag{3.127}$$

$$V[T(x)] = [E(\gamma)]^2\, V[N_\zeta(x)] + V(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] \,. \tag{3.128}$$

D o w ó d: Korzystając z równości (3.119), mamy

$$E[T(x)] = E(x + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)}) =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} E(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)} \,|\, N_\zeta(x) = n) P\{N_\zeta(x) = n\} =$$

$$= x + E(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} n\, P\{N_\zeta(x) = n\} = x + E(\gamma) E[N_\zeta(x)] \,.$$

Podobnie

$$E[T^2(x)] = E[(x + \gamma_0 + \gamma_+ \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)})^2] =$$

$$= x^2 + E(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)}^2) + 2xE(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{N_\zeta(x)}) +$$

$$+ E(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \ldots + \gamma_{N_\zeta(x)-1}\gamma_{N_\zeta(x)}) .$$

Ponieważ

$$E(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \ldots + \gamma_{N_\zeta(x)-1}\gamma_{N_\zeta(x)}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \ldots + \gamma_{N_\zeta(x)-1}\gamma_{N_\zeta(x)}) \,|\, N_\zeta(x) = n) P\{N_\zeta(x) = n\} =$$

$$= [E(\gamma)]^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\, P\{N_\zeta(x) = n\} =$$

$$= [E(\gamma)]^2 E[(N_\zeta^2(x)] - [E(\gamma)]^2 E[N_\zeta(x)] \,,$$

więc

$$E[T^2(x)] = x^2 + E(\gamma^2)E[N_\zeta(x)] + 2xE(\gamma)E[N_\zeta(x)] + [E(\gamma)]^2 E[(N_\zeta^2(x)] - [E(\gamma)]^2 E[N_\zeta(x)] =$$

$$= x^2 + 2\,x\, E(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] + [E(\gamma)]^2\, E[N_\zeta^2(x)] + V(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] \,.$$

Zatem

$$V[T(x)] = E[T(x)^2] - E[T(x)]^2 =$$

$$= x^2 + 2\,x\, E(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] + [E(\gamma)]^2\, E[N_\zeta^2(x)] + V(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] -$$

$$- x^2 - 2xE(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] - [E(\gamma)]^2\, E[N_\zeta(x)]^2 =$$

$$= [E(\gamma)]^2\, V[N_\zeta(x)] + V(\gamma)\, E[N_\zeta(x)] \,. \quad \square$$

Z twierdzenia tego wynikają wnioski.

Wniosek 17. *Jeżeli proces odnowy* $\{N_\zeta(x) : x \geqslant 0\}$ *jest nieokresowy, to*

$$E[T(x)] = \frac{E(\gamma) + E(\zeta)}{E(\gamma)} x + E(\gamma) \frac{V(\zeta) - [E(\zeta)]^2}{2[E(\zeta)]^2} + o(1), \quad x \to \infty. \tag{3.129}$$

D o w ó d: Z twierdzenia teorii odnowy [33] wynika równość

$$E[N_\zeta(x)] = \frac{x}{E(\zeta)} + \frac{V(\zeta) + [E(\zeta)]^2}{2[E(\zeta)]^2} - 1 + o(1), \quad x \to \infty.$$

Podstawiając tę równość do (3.127), otrzymujemy wzór (3.129). □

3.6.2. Sumaryczny czas przebywania procesu SM w określonym stanie

Niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o jądrze $Q(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$ typu ciągłego. Proces losowy $\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ określony wzorem

$$K_j(t) = \int_0^t I[X(u) = j] du, \tag{3.130}$$

gdzie

$$I[X(u) = j] = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad X(u) = j \\ 0 & \text{dla} \quad X(u) \neq j \end{cases}$$

oznacza sumaryczny czas przebywania procesu SM w stanie j w przedziale $[0, t]$.

Zauważmy, że

$$E[\int_0^t I[X(u) = j \,|\, X(0) = i] du] = \int_0^t EI[X(u) = j \,|\, X(0) = i] du =$$

$$= \int_0^t P\{X(u) = j \,|\, X(0) = i\} du = \int_0^t P_{ij}(u) du.$$

Definicja procesu $\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ sugeruje jego związek z procesem alternującym. Jeżeli przez ζ_n będziemy rozumieli zmienne losowe o jednakowym rozkładzie $G_j(t) = P\{\zeta \leqslant t\} = P\{T_j \leqslant t\}$, oznaczające kolejne czasy trwania stanu j, natomiast zmienne losowe γ_n będą oznaczać długości przedziałów czasu, które upływają od chwili n-tego „wyjścia" procesu SM ze stanu j do chwili ponownego „wejścia" do do tego stanu, to definicja procesu $\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ startującego ze stanu j pokrywa się niemal z definicją prostego procesu kumulacji procesu alternującego. Jedyna, ale istotna różnica polega na tym, że dla procesu SM zmienne losowe ζ_n, γ_n ,$n \in \mathbb{N}$ mogą być zależne. Można jednak wyodrębnić klasę procesów SM dla których, te zmienne losowe są niezależne.

LEMAT 1. *Jeżeli* $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ *jest procesem semi-markowskim o jądrze* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i,j \in S]$ *takim, że*

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}G_j(t), \quad gdzie \quad p_{ii} = 0 \quad dla \quad i \in S\,, \tag{3.131}$$

to zmienne losowe ζ_n, $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$ *są niezależne oraz*

$$\Theta_{jj}^{(n)} = \zeta_n + \gamma_n\,. \tag{3.132}$$

D o w ó d: Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $n = 1$. Zauważmy, że

$$P\{\zeta_1 \leqslant x\} = P\{T_j \leqslant x\} = P\{\tau_1 - \tau_0 \leqslant x, \,|\, X(\tau_0) = j\} = G_j(x)\,.$$

Korzystając z własności procesu SM mamy

$$P\{\gamma_1 \leqslant y\} = \sum_{n=2}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_1) \neq j \,|\, X(\tau_0) = j\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_2) \neq j \,|\, X(\tau_1) = k\}$$

$$\cdot P\{X(\tau_1) = k \,|\, X(\tau_0) = j\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_2) \neq j \,|\, X(\tau_1) = k\}p_{jk}.$$

Znajdziemy łączny rozkład zmiennych losowych ζ_1, γ_1.

$$P\{\zeta_1 \leqslant x\,,\ \gamma_1 \leqslant y\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_1) \neq j, \tau_1 \leqslant x \,|\, X(\tau_0) = j\} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_2) \neq j \,|\, X(\tau_1) = k, \tau_1 \leqslant x\}$$

$$\cdot P\{X(\tau_1) = k, \tau_1 \leqslant x \,|\, X(\tau_0) = j\} \ =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_2) \neq j \,|\, X(\tau_1) = k\}Q_{jk}(x) =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\neq j}^{\infty} P\{X(\tau_n) = j, \tau_n - \tau_1 \leqslant y, X(\tau_{n-1}) \neq j, \ldots, X(\tau_2) \neq j \,|\, X(\tau_1) = k\}p_{jk}G_j(x) =$$

$$= P\{\gamma_1 \leqslant y\}P\{\zeta_1 \leqslant x\}\,. \qquad \square$$

W pracy [22] przedstawione są wzory pozwalające obliczyć jednowymiarowy rozkład procesu$\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ w oparciu o jądro procesu SM. Są one jednak na tyle skomplikowane , że ich praktyczna użyteczność jest wątpliwa. Jednak w wielu przypadkach można zadowolić się rozkładem przybliżonym tego procesu którego postać wynika z następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 41. *Niech* $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ *będzie procesem SM o jądrze typu ciągłego* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$ *takim, że*

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} G_j(t)\,, \quad \text{gdzie } p_{ii} = 0 \quad \text{dla} \quad i \in S\,. \tag{3.133}$$

Jeżeli ponadto są spełnione założenia twierdzenia 30, to

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{K_j(t) - m_j(t)}{\sigma_j(t)} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du\,, \tag{3.134}$$

gdzie

$$m_j(t) = P_j\, t = \frac{E(T_j)}{E(\Theta_{jj})}\, t\,, \tag{3.135}$$

$$\sigma_j(t) = \sqrt{\frac{V(T_j)\,[E(\Theta jj) - E(T_j)]^2 + [V(\Theta_{jj}) - V(T_j)]\,[E(T_j)]^2}{[E(\Theta_{jj})]^3}\, t}\,. \tag{3.136}$$

D o w ó d: [22].

Oznacza to, że sumaryczny czas przebywania procesu SM w stanie j w przedziale $[0,\ t]$, dla dużego t ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(m_j(t), \sigma_j(t))$. Zauważmy, że wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej Θ_{jj} można otrzymać rozwiązując układy równań liniowych (3.24) i (3.26).

Z procesem $\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ związany jest proces losowy $\{T_j(x) : x \geqslant 0\}$ określony wzorem

$$T_j(x) = \inf\{t : K_j(t) > x\}\,. \tag{3.137}$$

Dla ustalonego x zmienna losowa $T_j(x)$ oznacza chwilę w której sumaryczny czas przebywania przebywania procesu SM w stanie j w przedziale $[0,\ t]$ przekracza wartość x.

TWIERDZENIE 42. *Przy założeniach poprzedniego twierdzenia*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{T_j(x) - m_j(x)}{\sigma_j(x)} \leqslant y\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}} du\,, \tag{3.138}$$

gdzie

$$m_j(x) = \frac{1}{P_j}\, x = \frac{E(\Theta_{jj})}{E(T_j)}\, x\,, \tag{3.139}$$

$$\sigma_j(t) = \sqrt{\frac{V(T_j)\,[E(\Theta jj) - E(T_j)]^2 + [V(\Theta_{jj}) - V(T_j)]\,[E(T_j)]^2}{[E(T_j)]^3}\, x}\,. \tag{3.140}$$

D o w ó d: [22].

3.6.3. Procesy kumulacji procesu SM.

Procesy kumulacji związane z różnego typu procesami SM rozważane były między innymi przez Anisimowa [1], [2], Cinlara [9], Limniosa i Oprisana [41], Silvestrowa [50]. Przedstawimy pojęcia i twierdzenia dotyczące procesu kumulacji związanego z procesem SM o dyskretnym zbiorze stanów.

Niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie regularnym procesem SM o jądrze typu ciągłego $Q(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$. Przyjmujemy, że funkcja $h : S \to \mathbb{R}_+$ jest ograniczona.

DEFINICJA 43. *Proces stochastyczny* $\{L(t) : t \geqslant 0\}$ *określony wzorem*

$$L(t) = \int_0^t h[X(u)]du \quad z\ pr.\ 1 \tag{3.141}$$

nazywamy procesem kumulacji procesu SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$.

Proces losowy $\{K_j(t) : t \geqslant 0\}$ oznaczający sumaryczny czas przebywania procesu SM w stanie j w przedziale $[0, t]$ jest szczególnym przypadkiem procesu kumulacji. Przyjmując $g = I_{\{j\}}$ otrzymujemy $L(t) = K_j(t)$.

Jeżeli $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ markowskim procesem odnowy definiującym proces SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$, to proces kumulacji $\{L(t) : t \geqslant 0\}$ można przedstawić w postaci

$$L(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} h(\xi_{k-1})\vartheta_k + (t - \tau_{N(t)})h(\xi_{N(t)})\,. \tag{3.142}$$

Wyniki przedstawione w pracy Limniosa i Oprisana [41] zaadoptujemy do rozpatrywanego tu przypadku. Rozważymy łączny rozkład procesów $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ oraz $\{L(t) : t \geqslant 0\}$.

Niech

$$U_{iA}(t, x) = P\{X(t) \in A,\ L(t) \leqslant x \,|\, X(0) = i\}\,, \quad i \in S\,. \tag{3.143}$$

TWIERDZENIE 43. *Funkcje* $U_{i,A}(t, x)$, $i \in S$ *spełniają układ równań całkowych*

$$U_{i,A}(t, x) = I_{A\times[0,x]}(i, h(i)\,t)[1 - G_i(t)] + \tag{3.144}$$

$$+ \sum_{j\in S} \int_0^t U_{j,A}(t - v,\, x - h(i)v)\, dQ_{ij}(v)\,, \quad i \in S\,. \tag{3.145}$$

D o w ó d: Zauważmy, że

$$U_{iA}(t, x) = P\{X(t) \in A,\ L(t) \leqslant x, \tau_1 > t \,|\, X(0) = i\} +$$
$$+ P\{X(t) \in A,\ L(t) \leqslant x, \tau_1 \leqslant t \,|\, X(0) = i\}\,.$$

Pierwszy składnik prawej strony równości ma postać

$$P\{X(t) \in A,\ L(t) \leqslant x, \tau_1 > t \,|\, X(0) = i\} =$$
$$= P\{X(0) \in A,\ g(X(0))\,t \leqslant x, \tau_1 > t \,|\, X(0) = i\} = I_{A\times[0,x]}(i, h(i)\,t)\, P\{\tau_1 > t\} =$$
$$= I_{A\times[0,x]}(i, h(i)\,t)[1 - G_i(t)]\,.$$

Rozważymy drugi składnik Korzystając z własności markowskiego procesu odnowy otrzymujemy

$$P\{X(t) \in A,\, L(t) \leqslant x, \tau_1 \leqslant t \,|\, X(0) = i\} =$$

$$= \sum_{j \in S} \int_0^t P\{X(t-\tau_1) \in A,\, L(t-\tau_1) \leqslant x - h(i)\tau_1,\, \tau_1 \in dv,\, X(\tau_1) = j \,|\, X(0) = i\} =$$

$$= \sum_{j \in S} \int_0^t P\{X(t-\tau_1) \in A,\, L(t-\tau_1) \leqslant x - h(i)\tau_1 \,|\, X(\tau_1) = j\} \cdot$$

$$P\{\tau_1 \in dv,\, X(\tau_1) = j \,|\, X(0) = i\} = \sum_{j \in S} \int_0^t U_{j,A}(t-v,\, x - h(i)v)\, dQ_{ij}(v)\,.$$

Tak więc twierdzenie zostało udowodnione. □

Przyjmując $A = S$ otrzymujemy

$$U_{iS}(t,x) = P\{L(t) \leqslant x \,|\, X(0) = i\}\,, \quad i \in S\,. \tag{3.146}$$

WNIOSEK 18. *Warunkowe dystrybuanty procesu kumulacji spełniają układ równań*

$$U_{iS}(t,x) = I_{[0,x]}(h(i)\,t)[1 - G_i(t)] + \sum_{j \in S} \int_0^t U_{jS}(t-v,\, x - h(i)v) dQ_{ij}(v)\,. \tag{3.147}$$

Przy $x \to \infty$ otrzymujemy

WNIOSEK 19.

$$U_{iA}(t,\infty) = P\{X(t) \in A \,|\, X(0) = i\} =: P_{iA}(t)\,, \;\; i \in S. \tag{3.148}$$

Prawdopodobieństwa $P_{iA}(t)$, $i \in S$ *spełniają układ równań*

$$P_{iA}(t) = I_A(i)[1 - G_i(t)] + \sum_{j \in S} \int_0^t P_{jA}(t-v) dQ_{ij}(v)\,. \tag{3.149}$$

Jeżeli A oznacza podzbiór zdatności systemu, to $P_{iA}(t)$ jest gotowością systemu, który w chwili $t = 0$ był w stanie $i \in S$.

Zauważmy, że przyjmując $A = \{j\}$ otrzymujemy rozpatrywany wcześniej układ równań o niewiadomych prawdopodobieństwach przejścia $P_{ij}(t)$.

Niech teraz

$$\Upsilon_{iA}(t,x) = P\{X(u) \in A\,,\; \forall u \in [0,\, t]\,,\; L(t) \leqslant x \,|\, X(0) = i\}\,, \quad i \in A \subset S\,. \tag{3.150}$$

Podobnie można udowodnić twierdzenie

TWIERDZENIE 44. *Funkcje $\Upsilon_{iA}(t,x)$ $i \in A \subset S$ spełniają układ równań całkowych*

$$\Upsilon_{iA}(t,x) = I_{A\times[0,x]}(i, h(i)\,t)[1-G_i(t)] + \sum_{j\in A}\int_0^t \Upsilon_{jA}(t-v,\ x-h(i)v)\,dQ_{ij}(v)\,. \quad (3.151)$$

Zauważmy, że gdy $x \to \infty$, to

$$\Upsilon_{iA}(t,\infty) = \lim_{x\to\infty}\Upsilon_{iA}(t,x) = P\{X(u) \in A\,,\ \forall u \in [0,t]\,|\,X(0)=i\}\,, \quad i \in A \subset S\,. \quad (3.152)$$

Jeżeli A jest podzbiorem stanów zdatności systemu, to

$$R_i(t) = \Upsilon_{iA}(t,\infty)\,, \quad i \in A \subset S\,. \quad (3.153)$$

jest funkcją niezawodności systemu, który w chwili $t = 0$ był w stanie $i \in A$.

WNIOSEK 20. *Warunkowe funkcje niezawodności spełniają układ równań całkowych*

$$R_i(t) = 1 - G_i(t) + \sum_{j\in A}\int_0^t R_j(t-v)\,dQ_{ij}(v)\,, \quad i \in A\,. \quad (3.154)$$

Jeżeli T jest zmienną losową oznaczającą czas zdatności systemu, to

$$R_i(t) = P\{T > t\,|\,X(0)=i\}\,, \quad i \in A \quad (3.155)$$

oraz

$$R_i(t,s) := P\{T > t+s\,|\,T > t\,,\ X(0)=i\} = \frac{R_i(t+s)}{R_i(t)}\,, \quad i \in A\,. \quad (3.156)$$

3.6.4. Graniczne własności procesu kumulacji

Graniczne własności procesów kumulacji związanych z różnego typu markowskimi procesami odnowy były badane między innymi przez Anisimowa [1], [2], Cinlara [9], Limniosa i Oprisana [41], Silvestrowa [50].

Niech $\{\xi_n = X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ będzie łańcuchem Markowa włożonym w proces SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ i niech

$$\boldsymbol{p}_i(n) = [p_{ij}(n) : n \in \mathbb{N}_0]\,,$$

gdzie

$$p_{ij}(n) = P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\}\,.$$

Zakładamy, że istnieje rozkład stacjonarny $\pi = [\pi_i : \ i \in S]$ łańcucha Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Przypomnijmy, że rozkład stacjonarny jest macierzą jednowierszową taką, że

$$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij} = \pi_j\,,\ j \in S \quad \text{oraz} \quad \sum_{i\in S}\pi_i = 1\,, \quad (3.157)$$

gdzie $P = [p_{ij} : \; i,j \in S]$ jest macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Przyjmujemy, że istnieje ciąg liczb nieujemnych $\{a_n\}$, taki że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz

$$\|\boldsymbol{p}_i(n) - \pi\| \leqslant a_n \quad \text{dla każdego } i \in S \quad \text{oraz } n \in \mathbb{N}. \tag{3.158}$$

Sformułujemy odpowiednik twierdzenia, które zostało sformułowane i udowodnione przez Limniosa i Oprisana w pracy [42]

TWIERDZENIE 45 (Mocne prawo wielkich liczb). *Niech*

$$m_i = E(T_i) = \int\limits_0^\infty [1 - G_i(u)]du\,. \tag{3.159}$$

Jeżeli

$$\varpi = \sum_{i\in S} \pi_i\, h(i)\, m_i < \infty\,, \tag{3.160}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} h(\xi_{k-1})\,\vartheta_k}{n} = \varpi, \quad \text{z pr.1.} \tag{3.161}$$

Okazuje się, że proces kumulacji przy pewnych założeniach ma rozkład asymptotycznie normalny. Centralne twierdzenie graniczne dla tego rodzaju procesu podał Anisimow [1], [2]. Uogólnienia można znaleźć na przykład w pracach [41], [50].

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] HOWARD R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] JAŹWIŃSKI J., BORGOŃ J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-72-3